ZAHLENFOLGEN
Teil 2

Geometrische Folgen

Auch Wachstumsfolgen
Viele Aufgaben

Datei Nr. 40012

Friedrich Buckel

Stand: November 2005

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

4 Geometrische Folgen

4.1 Definition und erste Beispiele

Eine Zahlenfolge heißt geometrisch, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad (1)$$

Beispiele

a) $3 \xrightarrow[\cdot 2]{} 6 \xrightarrow[\cdot 2]{} 12 \xrightarrow[\cdot 2]{} 24 \xrightarrow[\cdot 2]{} 48 \xrightarrow[\cdot 2]{} \ldots$

Die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder sind stets 2: $\frac{a_2}{a_1} = 2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$

b) $8 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} 4 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} 2 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} 1 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} \tfrac{1}{2} \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{} \tfrac{1}{4} \ldots$

Die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder hier $\tfrac{1}{2}$: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots$

c) Für die Aufgabe „Prüfe nach, ob eine geometrische Folge vorliegen kann“

$a_1 = \tfrac{4}{9}$; $a_2 = \tfrac{4}{3}$; $a_3 = 4$; $a_4 = 12$; ...

müssen diese Quotienten berechnet werden:

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} = 3$; $\quad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$; $\quad q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{12}{4} = 3$; ...,

Weil diese Quotienten gleich sind, ***kann*** eine geometrische Folge vorliegen.

Man sagt „kann“, weil es zahllose weitere Folgen gibt, die z. B. ab a_5 oder später abweichen und keine geometrische Folge bilden.

d) Die Folge $\left\{12; -6\sqrt{2}; 6; -3\sqrt{2}; 3; -\tfrac{3}{2}\sqrt{2}; \ldots\right\}$ ist zu untersuchen.

Lösung: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6\sqrt{2}}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{6}{-6\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{-3\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\qquad \frac{a_5}{a_4} = \frac{3}{-3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{a_6}{a_5} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{2}}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

Da alle möglichen Quotienten aufeinander folgender Zahlen gleich groß, nämlich q = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sind, liegt eine geometrische Folge vor.

4.2 Die innere Struktur von geometrischen Folgen

Aus der Definition, wonach die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ konstant sein sollen, folgt diese

Gleichung: $\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$ (2)

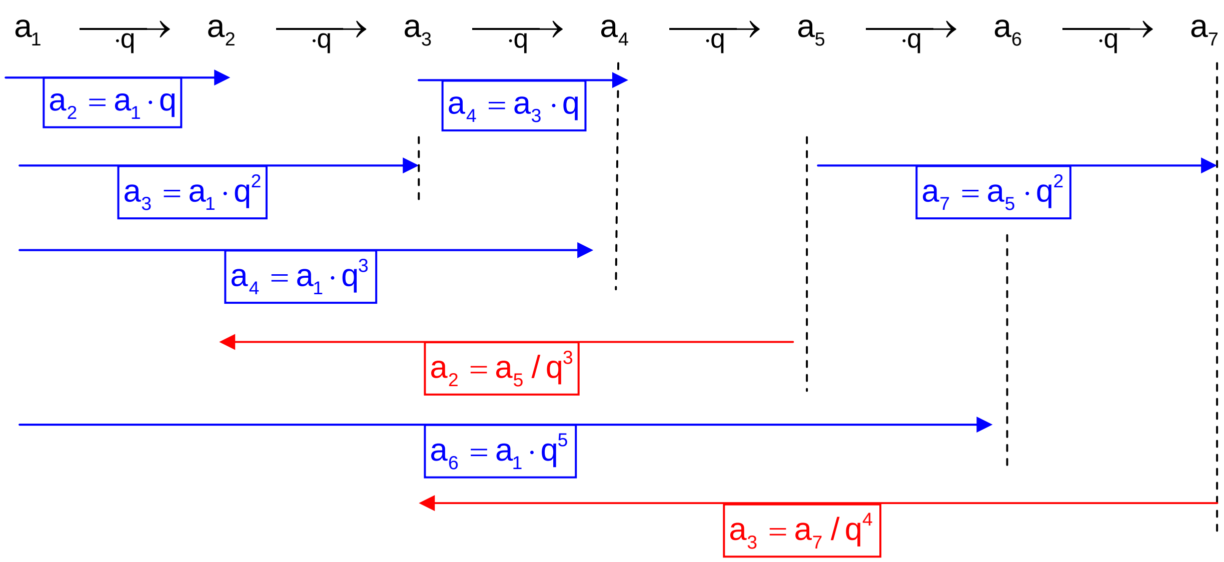
Sie zeigt, wie man vorgehen muß, um eine arithmetische Folge zu erzeugen.

Beispiel 1: Man wählt ein erstes Glied der Folge, etwa $a_1 = 3$ und z.B. $q = 5$

Dann folgt nach (2):

$$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 5 = 15$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = 15 \cdot 5 = 75$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = 75 \cdot 5 = 375$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = 375 \cdot 5 = 1875 \quad \text{usw.}$$

Dieses Vorgehen läßt sich sehr gut graphisch darstellen:



Folglich kann man a_4 auch direkt aus a_1 berechnen: $a_4 = a_1 \cdot q^3$

Oder a_6 aus a_1: $a_6 = a_1 \cdot q^5$

Oder a_7 aus a_5: $a_7 = a_7 \cdot q^2$

Oder a_{12} aus a_5: $a_{12} = a_5 \cdot q^7$

Oder a_n aus a_m (n>m): $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

Oder a_n aus a_1: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Oder a_n aus a_2: $a_n = a_2 \cdot q^{n-2}$ usw.

Oder in umgekehrter Richtung: a_2 aus a_5: $a_2 = \frac{a_5}{q^3}$

Oder a_3 aus a_7: $a_3 = \frac{a_7}{q^4}$

Bei unserer Beispielfolge gilt somit $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.

Beispiel 2: Gegeben ist die Folge $\left\{ \tfrac{1}{8}; \tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{2}; 1; 2; 4; ... \right\}$
Zeige, daß es sich um eine arithmetische Folge handeln kann.
Stelle eine Berechnungsformel für a_n auf.

Lösung: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \tfrac{1}{4} \cdot 8 = 2;$ $\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 = 2;$

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;$ $\frac{a_5}{a_4} = \frac{2}{1} = 2;$ $\frac{a_6}{a_5} = \frac{4}{2} = 2.$

Da alle möglichen Quotienten aufeinander folgender Zahlen gleich groß, nämlich q = 2 sind, liegt eine geometrische Folge vor.

Berechnung von a_n : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \tfrac{1}{8} \cdot 2^{n-1}$

Dies läßt sich umformen: $a_n = 2^{-3} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-4}$

Oder: $a_n = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^n}{2} = \frac{1}{16} \cdot 2^n$ usw.

Beispiel 3: Von einer geometrischen Folge kennt man $a_3 = \frac{1}{64}$ und $a_6 = \frac{1}{8}$.
Berechne q, a_1 und a_{15} .

Lösung:

$$q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{64}{1} = 8 \Rightarrow q = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Also wird $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{1}{64}}{2^2} = \frac{1}{64 \cdot 4} = \frac{1}{256}$

Und schließlich: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{256} \cdot 2^{n-1}$

Mit den Regeln der Potenzrechnung kann man diesen Term verändern:

$2^{n-1} = \frac{2^n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{256} \cdot \frac{2^n}{2} = \frac{1}{512} \cdot 2^n = \frac{2^n}{2^9}$ z.B. für $a_{13} = \frac{2^{13}}{2^9} = 2^4 = 16$

Beispiel 4: Von einer geometrischen Folge kennt man $a_2 = 9$ und $a_7 = \frac{1}{27}$.
Berechne q , a_1 und a_n .

$q^5 = \frac{a^7}{a^2} = \frac{1}{27 \cdot 9} = \frac{1}{3^3 \cdot 3^2} = \frac{1}{3^5} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$ ergibt $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 9 \cdot 3 = 27.$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n : \frac{1}{3} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 81 \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{81}{3^n} = 81 \cdot 3^{-n}$$

Beispiel 5: Von einer geometrischen Folge kennt man $a_3 = 4$ und $a_6 = 8\sqrt{2}$.
Berechne a_9 und a_n .

$$q^3 = \frac{a^6}{a^3} = \frac{8\sqrt{2}}{4} = \mathbf{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}^3 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

$$a^9 = a^6 \cdot q^3 = 8\sqrt{2} \cdot \mathbf{2\sqrt{2}} = 16 \cdot 2 = 32$$

Die Formel für a_n kann man von a_1 aus bestimmen, also so $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Aber dazu muß man zuerst a_1 kennen. Gut, wer will, kann dies berechnen:

$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{2} = 2$. Dann erhält man

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \sqrt{2}^{n-1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{n+1}$$

Man kann aber genauso von a_3 aus rechnen, das geht dann so:

$$a_n = a_3 \cdot q^{n-3} = 4 \cdot \sqrt{2}^{n-3} = 2^2 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{2+\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}$$

Daraus folgt dann $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$

Beispiel 6: Von einer geometrischen Folge kennt man $a_4 = 3$ und $a_8 = 27$
Berechne alle Glieder von a_1 bis a_7 und a_n.

$$q^4 = \frac{a^8}{a^4} = \frac{27}{3} = 9 \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{9} = \pm\sqrt{3}$$

ACHTUNG: Es gibt zwei passende geometrische Folgen,

Mit $a_1 = \frac{a^4}{q^3} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und mit $a_1{}^* = \frac{a^4}{q^3} = \frac{3}{-3\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Daraus folgt:

$a_2 = a_1 \cdot q = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = +1$ (eindeutig!)

$a_3 = a_2 \cdot q = 1 \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm\sqrt{3}$

$a_4 = a_3 \cdot q = \pm\sqrt{3} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = 3$ (eindeutig!)

$a_5 = a_4 \cdot q = 3 \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm 3\sqrt{3}$

$a_6 = a_5 \cdot q = \pm 3\sqrt{3} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = 9$ (eindeutig!)

$a_7 = a_6 \cdot q = 9 \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm 9\sqrt{3}$

und $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right)^{n-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(\pm\sqrt{3}\right)^n}{\pm\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(\pm\sqrt{3}\right)^n$$

Diese beiden Folgen kann man so darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\frac{1}{\sqrt{3}} & \searrow & & \nearrow & \sqrt{3} & \searrow & & \nearrow & 3\sqrt{3} & \searrow & & \nearrow & 9\sqrt{3} & \searrow & \\
 & & 1 & & & & 3 & & & & 9 & & & & 27 \\
-\frac{1}{\sqrt{3}} & \nearrow & & \searrow & -\sqrt{3} & \nearrow & & \searrow & -3\sqrt{3} & \nearrow & & \searrow & -9\sqrt{3} & \nearrow &
\end{array}$$

Man beobachtet, daß hier zwei Folgen verknüpft sind. Sie treffen sich immer bei jedem übernächsten Glied, weil bei eben bei q^2 der Vorzeichenunterschied weg fällt. Die untere Folge ist wegen negativem q alternierend (d.h. sie wechselt ständig das Vorzeichen.

Aufgaben

(1) Untersuche, ob eine geometrische Folge vorliegt. Wenn ja, erstelle den Funktionsterm für a_n .

(a) $a_3 = 15;\quad a_5 = 375;\quad a_8 = 46875$

(b) $a_3 = 18;\ a_6 = \frac{9}{4};\quad a_8 = \frac{9}{32}$

(c) $a_2 = 36;\quad a_4 = 81;\quad a_7 = \frac{2187}{8}$

(d) $a_1 = -27;\quad a_3 = -3;\ a_4 = 1$

(2) Gegeben ist eine geometrische Folge durch 2 Glieder. Berechne die angegebenen Glieder der Folge sowie den Funktionsterm für a_n .

(a) $a_2 = \frac{4}{5};\quad a_3 = \frac{2}{25}\ ;\ a_1 = ?\ ;\ a_4 = ?$

(b) $a_3 = 1\ ;\ a_6 = \frac{1}{8}\ ;\ a_{10} = ?\ ;\ a_1 = ?$

(c) $a_4 = 24\ ;\quad a_6 = \frac{32}{3}\ ;\ a_8 = ?\ ;\ a_{11} = ?$

(d) $a_3 = 144\ ;\ a_7 = \frac{729}{16}\ ;\ a_2 = ?\ ;a_5 = ?$

(e) $a_3 = 4\ ;\ a_6 = 8\sqrt{2}\ ;\ a_4 = ?\ ;\ a_5 = ?$

(f) $a_5 = 3\sqrt{3};\quad a_8 = 27\ ;\ a_2 = ?\ ;\ a_6 = ?$

4.3 Exponentialfolgen sind Geometrische Folgen

In all unseren Beispielen enthielt der Term für a_n die Variable n im Exponenten. Es lag also stets eine Exponentialfunktion vor. Dies zeigt ja schon die hergeleitete Formel

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wir wollen nun einige solche Exponentialfolgen untersuchen.

Beispiel 7: Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = \frac{2^n}{32}$.
Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

Beweis: $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}}{32}}{\frac{2^n}{32}} = \dfrac{2^{n+1}}{32} \cdot \dfrac{32}{2^n} = 2$ ist konstant.

Beispiel 8: Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = \frac{3^{n-4}}{7^{n+1}}$.
Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

Beweis: $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n-3}}{7^{n+2}} \cdot \dfrac{7^{n+1}}{3^{n-4}} = \dfrac{3}{7}$ ist konstant.

Beispiel 9: Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = \left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-2}$.
Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

Beweis: $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-1}}{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-2}} = \left(-\sqrt[3]{2}\right)$ ist konstant.

Beispiel 10: Gegeben ist die Folge a_n durch $a_n = 4^{2-\frac{1}{2}n}$.
Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

Beweis: $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4^{2-\frac{1}{2}(n+1)}}{4^{2-\frac{1}{2}n}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ ist konstant.

Beispiel 11: Liegt bei $a_n = 12 - 2^n$ eine geometrische Folge vor ?

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{12-2^{n+1}}{12-2^n}$. Irgendwie weiß man nicht, wie man weiterrechnen soll.

In so einem Falle berechnet man sich einige Glieder der Folge:
$a_1 = 12 - 2 = 10$; $a_2 = 12 - 4 = 8$; $a_3 = 12 - 8 = 4$; ...

Das reicht schon um zu erkennen, daß **keine** geometrische Folge vorliegt:
$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$; $\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. Diese Quotienten sind nämlich verschieden !

Diese Formeln haben nicht alle die gleiche Bauart.

$$a_n = \frac{2^n}{32}, \quad a_n = \frac{3^{n-4}}{7^{n+1}}, \quad a_n = \left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-2},$$

Doch durch algebraische Umformungen kann man sie alle jeder der beiden Formen bringen:

$$a_n = a \cdot b^n \quad \text{oder} \quad a_n = b^{r \cdot n + s}$$

Beispiel:

$$a_n = \frac{2^n}{32} = \underbrace{\frac{1}{32}}_{a} \cdot 2^n = 2^{-5} \cdot 2^n = 2^{n-5}$$

$$a_n = \frac{3^{n-4}}{7^{n+1}} = \frac{3^n}{3^4 \cdot 7^n \cdot 7} = \underbrace{\frac{1}{567}}_{=a} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n$$

$$a_n = \left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-2} = \frac{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^n}{-\sqrt[3]{2}} = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}_{=a} \cdot \left(-\sqrt[3]{2}\right)^n$$

Daß Formeln der 2. Art nichts anderes sind als die von der ersten Bauart zeigt diese Umformung:

$$a_n = b^{r \cdot n + s} = b^{r \cdot n} \cdot b^s = \underbrace{\left(b^r\right)}_{=B}^n \cdot \underbrace{b^s}_{=A} = A \cdot B^n$$

SATZ: Jede Folge der Bauart

$$a_n = a \cdot b^n \quad \textbf{\textit{oder}} \quad a_n = b^{r \cdot n + s}$$

ist eine geometrische Folge.

Beweis:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot b^{n+1}}{a \cdot b^n} = b \quad \text{oder} \quad q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{r \cdot (n+1) + s}}{b^{r \cdot n + s}} = b^r \quad \text{konstant !}$$

Aufgaben

(3) Berechne die ersten 5 Glieder dieser Folgen:

(a) $a_n = 2^{3n}$ (b) $a_n = 3 \cdot 2^{n+1}$ (c) $a_n = 3^{-2n+2}$

(d) $a_n = 3 \cdot 2^{4-n}$ (e) $a_n = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (f) $a_n = \frac{3}{2^{n-1}}$

(g) $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-n}$ (h) $a_n = \sqrt{\frac{2}{3^n}}$ (i) $a_n = 48 \cdot \frac{2^{n-2}}{3^{n+1}}$

(4) Schalte zwischen die beiden gegebenen Zahlen die passenden Zahlen, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_1 = 8$; $a_5 = 64$ (b) $a_1 = 5$; $a_4 = 6$

(5) Schalte zwischen diese Zahlen so wenig wie möglich neue, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_3 = \sqrt{2}$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = 8$

(b) $b = 12$; $a_5 = \frac{4}{3}$; $c = \frac{4}{81}$

(c) $b = \frac{1}{2}$; $c = 4$; $a_7 = 128\sqrt{2}$

4.4 Logarithmen für Geometrische Folgen

Grundaufgaben:

(G1) Gegeben ist die Folge $a_n = 2^n$. Ist b = 131 072 ein Glied dieser Folge ?

Lösung:

Es muß also gelten: $a_n = 2^n = 131072$

$$2^n = 131072 \quad (1)$$

Die Unbekannte n steht im Exponenten. Es gibt nur eine Möglichkeit, diese von dort herunter zu holen, das ist die Anwendung des 3. Logarithmengesetzes. Dieses heißt:

$$\boxed{\log_b a^n = n \cdot \log_b a}$$

Demnach gilt auch $\log_b 2^n = n \cdot \log_b 2$.

Man nimmt nun eine solche Basis, deren Logarithmen im Taschenrechner eingearbeitet sind. Beispielsweise die Zehnerlogarithmen, also die Logarithmen zur Basis 10. Diese schreibt man entweder so: $\log_{10} 2$ oder nach alter Tradition kurz $\lg 2$. Auf den Taschenrechnern trägt die Taste dafür den Aufdruck „log“ . Die Taste ln x ist ein andere Logarithmusfunktion, nämlich zur Basis e = 2,71828... , das ist die Eulersche Zahl. Man könnte sie auch verwenden.

Wir logarithmieren also die Gleichung (1), d.h. wir nehmen von beiden Seiten den Logarithmus:

$$\lg 2^n = \lg 131072$$

Nun wenden wir auf die linke Seite das 3. Logarithmengesetz an:

$$n \cdot \lg 2 = \lg 131072$$

und dividieren durch lg 2:

$$n = \frac{\lg 131072}{\lg 2} = 17$$

Ergebnis: $2^{17} = 131072$, also ist $b = a_{17}$.

(G2) Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{1}{27}3^n$. Ist b = 59049 ein Glied dieser Folge ?

Lösung:

Ansatz: $a_n = \frac{1}{27}3^n = 59049$

$$\frac{1}{3^3}\cdot 3^n = 59049$$

$$3^{n-3} = 59049$$

Logarithmieren: $\lg 3^{n-3} = \lg 59049$

3. Logarithmengesetz: $(n-3)\cdot\lg 3 = \lg 59049$

$$n-3 = \frac{\lg 59049}{\lg 3}$$

$$n = \frac{\lg 59049}{\lg 3} + 3 = 13$$

Ergebnis: $b = a_{13}$.

(G3) Gegeben ist die Folge $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Ist b = 0,156281 ein Glied dieser Folge ?

Lösung:

Ansatz: $\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0{,}156281$

Logarithmieren: $\lg\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lg 0{,}156281$

$$n\cdot\lg\left(\frac{3}{4}\right) = \lg 0{,}156281$$

$$n = \frac{\lg 0{,}156281}{\lg \frac{3}{4}} = \frac{\lg 0{,}156281}{\lg 3 - \lg 4} = 6{,}45...$$

Weil n keine natürliche Zahl ist, gehört b nicht zur Folge a_n .

(G4) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 120 \cdot 6^n$ und $b_n = 2 \cdot 7^n$.

Lösung:

Bedingung: $b_n > a_n$

d.h. $2 \cdot 7^n > 120 \cdot 6^n$

$$\frac{7^n}{6^n} > 60$$

$$\left(\frac{7}{6}\right)^n > 60$$

Logarithmieren: $\lg\left(\frac{7}{6}\right)^n > \lg 60$

ACHTUNG: Man muß hierzu wissen, daß sich die „Richtung" einer Ungleichung nicht ändert, wenn man logarithmiert. Das heißt:

$$\boxed{\text{Aus} \quad a > b \quad \text{folgt} \quad \log a > \log b \quad \text{(für jede Basis)}}$$

Der Grund liegt in der Monotonie der Logarithmusfunktion; was hier nicht besprochen werden soll.

Anwendung des 3. Logarithmengesetzes:

$$n \cdot \lg\left(\frac{7}{6}\right) > \lg 60 \quad \Big| : \lg\left(\frac{7}{6}\right)$$

$$n > \frac{\lg 60}{\lg \frac{7}{6}} = \frac{\lg 60}{\lg 7 - \lg 6} = 26{,}56...$$

Ergebnis: Ab n = 27 ist $b_n > a_n$.

Bemerkungen:

(1) In der letzten Rechenzeile wurde der Nenner umgeformt:

$\lg \frac{7}{6} = \lg 7 - \lg 6$, dies ist das 2. Logarithmengesetz und besagt nichts anderes als die bekannte Potenzregel in anderer Form: Der Exponent eines Bruches wird berechnet als Differenz der Exponenten des Zählers und des Nenners (bei gleicher Basis!).

(2) Es lohnt sich immer, sich ein Bild davon zu verschaffen, wir das Ergebnis genauer aussieht, also sollte man dieses nachprüfen:

$b_{26} = 2 \cdot 7^{26} = 1{,}8775 \cdot 10^{22} < a_{26} = 120 \cdot 6^{26} = 2{,}047 \cdot 10^{22}$ aber

$b_{27} = 2 \cdot 7^{27} = 1{,}3142 \cdot 10^{23} > a_{27} = 120 \cdot 6^{27} = 1{,}2282 \cdot 10^{23}$!

(G5) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2\cdot 3^n$ und $b_n = 25200\cdot 2^{-n}$.

Lösung:

Ansatz. $b_n < a_n$

d.h. $25200\cdot 2^{-n} < 2\cdot 3^n \quad (1)$

$$\frac{2^{-n}}{3^n} < \frac{2}{25200} \quad \text{bzw.} \quad 2^{-n}\cdot 3^{-n} < \frac{2}{25200} \qquad (2)$$

$$6^{-n} < \frac{2}{25200}$$

Logarithmieren: $\lg 6^{-n} < \lg \frac{2}{25200}$

3. Logarithmengesetz: $-n\cdot \lg 6 < \lg \frac{2}{25200} \quad \Big| :(-\lg 6)$

ACHTUNG: Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahle multipliziert oder dividiert, kehrt sie ihre Richtung um !

Es folgt also $n > \frac{\lg 2 - \lg 25200}{-\lg 6} = 5{,}2...$

Ergebnis: Ab $n = 6$ ist $b_n < a_n$.

Bemerkung:

Die Umformung von (1) nach (2) wurde ungeschickt gemacht, denn auf diese Weise sind links negative Exponenten entstanden und rechts der Bruch. Günstiger ist diese Rechnung:

$$25200\cdot 2^{-n} < 2\cdot 3^n \quad \Big| \cdot 2^n \text{ und } :2 \qquad (1)$$

$$\frac{25200}{2} < 3^n\cdot 2^n \qquad (2')$$

Seiten vertauschen: $6^n > 12600$

Logarithmieren: $n\cdot \lg 6 > \lg 12600 \Rightarrow n > \frac{\lg 12600}{\lg 6} \approx 5{,}2...$

Und hier dies beiden Folgen:

$a_1 = 6$	$a_2 = 18$	$a_3 = 54$	$a_4 = 162$	$a_5 = 486$	$a_6 = 1458$
$b_1 = 12600$	$b_2 = 6300$	$b_3 = 3150$	$b_4 = 1575$	$b_5 = 787{,}5$	$b_6 = 393{,}75$

(G6) Die Folge $a_n = 5^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt.
Wird die Folge kleiner als 10^{-15} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

Lösung:

Ansatz: $a_n < 10^{-15}$

d.h. $5^{-n} < 10^{-15}$

Nun kann man zwei verschiedene Wege einschlagen:

1. Weg

gleich logarithmieren:

$\lg 5^{-n} < \lg 10^{-15}$

$-n \cdot \lg 5 < -15$

$n > \dfrac{-15}{-\lg 5} = \dfrac{15}{\lg 5} \approx 21{,}4$

2. Weg: Zuerst die Kehrwerte:

$5^n > 10^{15}$

$\lg 5^n > 15$

$n \cdot \lg 5 > 15$

$n > \dfrac{15}{\lg 5} \approx 21{,}4$

Ergebnis: Ab $n = 22$ (d.h. für $n \geq 22$) ist $a_n < 10^{-15}$.

Bemerkung:

(1) Man erkennt am Verlauf der Rechnung, daß sie für jede noch so kleine Zahl, also 10^{-100} ; $10^{-100000}$ usw. durchführbar ist.
Das heißt aber, daß die Folge der Zahl 0 beliebig nahe kommt, aber sie wird selbst nie Null !. Auf Grund dieser Eigenschaft nennt man 0 den Grenzwert dieser Folge.

(2) Noch eine wichtige Bemerkung zur Algebra:

Bei solchen Rechnungen muß man immer wieder durch Logarithmen dividieren. **Man muß wissen, daß die Logarithmen von Zahlen zwischen 0 und 1 negativ sind.** Wenn man also beispielsweise eine Ungleichung durch $\lg 0{,}3$ oder $\lg \frac{2}{5}$ dividieren muß, dann dividiert man durch eine negative Zahl.
Dies wiederum hat zur Folge, daß man die Richtung der Ungleichung ändern muß !!!

(G7) Die Folge $a_n = 5 \cdot 4^n$ besteht aus lauter positiven Gliedern und wächst, denn wegen $q = 4$ ist $a_{n+1} = 4 \cdot a_n$. Wir vermuten schnell, daß diese Folge unendlich groß wird. Doch wie kann man das beweisen ?

Hierzu haben sich die Mathematiker einen kleinen Trick überlegt. Sie sagen: Wenn wir beweisen können, daß jede noch so große Zahl ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird, dann ist die Folge nach oben u beschränkt.

Dies schauen wir uns zuerst in Beispielen an.

(1) Ab welcher Nummer n ist $a_n > 10.000$?

$$a_n = 5 \cdot 4^n > 10\,000$$

Daraus folgt $4^n > 2000$

Logarithmieren $\lg 4^n > \lg 2000$

3. Logarithmengesetz: $n \cdot \lg 4 > \lg 2000$

$$n > \frac{\lg 2000}{\lg 4} \approx 5{,}48...$$

Also gilt für $n \geq 6$: $a_n > 10\,000$.

Zur Kontrolle berechnen wir

$$a_5 = 5 \cdot 4^5 = 5120 < 10\,000 \;;\; a_6 = 5 \cdot 4^6 = a_5 \cdot 4 = 20480 > 10\,000 \quad !$$

(2) Ab welcher Nummer n ist $a_n > 10^{30}$?

$$a_n = 5 \cdot 4^n > 10^{30}$$

Daraus folgt $4^n > \frac{1}{5} \cdot 10^{30} = 0{,}2 \cdot 10^{30} = 2 \cdot 10^{29}$

Logarithmieren $\lg 4^n > \lg\left(2 \cdot 10^{29}\right) = \lg 2 + \lg 10^{29} = \lg 2 + 29$

3. Logarithmengesetz: $n \cdot \lg 4 > 29 + \lg 2$

$$n > \frac{29 + \lg 2}{\lg 4} \approx 48{,}6....$$

Also gilt für $n \geq 49$: $a_n > 10^{30}$.

Zur Kontrolle berechnen wir

$$a_{48} = 5 \cdot 10^{48} \approx 3{,}96 \cdot 10^{29} < 10^{30} \;;\; a_{49} = 5 \cdot 4^{49} = 6{,}3 \cdot 10^{30} > 10^{30} \quad !$$

(3) Es sei nun M eine beliebig große positive Zahl.
Ab welcher Nummer n ist $a_n > M$?

$$a_n = 5 \cdot 4^n > M$$

$$4^n > \tfrac{1}{5} \cdot M = \tfrac{M}{5}$$

Logarithmieren $\lg 4^n > \lg \frac{M}{5} = \lg M - \lg 5$

3. Logarithmengesetz: $n \cdot \lg 4 > \lg M - \lg 5$

$$n > \frac{\lg M - \lg 5}{\lg 4}.$$

Da für jedes solche M diese Ungleichung lösbar wird, überschreitet die Folge jede beliebig große Schranke M, d.h. sie wächst unbegrenzt !

AUFGABE 6

(a) Ist z = 17.294.403 ein Glied der Folge $a_n = 3 \cdot 7^n$?

(b) Ist $z = \frac{1}{531\,441}$ ein Glied der Folge $a_n = 3^{-n}$

(c) Ist z = 358 271 148 ein Glied der Folge $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$?

AUFGABE 7

(a) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 758 \cdot 4^n$ und $b_n = 5 \cdot 6^n$.

(b) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2{,}5^n$ und $b_n = 890 \cdot 2^n$.

(c) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 4^{12-n}$ und $b_n = 2 \cdot 3^{-n}$.

AUFGABE 8

(a) Die Folge $a_n = 3^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt.
Wird die Folge kleiner als 10^{-12} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

(b) Ab welchem n ist $a_n = 2^{5-3n}$ kleiner als 10^{-20} ?

(c) Ab welchem n ist $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ kleiner als 10^{-10} ?

(d) Ab welchem n ist $a_n = \frac{240}{4^n}$ kleiner als 10^{-12} ?

AUFGABE 9

(a) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 8^n$ größer als 10 Milliarden ?

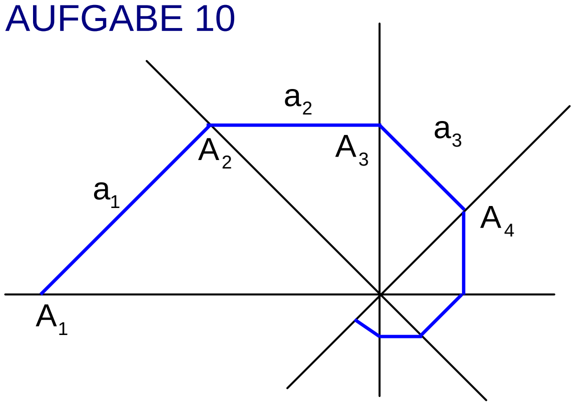
(b) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 34 \cdot 2^n$ größer als 10^{15} ?

(c) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

(d) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \frac{5^{n+1}}{2^{n-2}}$.

4.5 Geometrische Folgen aus der Geometrie

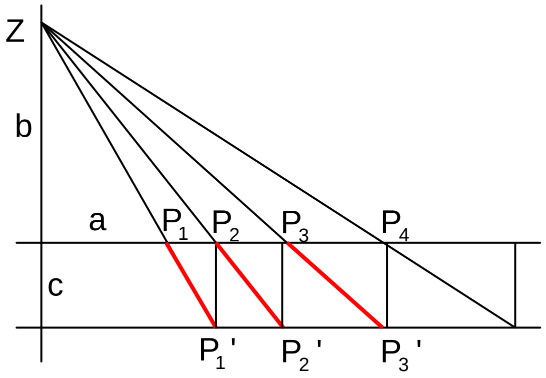
AUFGABE 10



Nebenstehende Streckenschnecke entsteht, indem man von 4 Geraden ausgeht, die miteinander jeweils 45^o bilden.
Dann beginnt man mit einem Punkt A_1, der vom Mittelpunkt M die Entfernung (z.B. z = 8) hat. Von A_1 aus fällt man das Lot im Uhrzeigersinn auf die nächste Gerade bis A_2. Von dort aus fällt man wieder das Lot bis A_3 usw. So entsteht eine Folge von Strecken a_1 , a_2 , ...

Berechne a_1 bis a_5 sowie a_n . Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.
Berechne a_{20}. Was läßt sich vermuten ?

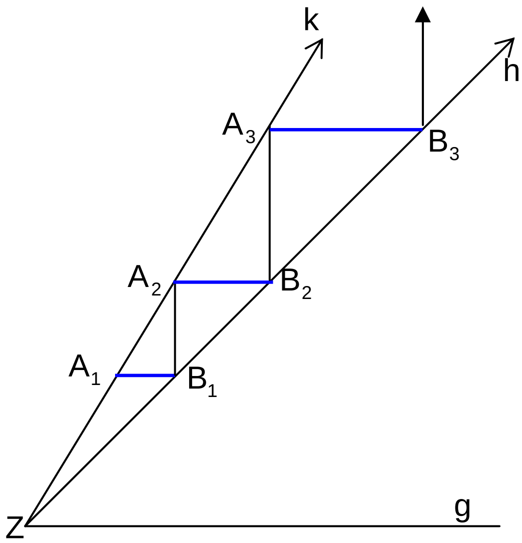
AUFGABE 11



Nebenstehende Abbildung erzeugt eine geometrische Punktfolge P_1, P_2 , P_3 , ...
In ihr entsteht so die Streckenfolge P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_3 , usw.
Berechne die zugehörigen Streckenlängen und stelle einen Funktionsterm für das allgemeine Glied der Folge auf.

Wähle z. B: a = 3 cm, b = 6 cm und c = 1 cm.

AUFGABE 12

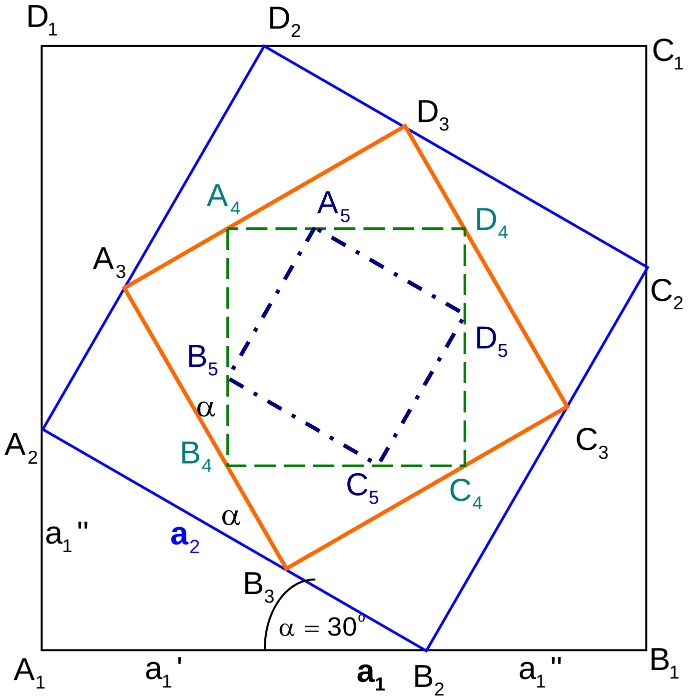


Die Gerade g bildet mit h einen 45^o Winkel, g und k dagegen 60^o .
Wir wählen einen beliebigen Punkt A_1 auf k und konstruieren der Reihe nach die Punkte B_1 , A_2 , B_2 , A_3 , B_3 usw.

Es sei $a_1 = \overline{A_1B_1}$, $a_n = \overline{A_nB_n}$.
Stelle eine Berechnungsformel für a_n auf, wenn a beliebige groß sein kann.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

AUFGABE 13

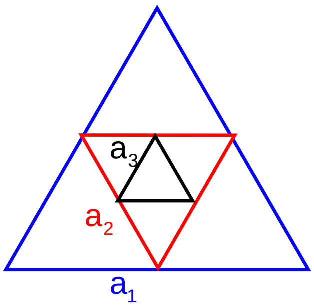


In ein Quadrat werden fortgesetzt weitere Quadrate eingezeichnet, deren Ecken auf den Seiten des vorgehenden Quadrats liegen, und deren Seiten mit den vorgehenden Seiten jeweils einen Winkel von 30^O bilden. So entsteht eine Folge von Quadraten mit den Seitenlängen a_1 , a_2 , ... , a_n , ...

Zeige, daß die Folge der Seiten und der Quadratinhalte geometrisch ist.
Berechne zu $a_1 = 8$ cm a_2 bis a_5 .

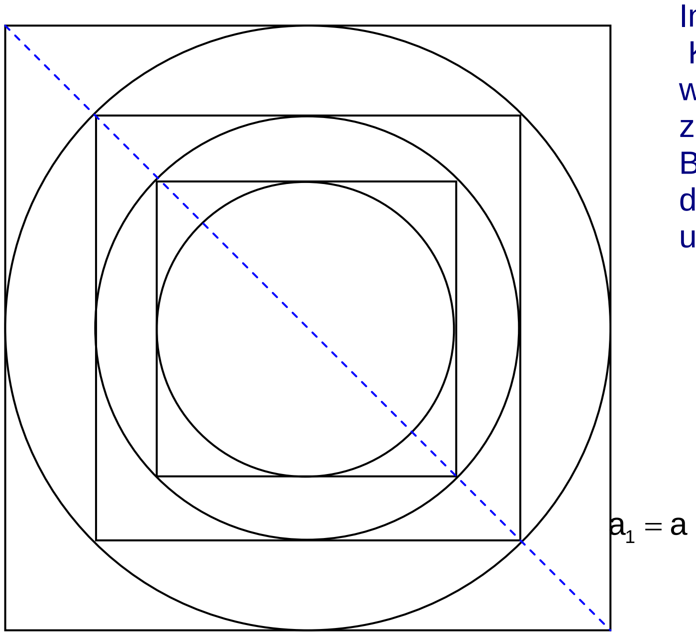
Es sei $A_1B_1 = a_1$ und $A_1B_2 = a_1'$

AUFGABE 14



In ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge $a_1 = a$ wird auf die dargestellte Art eine Folge von gleichseitigen Dreiecken einbeschrieben. Berechne die Folge der Dreiecksseiten a_1 , a_2 , ... a_n , .. und der Flächeninhalte F_1 , F_2 , ... , F_n .

AUFGABE 15



In ein Quadrat der Seite a wird ein Kreis einbeschrieben. In diesen wiederum ein Quadrat, das parallel zum äußeren Quadrat liegt usw. Berechne die Folge der Flächeninhalte der Quadrate Q_1 , Q_2 , ... , Q_n , ... und der Kreise: F_1 , F_2 , ... , F_n , ...

4.6 Arithmetische Wachstumsfolgen

Beispiel 1

Eine Maschine produziert pro Minute 25 Klinkersteine. Zur Zeit t = 0 sind n(0) = 450 Klinker im Lager. Wie viele sind dort nach 1 Minute, 2 Minuten, 30 Minuten, 2 Stunden und n Minuten ?

Lösung:

Es sei n(t) die Menge der Klinker zur Zeit t , $t \in \mathbf{N}_0$.
Die Zunahme der Klinker pro Minute ist d = 25. Also folgt:

$$n(0) = 450$$
$$n(1) = n(0) + d = 475$$
$$n(2) = n(0) + 2d = 500$$
$$n(30) = n(0) + 30d = 450 + 750 = 1200$$
$$n(120) = n(0) + 120 \cdot d = 450 + 3000 = 3450$$

$$n(t) = n(0) + t \cdot d = 450 + t \cdot 25$$

Hier liegt eine arithmetische Folge vor, die aber bereits bei der Nummer 0 beginnt. Wenn die Variable die Zeit t ist, schreibt man meistens statt a_n $a(t)$ oder weil man n oft für Anzahl nimmt: $n(t)$.

Beispiel 2:

$n(t)$ sei die Anzahl von Objekten irgendeiner Art. Ihre Anzahl genüge der Gleichung

$$n(t) = 2450 - 28 \cdot t$$

Beschreibe die Situation.

Lösung:

$n(0) = 2450$ ist die vorhandene Menge zur Zeit t = 0 (Startmenge).

Pro Zeiteinheit (das können je nach Angabe Minuten, Stunden usw. sein) nimmt die Anzahl um 28 ab.
So hat man dann beispielsweise nach 10 Zeiteinheiten:
$n(10) = 2450 - 280 = 2170$ Objekte.

Diese Gleichung beschreibt eine gleichförmige Abnahme pro Zeiteinheit. Damit geht die Menge auch irgendwann mal zu Ende. Dazu berechnet man die Nullstelle: $n(t) = 0$ d.h. $2450 - 28 \cdot t = 0$

$$28 \cdot t = 2450 \Rightarrow t_N = \frac{2450}{28} = 87{,}5$$

d.h. 87 Zeiteinheiten lang nimmt die Menge gleichmäßig ab, dann eine halbe Zeiteinheit später ist nichts mehr vorhanden. Also gilt

$$n(88) = n(89) = ... = 0.$$

4.7 Geometrische Wachstumsfolgen

Musterbeispiel 1:

Ein Bakterienstamm vermehrt sich so, daß pro Minute 15% neue Bakterien entstehen, Die Startmenge sei z(0) = 40

Es folgt: $z(1) = z(0) + \underbrace{0{,}15 \cdot z(0)}_{15\%\ \text{Zunahme}} = z(0) \cdot [1 + 0{,}15] = z(0) \cdot 1{,}15 = 46$

$$z(2) = z(1) + \underbrace{0{,}15 \cdot z(1)}_{15\%\ \text{Zunahme}} = z(1) \cdot [1 + 0{,}15] = z(1) \cdot 1{,}15 = 52{,}9 \approx 53$$

Achtung: 52,9 Bakterien sind eigentlich sinnlos. Aber die Wachstumsrate von 15% muß als statistischer Mittelwert angesehen werden. Man runde also.

$$z(3) = z(2) + \underbrace{0{,}15 \cdot z(2)}_{15\%\ \text{Zunahme}} = z(2) \cdot [1 + 0{,}15] = z(2) \cdot 1{,}15 = 60{,}835 \approx 61$$

usw.

Man erkennt, daß eine geometrische Folge entstanden ist, denn der jeweils nächste Wert entsteht aus dem vorangehenden durch Multiplikation mit 1,15, dies entspricht einem Wachstum von 15 %.

$$z(0) \xrightarrow[\cdot q]{} z(1) \xrightarrow[\cdot q]{} z(2) \xrightarrow[\cdot q]{} z(3) \xrightarrow[\cdot q]{} z(4) \xrightarrow[\cdot q]{} \ldots$$

$$40 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} 46 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} 52{,}9 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} 60{,}835 \xrightarrow[\cdot 1{,}15]{} \ldots$$

Damit kann man eine Formel für die geometrische Folge aufstellen:

$$z(t) = z(0) \cdot q^t$$

also: $z(2) = z(0) \cdot q^2$, $z(3) = z(0) \cdot q^3$ usw.

> **Merke:** Prozentuales Wachstum führt zu einer geometrischen Folge, also zu einer Exponentialfolge.
> Das Anfangsglied trägt hierbei meist die Nummer 0. und die Variable ist in der Regel die Zeit t.
>
> $$z(t) = z(0) \cdot q^t$$

In unserem Beispiel war q = 1,15 und q ist entstanden aus der Addition von altem Wert plus Zuwachs. Bei einer Wachstumsrate von $p = 15\% = 0{,}15$ gilt:

$$z(1) = z(0) + z(0) \cdot 0{,}15 = z(0) \cdot \underbrace{[1 + 0{,}15]}_{=q} = z(0) \cdot q$$

Allgemein: $z(1) = z(0) + z(0) \cdot p = z(0) \cdot \underbrace{[1 + p]}_{=q} = z(0) \cdot q$ also ist q = 1 + p !

Musterbeispiel 2:

Von zwei Bakterienstämmen sind ihre Wachstumsgesetze bekannt.
$n(t)$ sei die Anzahl der Bakterien des Stammes 1 zur Zeit t (in Minuten)
$m(t)$ sei die Anzahl der Bakterien des Stammes 2 zur Zeit t (in Minuten).

Es gelte: $n(t) = 40 \cdot 1{,}05^t$ und $m(t) = 1{,}02^{t+288}$.

a) (1) Beschreibe das Wachstumsverhalten des ersten Bakterienstammes.
(2) Wie viele Bakterien sind nach 30 Minuten vorhanden ?
(3) Nach welcher Zeit sind 100 Bakterien vorhanden ?
(4) In welcher Zeitspanne Δt hat sich die Startmenge verdoppelt ?
(5) Zeige daß sich in dieser Zeitspanne Δt jede Menge n(t) verdoppelt.

b) (1) Beschreibe das Wachstumsverhalten des zweiten Bakterienstammes.
(2) Nach welcher Zeit sind 500 Bakterien vorhanden ?
(3) In welcher Zeitspanne Δt hat sich die Startmenge verdreifacht ?
(4) Zeige daß sich in dieser Zeitspanne Δt jede Menge m(t) verdreifacht.

c) Zu welchem Zeitpunkt t sind von beiden Stämmen gleich viele Individuen vorhanden ?

Lösung:

a) Bakterienstamm 1:

(1) Für den Stamm 1 gilt $n(t) = 40 \cdot 1{,}05^t$.
Startmenge: $n(0) = 40 \cdot 1{,}05^0 = 40$ (Bakterien) zum Zeitpunkt t = 0.
Wachstumsfaktor q = 1,05 = 1 + p
Prozentsatz: p = q – 1 = 0,05 = 5 %.
Das heißt, daß die Bakterienzahl in jeder Minute um durchschnittlich 5 % zunimmt.

(2) Nach 30 Minuten: $n(30) = 40 \cdot 1{,}05^{30} \approx 178$ Bakterien.

(3) Wann sind 100 Bakterien vorhanden ? Wann gilt also n(t) = 100, d.h.

$$40 \cdot 1{,}05^t = 100$$

$$1{,}05^t = \frac{100}{40} = 2{,}5$$

Gleichung logarithmieren (mit dem Zehnerlogarithmus $\lg = \log_{10}$):

$$\lg 1{,}05^t = \lg 2{,}5$$

3. Logarithmengesetz anwenden: $\log_b a^n = n \cdot \log_b a$ liefert also

$$t \cdot \lg 1{,}05 = \lg 2{,}5$$

$$t = \frac{\lg 2{,}5}{\lg 1{,}05} \approx 18{,}8 \approx 19 \quad \text{(Minuten).}$$

(Achtung der Zehnerlogarithmus hat auf den Taschenrechnern die Taste log; Man kann aber auch den natürlichen Logarithmus verwenden: ln x . Das Endergebnis ist dasselbe.)

(4) Verdopplung der Startmenge: d.h. Wann ist n(t) = 80 ?

$$40 \cdot 1{,}05^t = 80$$
$$1{,}05^t = 2$$

Durch Logarithmieren folgt: $t \cdot \lg 1{,}05 = \lg 2 \;\Rightarrow\; t = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \approx 14{,}2 \approx 14$

Ergebnis: Nach etwa 14 (Minuten) hat sich die Menge verdoppelt.

Bemerkung: Hier wird die Aufgabe etwas kritisch. Für unsere Folge haben wir für t nur die ganzen Zahlen zu verwenden. Man sieht aber, daß für solche Aufgaben auch Zwischenwerte für t nötig werden., also sollte man hier besser die Reelle Funktion für $t \in R$ *verwenden ! Am Verhalten ändert sich dabei nichts.*

(5) Nun soll man zeigen, daß sich jede Menge n(t) nach Ablauf der Zeitspanne $\Delta t = 14{,}2$ (Min) verdoppelt hat. Dies geht so:

Menge zum Zeitpunkt t: $n(t) = 40 \cdot 1{,}05^t$

Menge zur Zeit $t + \Delta t = t + 14{,}2$: $n(t+14{,}2) = 40 \cdot 1{,}05^{t+14{,}2}$

Durch algebraische Umformung folgt:

$$n(t+14{,}2) = 40 \cdot 1{,}05^{t+14{,}2} = 40 \cdot 1{,}05^t \cdot \underbrace{1{,}05^{14{,}2}}_{\approx 2} = 80 \cdot 1{,}05^t = 2 \cdot n(t)$$

Also ist diese sogenannte Verdopplungszeit zu jedem Zeitpunkt gültig !!!

(b) Zweiter Bakterienstamm

(1) Es gilt $m(t) = 1{,}02^{t+288}$. Daraus folgt die

Startmenge: $m(0) = 1{,}02^{288} \approx 300$

Daher kann man dieses Wachstumsgesetz auch umschreiben in

$$m(t) = 1{,}02^{t+288} = 1{,}02^{288} \cdot 1{,}02^t = 300 \cdot 1{,}02^t$$

Der Wachstumsfaktor ist q = 1,02 das bedeutet ein Wachstum von p = q – 1 = 0,02 = 2 % pro Minute.

(2) Nach welcher Zeit sind 200 Bakterien vorhanden ? d.h. m(t) = 500:

$$m(t) = 300 \cdot 1{,}02^t = 500$$
$$1{,}02^t = \tfrac{5}{3}$$

Logarithmieren: $\lg 1{,}02^t = \lg \tfrac{5}{3}$

$$t \cdot \lg 1{,}02 = \lg 5 - \lg 3$$
$$t = \frac{\lg 5 - \lg 3}{\lg 1{,}02} \approx 25{,}8 \quad \text{(Min.)}$$

(3) In welcher Zeitspanne Δt hat sich die Startmenge verdreifacht ?

Bedingung: $m(t) = 3 \cdot m(0) = 900$

$$300 \cdot 1{,}02^{t} = 900$$

$$1{,}02^{t} = 3$$

Logarithmieren: $\lg 1{,}02^{t} = \lg 3$

$$t \cdot \lg 1{,}02 = \lg 3$$

$$t = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}02} \approx 55{,}5 \quad \text{(Min.)}$$

Ergebnis: In der Zeitspanne $\Delta t = 55{,}5$ hat sich die Startmenge verdreifacht.

(4) Zeige daß sich in dieser Zeitspanne Δt jede Menge m(t) verdreifacht.

Anzahl zur Zeit t: $m(t) = 300 \cdot 1{,}02^{t}$

Anzahl zur Zeit $t + \Delta t = t + 55{,}5$: $m(t + 55{,}5) = 300 \cdot 1{,}02^{t+55{,}5}$

Durch algebraische Umformung folgt:

$$m(t+55{,}5) = 300 \cdot 1{,}02^{t+55{,}5} = 300 \cdot 1{,}02^{t} \cdot \underbrace{1{,}02^{55{,}5}}_{\approx 3} = 900 \cdot 1{,}02^{t} = 3 \cdot m(t)$$

Also ist diese sogenannte Verdreifachungszeit zu jedem Zeitpunkt gültig !!!

c) Zu welchem Zeitpunkt t sind von beiden Stämmen gleich viele Individuen vorhanden ?

Stamm 1: $n(t) = 40 \cdot 1{,}05^{t}$

Stamm 2: $m(t) = 300 \cdot 1{,}02^{t}$

Der 1. Stamm hat weniger Exemplare zur Zeit t = 0, aber das stärkere Wachstum, also holt er gegenüber Stamm 2 auf.

Bedingung: $n(t) = m(t)$

$$40 \cdot 1{,}05^{t} = 300 \cdot 1{,}02^{t}$$

$$\frac{1{,}05^{t}}{1{,}02^{t}} = \frac{300}{40} \quad \text{d.h.} \quad \left(\frac{1{,}05}{1{,}02}\right)^{t} = 7{,}5$$

Logarithmieren: $t \cdot \lg\left(\frac{1{,}05}{1{,}02}\right) = \lg 7{,}5 \Leftrightarrow t \cdot (\lg 1{,}05 - \lg 1{,}02) = \lg 7{,}5$

$$t = \frac{\lg 7{,}5}{\lg 1{,}05 - \lg 1{,}02} \approx 69{,}5 \quad \text{(Min)}$$

Ergebnis: Nach ***etwa*** 70 Minuten haben beide Stämme gleich viele Individuen.

Nämlich: $n(70) = 40 \cdot 1{,}05^{70} = 1217$ und $m(70) = 300 \cdot 1{,}02^{70} = 1200$.

Allgemeine Untersuchungen:

Eine Exponentialfunktion der Art $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. eine Exponentialfolge $f(n) = a \cdot b^n$ stellt für $b > 1$ eine Wachstumsfunktion dar.

Die Startmenge ist $f(0) = a \cdot b^0 = a$.
Daher schreibt man auch oft $a = f(0)$ oder

Die Variable x oder n stellt beim Wachstum die Zeit t dar, daher schreibt man auch oft $f(t) = a \cdot b^t$ oder $n(t) = a \cdot b^t$ bzw. $n(t) = n(0) \cdot b^t$ oder auch $n_t = n_0 \cdot b^t$.

Zunahme des Funktionswertes in den Zeitspannen $\Delta t = 1$:

$$f(0) = a \cdot b^0 = a$$
$$f(1) = a \cdot b^1 = f(0) \cdot b$$
$$f(2) = a \cdot b^2 = f(1) \cdot b$$
$$f(3) = a \cdot b^3 = f(2) \cdot b$$

Man erkennt das typische Merkmal einer geometrischen Folge:
Der Quotient aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge ist konstant: $q = b$.

Die nächste Überlegung:

Wir lassen die Funktion f von $t = 0$ aus in der Zeitspanne Δt „wachsen". Dies führt zu dieser Menge:

$$f(0) = a \cdot b^0 = a$$
$$f(0 + \Delta t) = a \cdot b^{\Delta t}$$

Zunahme-Faktor: $\dfrac{f(0+\Delta t)}{f(0)} = \dfrac{a \cdot b^{\Delta t}}{a} = b^{\Delta t}$.

Nun gehen wir von irgend einem Zeitpunkt t_1 aus:

$$f(t_1) = a \cdot b^{t_1}$$
$$f(t_1 + \Delta t) = a \cdot b^{t_1 + \Delta t}$$

Zunahme-Faktor: $\dfrac{f(t_1+\Delta t)}{f(t_1)} = \dfrac{a \cdot b^{t_1+\Delta t}}{a \cdot b^{t_1}} = b^{\Delta t}$.

Wir beobachten, daß die Funktionswerte von f in der Zeitspanne Δt um den Faktor $b^{\Delta t}$ zunehmen. Und dieser Faktor hängt nicht vom Zeitpunkt t_1 ab, ´von dem aus wir die Beobachtung durchführen. Wenn sich also ein bestimme Menge Bakterien in einer bestimmten Zeitspanne Δt verdoppelt. Dann gilt dies jetzt genauso wie 1 Stunde später oder 4 Tage später.

Der Zunahmefaktor ist von Zeitpunkt unabhängig !

Als nächstes wollen wir klären, daß dieses exponentielle Wachstum ein prozentuales Wachstum ist:

Wir untersuchen wachsende Folgen. Dazu muß der Faktor b, also der Quotient aufeinanderfolgender Glieder größer als 1 sein. Wir zerlegen b so:

$$b = 1 + p$$

Dann folgt: $f(0) = a$

$f(1) = a \cdot b = a \cdot (1+p) = a + a \cdot p = f(0) + f(0) \cdot p$

$f(2) = f(1) \cdot b = f(1) \cdot (1+p) = f(1) + f(1) \cdot p$

$f(3) = f(2) \cdot b = f(2) \cdot (1+p) = f(2) + f(2) \cdot p$

usw.

Man sieht, daß sich der Wert $f(1)$ aus $f(0)$ und einer Zunahme $f(0) \cdot p$ zusammensetzt. Wenn beispielsweise b = 1,5 ist, dann ist p = 0,5 und die Zunahme ist $f(0) \cdot 0{,}5$, das entspricht einer Zunahme um 50 Prozent zwischen t= 0 und t=1. Dasselbe gilt dann für f(2): $f(2) = f(1) + f(1) \cdot p$, also haben wir auch hier eine Zunahme um 50 %.

Die Folge $n(t) = 20 \cdot 3^t$ hat b = 3 und folglich 1 + p = 3 also p = 2.
Daher ist $n(t_1 + 1) = n(t_1) \cdot 3 = n(t_1) \cdot (1+2) = n(t_1) + \underbrace{n(t_1) \cdot 2}_{\text{Zunahme}}$

Die Zunahme beträgt also 200 %.

Eine Exponentialfunktion der Art $f(t) = a \cdot b^t$ bzw. eine Exponentialfolge $f(n) = a \cdot b^n$ stellt für b < 1 eine Abnahmefunktion dar.

Beispiel: $f(t) = 200 \cdot 0{,}9^t$

$f(0) = 200$

$f(1) = 200 \cdot 0{,}9 = 200 \cdot (1 - 0{,}1) = 200 - 200 \cdot 0{,}1$

$f(2) = f(1) \cdot 0{,}9 = f(1) \cdot (1 - 0{,}1) = f(1) - f(1) \cdot 0{,}1$

$f(3) = f(2) \cdot 0{,}9 = f(2) \cdot (1 - 0{,}1) = f(2) - f(2) \cdot 0{,}1$

In jeder Zeiteinheit nimmt hier also der Funktionswert um den Faktor 0,9 ab und wie man sieht entspricht dies einer Abnahme um 10 %.

Wichtige Aufgabe:

In welcher Zeitspanne gehen diese Funktionswerte auf die Hälfte zurück ?

Wir gehen von einem beliebigen Zeitpunkt t_1 aus und warten dann die Zeitspanne Δt ab. Die Bedingung für die Halbierung lautet dann:

$$f(t_1 + \Delta t) = \tfrac{1}{2} \cdot f(t_1)$$

d.h.

$$200 \cdot 0{,}9^{t+\Delta t} = \tfrac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}9^{t}$$

$$\frac{0{,}9^{t+\Delta t}}{0{,}9^{t}} = \frac{1}{2}$$

$$0{,}9^{\Delta t} = \frac{1}{2}$$

Logarithmieren:

$$\lg 0{,}9^{\Delta t} = \lg \frac{1}{2}$$

$$\lg 0{,}9^{\Delta t} = \lg 2^{-1}$$

$$\Delta t \cdot \lg 0{,}9 = -\lg 2$$

$$\Delta t = \frac{-\lg 2}{\lg 0{,}9} \approx 6{,}58$$

Das Ergebnis lautet also: In der Zeitspanne 6,58 (Zeiteinheiten) halbiert sich der Funktionswert $f(t_1)$. Man nennt diese Zeit die Halbwertszeit.

Bemerkungen:

(1) Hier sieht man wieder, daß man für solcher Rechnungen bei reellen Funktionen bleiben muß, weil hier keine ganzzahligen t-Werte mehr auftreten. Eine Folge ist hier fehl am Platze.

(2) Ein ganz wichtiges Nebenergebnis ist die Tatsache, daß diese Zeitspanne Δt (also die Halbwertszeit) nicht vom Zeitpunkt t_1 abhängt, also dauerhaft für den gesamte Abnahme- oder Zerfallsprozeß gilt.

Daher kann man die Halbwertszeit auch mit einem einfacheren Ansatz berechnen, indem man von t = 0 ausgeht:

Berechnung einer Halbwertszeit für $n(t) = a \cdot b^t$ **mit b < 1:**

Bedingung: $n(0 + \Delta t) = \tfrac{1}{2} \cdot n(0)$

d.h. $a \cdot b^{\Delta t} = \tfrac{1}{2} a \iff b^{\Delta t} = \tfrac{1}{2}$

Logarithmieren: $\lg b^{\Delta t} = \lg 2^{-1} \iff \Delta t \cdot \lg b = -\lg 2$

Ergebnis: $\Delta t = \dfrac{-\lg 2}{\lg b}$

Lösungen der Aufgaben

(1) Untersuche, ob eine geometrische Folge vorliegt. Wenn ja, erstelle den Funktionsterm für a_n .

(a) $a_3 = 15$; $a_5 = 375$; $a_8 = 46875$

$$\frac{a_5}{a_3} = q^2 = \frac{375}{15} = 25 \Rightarrow q = \pm 5$$

$$\frac{a_8}{a_5} = q^3 = \frac{46875}{375} = 125 \Rightarrow q = \sqrt[3]{125} = 5$$

Für q = 5 liegt somit eine geometrische Folge vor.

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{5} \cdot 5^{n-1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5^n}{5} = \frac{3}{25} \cdot 5^n$$

(b) $a_3 = 18$; $a_6 = \frac{9}{4}$; $a_8 = \frac{9}{32}$

$$\frac{a^6}{a^3} = q^3 = \frac{\frac{9}{4}}{18} = \frac{9}{4 \cdot 18}(!) = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{a_8}{a_6} = q^2 = \frac{9}{32} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \pm\sqrt{\tfrac{1}{8}}$$

Da sich für q verschiedene Werte ergeben, sind die Quotienten aufeinander folgender Glieder nicht konstant. Also liegt keine geometrische Folge vor.

(c) $a_2 = 36$; $a_4 = 81$; $a_7 = \frac{2187}{8}$

$$\frac{a_4}{a_2} = q^2 = \frac{81}{36} = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_4} = q^3 = \frac{2187}{8 \cdot 81} = \frac{27}{8} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Für $q = \frac{3}{2}$ liegt eine geometrische Folge vor mit

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{36}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24 \quad \text{und} \quad a_n = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{3} = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

(d) $a_1 = -27$; $a_3 = -3$; $a_4 = 1$

$$\frac{a_3}{a_1} = q^2 = \frac{-3}{-27} = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{a_4}{a_3} = q = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Für q = $-\frac{1}{3}$ liegt eine geometrische Folge vor mit

$$a_n = -27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -27\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot (-3) = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{81}{(-3)^n}$$

(2) Gegeben ist eine geometrische Folge durch 2 Glieder. Berechne die angegebenen Glieder der Folge sowie den Funktionsterm für a_n .

(a) $a_2 = \frac{4}{5}$; $a_3 = \frac{2}{25}$; $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{10}$, ergibt

$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8$ und $a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{125}$; sowie

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 80 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{80}{10^n} = 80 \cdot 10^{-n}$$

(b) $a_3 = 1$; $a_6 = \frac{1}{8}$; $q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

$$a_{10} = a_6 \cdot q^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8 \cdot 16} = \frac{1}{128}$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{8}{2^n} = 8 \cdot 2^{-n}$$

(c) $a_4 = 24$; $a_6 = \frac{32}{3}$; $q^2 = \frac{a_6}{a_4} = \frac{32}{3 \cdot 24} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \Rightarrow q_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$

$$a_8 = a_6 \cdot q^2 = \frac{32}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{128}{27} \quad \text{und} \quad a_{11} = a_8 \cdot q^3 = \frac{128}{27} \cdot \left(\pm\frac{8}{27}\right) = \pm\frac{1024}{729}$$

Hier gibt es zwei mögliche geometrische Folgen !

mit $a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{24}{\pm\frac{8}{27}} = \pm 81$ und

$$a_n = \pm 81 \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \pm 81\left(\pm\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)^{-1} = 81 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)^n = \frac{243}{2} \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)^n$$

(d) $a_3 = 144$; $a_7 = \frac{729}{16}$; $q^4 = \frac{a_7}{a_3} = \frac{729}{16 \cdot 144} = \frac{3^6}{2^4 \cdot 9 \cdot 16} = \frac{3^4}{2^4 \cdot 16} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2 \cdot 2} = \pm\frac{3}{4}$

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{144}{\pm\frac{3}{4}} = \pm\frac{4 \cdot 144}{3} = \pm 4 \cdot 48 = \pm 192$$

$$a_5 = a_3 \cdot q^2 = 144 \cdot \frac{9}{16} = 81$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{144}{\frac{9}{16}} = \frac{144 \cdot 16}{9} = 16 \cdot 16 = 256$$

$$a_n = 256 \cdot \left(\pm\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \text{oder gar} \quad \ldots = 256 \cdot \left(\pm\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\pm\frac{4}{3}\right) = \pm\frac{1024}{3} \cdot \left(\pm\frac{3}{8}\right)^n$$

(e) $a_3 = 4$; $a_6 = 8\sqrt{2}$; $q^3 = \frac{a_6}{a_3} = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^3 \Rightarrow q = \sqrt{2}$

$a_4 = a_3 \cdot q = 4\sqrt{2}$; $a_5 = a_4 \cdot q = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 = 8$

$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{2} = 2$ und $a_n = 2 \cdot \sqrt{2}^{n-1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^n = \sqrt{2}^{n+1}$

(f) $a_5 = 3\sqrt{3}$; $a_8 = 27$; $q^3 = \frac{a_8}{a_5} = \frac{27}{3\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} = \sqrt{3}^3 \Rightarrow q = \sqrt{3}$

Oder mittels Potenzrechnung:

$$q^3 = \frac{a_8}{a_5} = \frac{27}{3\sqrt{3}} = 3^{3-1-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}^3 \Rightarrow q = \sqrt{3}$$

$a_2 = \frac{a_5}{q^3} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1$ und $a_6 = a_5 \cdot q = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 = 9$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}^n}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}^n.$$

Oder gar so: $a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}^n}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}^{n-2}$.

(3) Berechne die ersten 5 Glieder dieser Folgen:

(a) $a_n = 2^{3n} = \left(2^3\right)^n = 8^n \Rightarrow q = 8$

$a_1 = 2^3 = 8;\ a_2 = 2^6 = 64;\ a_3 = 2^9 = 512;\ a_4 = 2^{12} = 4096;\ a_5 = 2^{15} = 32768$

(b) $a_n = 3\cdot 2^{n+1} = 3\cdot 2^n \cdot 2 = 6\cdot 2^n \Rightarrow q = 2$

$a_1 = 12;\ a_2 = 24;\ a_3 = 48;\ a_4 = 96;\ a_5 = 192$

(c) $a_n = 3^{-2n+2} = 3^2\cdot 3^{-2n} = 9\cdot\left(3^{-2}\right)^n = 9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{9}$

$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{9};\ a_3 = \frac{1}{81};\ a_4 = \frac{1}{729};\ a_5 = \frac{1}{6561}$

(d) $a_n = 3\cdot 2^{4-n} = 3\cdot 2^4\cdot 2^{-n} = 3\cdot 16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$a_1 = 24;\ a_2 = 12;\ a_3 = 6;\ a_4 = 3;\ a_5 = \frac{3}{2}$

(e) $a_n = 10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = 10\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow q = \frac{2}{3}$

$a_1 = 10;\ a_2 = \frac{20}{3};\ a_3 = \frac{40}{9};\ a_4 = \frac{80}{27};\ a_5 = \frac{160}{81}$

(f) $a_n = \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n\cdot 2^{-1}} = \frac{6}{2^n} = 6\cdot 2^{-n} = 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$a_1 = 3;\ a_2 = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{3}{4};\ a_4 = \frac{3}{8};\ a_5 = \frac{3}{16}$

(g) $a_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-n} = \left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-n} = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n \Rightarrow q = \frac{2}{5}$

$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{2}{5};\ a_3 = \frac{4}{25};\ a_4 = \frac{8}{125};\ a_5 = \frac{16}{625}$

(h) $a_n = \sqrt{\frac{2}{3^n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}^n} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}^{-n} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$a_1 = \sqrt{2};\ a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}};\ a_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2};\ a_4 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}};\ a_5 = \frac{\sqrt{2}}{9}$

(i) $a_n = 48\cdot\frac{2^{n-2}}{3^{n+1}} = 48\cdot\frac{2^n\cdot 2^{-2}}{3^n\cdot 3} = \frac{48}{3\cdot 4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow q = \frac{2}{3}$

$a_1 = \frac{8}{3};\ a_2 = \frac{16}{9};\ a_3 = \frac{32}{27};\ a_4 = \frac{64}{81};\ a_5 = \frac{128}{243}$

(4) Schalte zwischen die beiden gegebenen Zahlen die passenden Zahlen, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_1 = 8\ ;\ a_5 = 64$

$$q^4 = \frac{a_5}{a_1} = \frac{64}{8} = 8 = 2^3 \Rightarrow q = \pm 2^{\frac{3}{4}} = \pm\sqrt[4]{8}$$

$$a_2 = \pm 8\cdot\sqrt[4]{8}\ ;\ a_3 = +8\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{8} = 8\cdot\sqrt{8} = 16\sqrt{2}\ ;$$

$$a_4 = 16\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8} = 16\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{3}{4}} = 16\cdot 2^{\frac{5}{4}} = 16\cdot 2^{1+\frac{1}{4}} = 16\cdot 2\cdot 2^{\frac{1}{4}} = 32\cdot\sqrt[4]{2}$$

(b) $a_1 = 5;\ a_4 = 6$

$$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{6}{5} \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{6}{5}} \quad \text{also} \quad a_2 = 5\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}\ ;\ a_3 = 5\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}^{\,2} = 5\cdot\sqrt[3]{\frac{36}{25}}$$

(5) Schalte zwischen diese Zahlen so wenig wie möglich neue, so daß eine geometrische Folge entsteht.

(a) $a_3 = \sqrt{2}\ ;\ b = 2\sqrt{2}\ ;\ c = 8$

Es ist $\frac{b}{a_3} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ und $\frac{c}{b} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}^3$

Also kann man $q = \sqrt{2}$ verwenden und erhält

$$\frac{b}{a_3} = q^2 \Rightarrow b = a_3\cdot q^2 = a_5 \quad \text{und} \quad \frac{c}{b} = \sqrt{2}^3 = q^3 \Rightarrow c = b\cdot q^3 = a_5\cdot q^3 = a^8\,.$$

$$a_3 = \sqrt{2} \xrightarrow{\cdot q^2 = \sqrt{2}^2 = 2} b = a_5 = 2\sqrt{2} \xrightarrow{\cdot q^3 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}} c = a_8 = 8$$

$$a_3 = \sqrt{2} \xrightarrow{\cdot q = \sqrt{2}} a_4 = 2 \xrightarrow{\cdot q = \sqrt{2}} a_5 \xrightarrow{} a_6 = 4 \xrightarrow{\cdot q = \sqrt{2}} a_7 = 4\sqrt{2} \xrightarrow{\cdot q = \sqrt{2}} c$$

(b) $b = 12;\ a_5 = \frac{4}{3}\ ;\ c = \frac{4}{81}$

Es ist $\frac{a_5}{b} = \frac{4}{3\cdot 12} = \frac{1}{9}$ und $\frac{c}{a_5} = \frac{4}{81}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{27}$

Man kann also $q = \frac{1}{3}$ verwenden und erhält

$$\frac{a_5}{b} = \frac{1}{9} = q^2 \Rightarrow b = \frac{a_5}{q^2} = a_3 \quad \text{und} \quad \frac{c}{a_5} = \frac{1}{27} = q^3 \Rightarrow c = a_5\cdot q^3 = a_8$$

Graphische Darstellung:

$$b = a_3 = 12 \xrightarrow{\cdot q^2 = \frac{1}{9}} a_5 = \frac{4}{3} \xrightarrow{\cdot q^3 = \frac{1}{27}} c = a_8 = \frac{4}{81}$$

$$b = a_3 \xrightarrow{\cdot q = \frac{1}{3}} a_4 = 4 \xrightarrow{} a_5 \xrightarrow{\cdot q = \frac{1}{3}} a_6 = \frac{4}{9} \xrightarrow{\cdot q = \frac{1}{3}} a_7 = \frac{4}{27} \xrightarrow{\cdot q = \frac{1}{3}} c$$

(c) $b = \frac{1}{2}$; $c = 4$; $a_7 = 128\sqrt{2}$

Es ist $\frac{c}{b} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$ und $\frac{a_7}{c} = \frac{128\sqrt{2}}{4} = 32\sqrt{2} = 2^5 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{11}{2}} = \sqrt{2}^{11}$

Man kann somit $q = \sqrt{2}$ verwenden und erhält

$\frac{a_7}{c} = q^{11} \Rightarrow c = \frac{a_7}{a_{11}} = a_{-4}$ Dies ist nicht möglich.

AUFGABE 6

(a) Ist z = 17.294.403 ein Glied der Folge $a_n = 3 \cdot 7^n$?

$a_n = 3 \cdot 7^n = 17\,294\,403 \Rightarrow 7^n = 5\,764\,801$

Logarithmieren: $\lg 7^n = \lg 5764801 \Rightarrow n \cdot \lg 7 = \lg 5764801$

$$n = \frac{\lg 5764801}{\lg 7} = 8$$

Ergebnis: $z = a_8$.

(b) Ist $z = \frac{1}{531\,441}$ ein Glied der Folge $a_n = 3^{-n}$

$3^{-n} = \frac{1}{531\,441} \Leftrightarrow 3^n = 531441$

Logarithmieren: $\lg 3^n = \lg 531441 \Leftrightarrow n \cdot \lg 3 = \lg 531441$

$$n = \frac{\lg 531441}{\lg 3} = 12$$

Ergebnis: $z = a_{12}$

(c) Ist z = 358 271 148 ein Glied der Folge $a_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$?

$\frac{1}{2} \cdot 4^n = 358\,271148 \Leftrightarrow 4^n = 716542296$

Logarithmieren: $\lg 4^n = \lg 716542296 \Leftrightarrow n \cdot \lg 4 = \lg 716542296$

$$n = \frac{\lg 716542296}{\lg 4} \approx 14{,}7$$

Weil n keine natürliche Zahl ist, ist z kein Glied der Folge.

AUFGABE 7

(a) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 758 \cdot 4^n$ und $b_n = 5 \cdot 6^n$.

$$5 \cdot 6^n > 758 \cdot 4^n$$
$$\frac{6^n}{4^n} > \frac{758}{5}$$
$$1{,}5^n > 151{,}6$$

$$n \cdot \lg 1{,}5 > \lg 151{,}6$$

$$n > \frac{\lg 151{,}6}{\lg 1{,}5} \approx 12{,}3$$

Ergebnis: Für $n \geq 13$ ist $b_n > a_n$.

(b) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n kleiner als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 2{,}5^n$ und $b_n = 890 \cdot 2^n$.

$$890 \cdot 2^n < 2{,}5^n$$
$$890 < \frac{2{,}5^n}{2^n}$$
$$1{,}25^n > 890$$

$$n \cdot \lg 1{,}25 > \lg 890$$

$$n > \frac{\lg 890}{\lg 1{,}25} \approx 30{,}4...$$

Ergebnis: Für $n \geq 31$ gilt $b_n < a_n$.

(c) Ab welcher Nummer sind die Glieder der Folge b_n größer als die der Folge a_n ?
Dabei ist gegeben: $a_n = 4^{12-n}$ und $b_n = 2 \cdot 3^{-n}$.

$$2 \cdot 3^{-n} > 4^{12-n} \quad \text{d.h.} \quad \frac{2}{3^n} > \frac{4^{12}}{4^n}$$
$$\frac{4^n}{3^n} > \frac{4^{12}}{2} = 2^{23}$$
$$n \cdot \lg\left(\tfrac{4}{3}\right) > 23 \cdot \lg 2$$
$$n > \frac{23 \cdot \lg 2}{\lg 4 - \lg 3} \approx 55{,}4...$$

Ergebnis: Für $n \geq 56$ ist $b_n > a_n$.

AUFGABE 8

(a) Die Folge $a_n = 3^{-n}$ besteht aus lauter positiven Gliedern und fällt.
Wird die Folge kleiner als 10^{-12} ? Und wenn ja, ab welcher Nummer ?

$$3^{-n} < 10^{-12}$$
$$-n \cdot \lg 3 < \lg 10^{-12} = -12 \quad \Big| : [-\lg 3]$$
$$n > \frac{12}{\lg 3} \approx 25{,}1$$

Ergebnis: Für $n \geq 26$ ist $3^{-n} < 10^{-12}$.

(b) Ab welchem n ist $a_n = 2^{5-3n}$ kleiner als 10^{-20} ?

$$2^{5-3n} < 10^{-20}$$
$$(5-3n) \cdot \lg 2 < -20$$
$$5 \cdot \lg 2 - 3n \cdot \lg 2 < -20$$
$$5 \cdot \lg 2 + 20 < 3n \cdot \lg 2$$
$$3n \cdot \lg 2 > 5 \cdot \lg 2 + 20$$
$$n > \frac{\lg 2^5 + 20}{3 \cdot \lg 2} = \frac{\lg 32 + 20}{\lg 8} \approx 23{,}8$$

Ergebnis: Für $n \geq 24$ ist $2^{5-3n} < 10^{-20}$.

(c) Ab welchem n ist $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$ kleiner als 10^{-10} ?

$$\left(\tfrac{4}{5}\right)^n < 10^{-10}$$
$$n \cdot \lg 0{,}8 < -10 \quad \Big| : \lg 0{,}8 < 0!!!$$
$$n > \frac{-10}{\lg 0{,}8} \approx 103{,}1...$$

Ergebnis: Für $n \geq 104$ ist $\left(\frac{4}{5}\right)^n < 10^{-10}$.

(d) Ab welchem n ist $a_n = \dfrac{240}{4^n}$ kleiner als 10^{-12} ?

$$\frac{240}{4^n} < 10^{-12}$$
$$\frac{240}{10^{-12}} < 4^n \quad \Leftrightarrow \quad 4^n > 240 \cdot 10^{12} = 2{,}4 \cdot 10^{14}$$
$$n \cdot \lg 4 > \lg\left(2{,}4 \cdot 10^{14}\right) = \lg \cdot 2{,}4 + \lg 10^{14}$$
$$n > \frac{\lg 2{,}4 + 14}{\lg 4} \approx 23{,}8...$$

Ergebnis: Für $n \geq 24$ ist $\dfrac{240}{4^n} < 10^{-12}$.

AUFGABE 9

(a) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 8^n$ größer als 10 Milliarden ?

$$8^n > 10^{10}$$
$$n \cdot \lg 8 > 10$$
$$n > \frac{10}{\lg 8} \approx 11{,}07...$$

Ergebnis: Für $n \geq 12$ ist $8^n > 10^{10}$.

(b) Ab welcher Nummer n ist $a_n = 34 \cdot 2^n$ größer als 10^{15} ?

$$34 \cdot 2^n > 10^{15} \quad \text{d.h.} \quad 2^n > \frac{10^{15}}{34}$$
$$n \cdot \lg 2 > \lg 10^{15} - \lg 34$$
$$n > \frac{15 - \lg 34}{\lg 2} \approx 44{,}7...$$

Ergebnis: Für $n \geq 45$ ist $34 \cdot 2^n > 10^{15}$.

(c) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^n > M$$
$$n \cdot \lg 1{,}5 > \lg M$$
$$n > \frac{\lg M}{\lg 1{,}5}$$

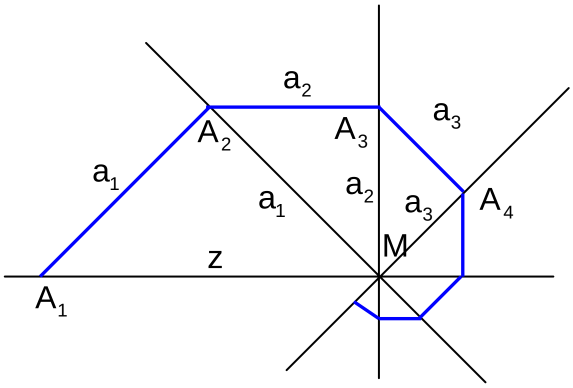
Ergebnis: Da M eine positive Zahl ist, kann die rechte Seite stets berechnet werden, d.h. die Ungleichung hat eine Lösungsmenge, so daß es eine Zahl n_o gibt, ab der gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^n > M$.

(d) Zeige, daß jede noch so große Zahl M ab einer bestimmten Nummer n überschritten wird: $a_n = \dfrac{5^{n+1}}{2^{n-2}}$.

$$a_n = \frac{5^{n+1}}{2^{n-2}} = \frac{5 \cdot 5^n}{2^{-2} \cdot 2^n} = 20 \cdot 2{,}5^n$$
$$20 \cdot 2{,}5^n > M \quad \text{d.h.} \quad 2{,}5^n > \frac{M}{20}$$
$$n \cdot \lg 2{,}5 > \lg M - \lg 20$$
$$n > \frac{\lg M - \lg 20}{\lg 2{,}5}$$

Ergebnis: Da M eine positive Zahl ist, kann die rechte Seite stets berechnet werden, d.h. die Ungleichung hat eine Lösungsmenge, so daß es eine Zahl n_o gibt, ab der gilt $\left(\frac{3}{2}\right)^n > M$.

Aufgabe 10



Weil die Innenwinkel bei M alle 45^o groß sind und zudem jedes der Dreiecke rechtwinklig ist, sind alle diese Rechtecke gleichschenklig rechtwinklig. Daher kann man mit dem Pythagoras diese Kette von Gleichungen erstellen:

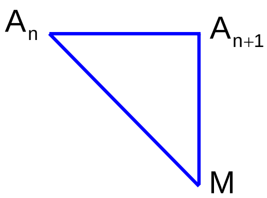
Dreieck A_1MA_2 :

$$a_1^2 + a_1^2 = z^2 \;\Rightarrow\; 2a_1^2 = z^2 \;\Rightarrow\; a_1^2 = \tfrac{1}{2} z^2$$

Also wird $a_1 = z \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Dreieck A_2MA_3 : $a_2^2 + a_2^2 = a_1^2 \;\Rightarrow\; 2a_2^2 = a_1^2 \;\Rightarrow\; a_2^2 = \tfrac{1}{2} a_1^2$, also $a_2 = a_1 \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

Beliebiges Dreieck A_nMA_{n+1}: $a_n^2 + a_n^2 = a_{n-1}^2 \;\Rightarrow\; 2a_n^2 = a_{n-1}^2 \;\Rightarrow\; a_n^2 = \tfrac{1}{2} a_{n-1}^2$



Also wird $a_n = a_{n-1} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Daraus bilden wir

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ und man sieht, daß der Quotient aufeinanderfolgender Glieder konstant ist !

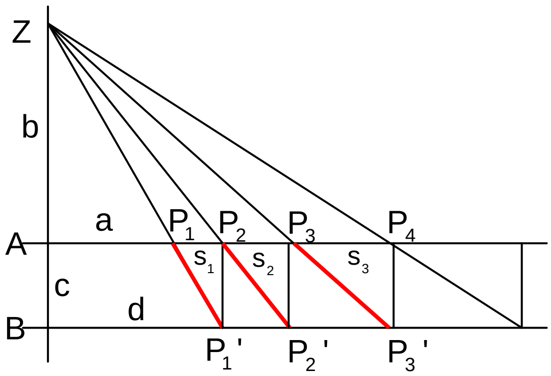
Also liegt eine geometrische Folge vor mit $q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

Allgemeine Berechnungsformel:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = z\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n-1} = z \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}^{\,n} = \frac{z}{\sqrt{2}^{\,n}} = z \cdot 2^{-\frac{n}{2}}$$

Wie man sieht, gibt es verschiedene Möglichkeiten, einen Berechnungsterm für a_n aufzuschreiben.

Aufgabe 11



Es sei a = 3 cm, b = 6 cm und c = 1 cm.

$s_1 = \overline{P_1P_2}$

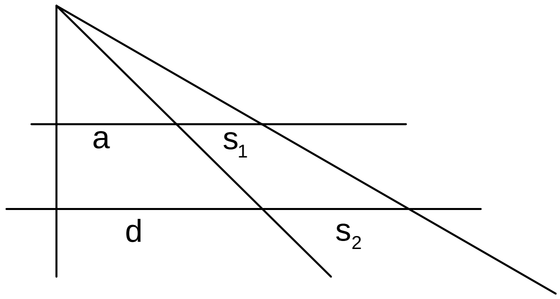
Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{d}{a} = \frac{b+c}{b} \Rightarrow d = \frac{(b+c)\cdot a}{b} = \frac{7\cdot 3}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

(Ich lasse alle Maßeinheiten jetzt weg)

Also ist $s_1 = d - a = 0{,}5$ (cm)

Nun benötigen wir eine Strahlensatz-konfiguration, die oft auch 3. Strahlensatz genannt wird. Für sie gilt:

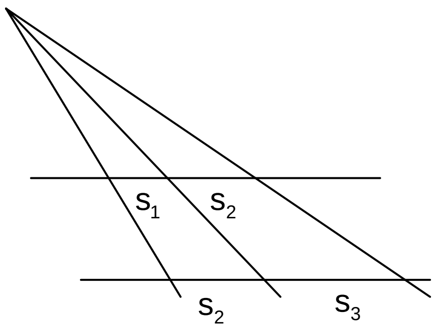


$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{d}{a} \quad \text{d.h.} \quad \frac{s_2}{s_1} = \frac{d}{a} = \frac{3{,}5}{3}$$

also $s_2 = s_1 \cdot \frac{7}{6}$

Nun betrachten wir die nächste Teilfigur

und notieren



$$\frac{s_3}{s_2} = \frac{s_2}{s_1}$$

Man sieht, der Quotient aufeinanderfolgender Streckenlängen ist immer gleich groß.

Für die nächste Figur gilt dann

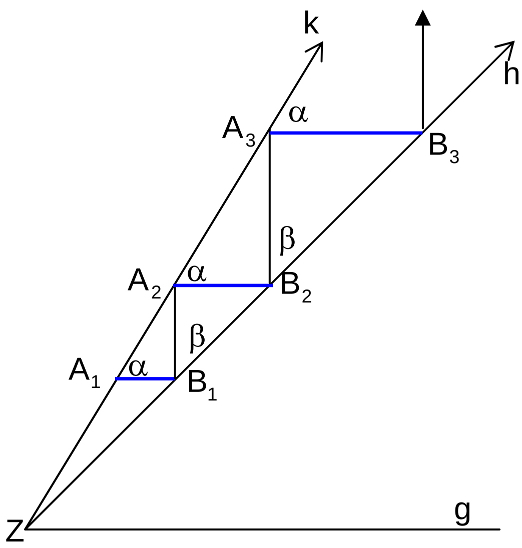
$$\frac{s_4}{s_3} = \frac{s_3}{s_2} \quad \text{usw.}$$

Also liegt eine geometrische Folge vor.

Wir haben $q = \frac{d}{a} = \frac{3{,}5}{3} = \frac{7}{6}$

Und daher wird: $s_n = s_1 \cdot q^{n-1} = 0{,}5\,\text{cm} \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^{n-1}$ bzw. $s_n = s_1 \cdot q^{n-1} = 0{,}5\,\text{cm} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$

Aufgabe 12



Die Gerade g bildet mit h einen 45^o Winkel, g und k dagegen 60^o.
Wir wählen einen beliebigen Punkt A_1 auf k und konstruieren der Reihe nach die Punkte B_1 , A_2 , B_2 , A_3 , B_3 usw.

Es sei $a_1 = \overline{A_1B_1}$, $a_n = \overline{A_nB_n}$.
Stelle eine Berechnungsformel für a_n auf, wenn a beliebige groß sein kann.

Zeige, daß eine geometrische Folge vorliegt.

Lösung:

(1) Im Dreieck $A_1B_1A_2$ ist $\alpha = 60^o$ und es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A_2B_1}}{\overline{A_1B_1}} \Rightarrow \overline{A_2B_1} = \overline{A_1B_1} \cdot \tan 60^o = \overline{A_1B_1} \cdot \sqrt{3} = a_1 \cdot \sqrt{3}$$

Im Dreieck $B_1B_2A_2$ ist $\beta = 45^o$, also ist das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig, also sind die Strecken A_2B_2 und A_2B_1 gleich groß:

$$a_2 = \overline{A_2B_2} = a_1\sqrt{3}$$

(2) Im Dreieck $A_2B_2A_3$ ist $\alpha = 60^o$ und es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A_3B_2}}{\overline{A_2B_2}} \Rightarrow \overline{A_3B_2} = \overline{A_2B_2} \cdot \tan 60^o = \overline{A_2B_2} \cdot \sqrt{3} = a_2 \cdot \sqrt{3}$$

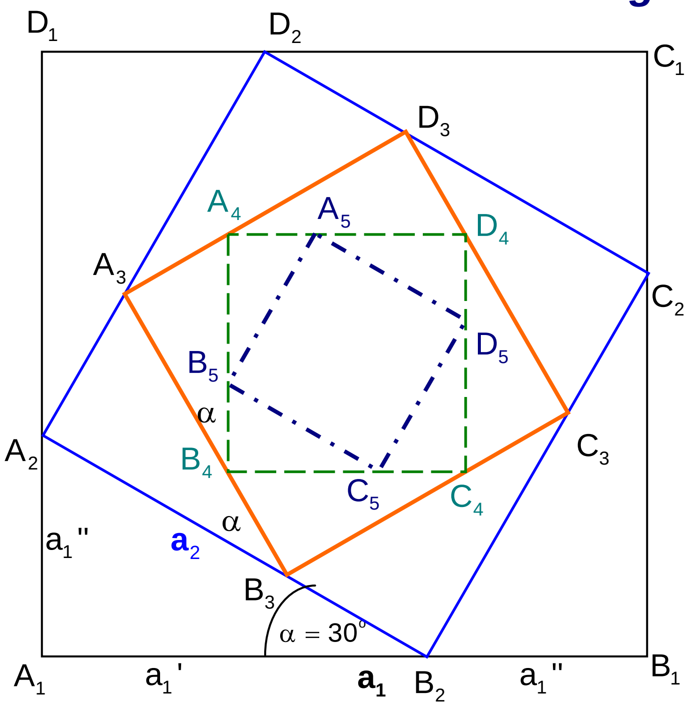
Im Dreieck $B_2B_3A_3$ ist $\beta = 45^o$, also ist das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig, also sind die Strecken A_3B_3 und A_3B_2 gleich groß:

$$a_3 = \overline{A_3B_3} = a_2\sqrt{3}$$

Man beobachtet, daß die nächste Strecke immer um den Faktor $\sqrt{3}$ größer ist
Also die vorangehende. Also liegt eine geometrische Folge vor.

Allgemein gilt dann: $a_n = a_1 \cdot \sqrt{3}^{\,n-1}$

Aufgabe 13



In ein Quadrat werden fortgesetzt weitere Quadrate eingezeichnet, deren Ecken auf den Seiten des vorgehenden Quadrats liegen, und deren Seiten mit den vorgehenden Seiten jeweils einen Winkel von 30° bilden. So entsteht eine Folge von Quadraten mit den Seitenlängen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Zeige, daß die Folge der Seiten und der Quadratinhalte geometrisch ist.
Berechne zu $a_1 = 8$ cm a_2 bis a_5 .

Es sei $A_1B_1 = a_1$ und $A_1B_2 = a_1'$

1. Schritt: Zunächst wird a_1' aus a_1 berechnet.

Im Dreieck $A_1B_2A_2$ ist $\tan 30^\circ = \frac{a_1''}{a_1'}$ also $a_1'' = a_1' \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (1)

Da $\overline{B_1B_2} = \overline{A_1A_2} = a_1''$ ist, folgt: $\overline{A_1B_1} = a_1' + a_1''$, d.h. $a_1 = a_1' + a_1''$. Hier wird (1)

eingesetzt: $a_1 = a_1' + a_1' \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = (1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}) \cdot a_1' = \frac{3+\sqrt{3}}{3} a_1' \Rightarrow a_1' = \frac{3}{3+\sqrt{3}} a_1$

Nun kann man noch den Nenner rational machen und mit $(3-\sqrt{3})$ erweitern:

$$a_1' = \frac{3 \cdot (3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} a_1 = \frac{3 \cdot (3-\sqrt{3})}{9-3} a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a_1$$

Eigentlich nicht erforderlich, aber doch interessant ist die Berechnung der rechten Teilstrecke a_1'': $a_1'' = a_1 - a_1' = a_1 - \frac{3-\sqrt{3}}{2} a_1 = \left(1 - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) a_1 = \frac{2-3+\sqrt{3}}{2} a_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a_1$

2. Schritt: Berechnung von a_2 , also der nächsten Quadratseite:

Im Dreieck $A_1B_1A_2$ gilt $\cos\alpha = \frac{a_1'}{a_2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_1'}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}} a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \cdot a_1$

Um den Nenner rational zu machen, erweitern wir mit $(\sqrt{3}-1)$:

$$a_2 = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \cdot a_1 = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(3-1)} a_1 = (\sqrt{3}-1) a_1$$

Daraus folgt: $\frac{a_2}{a_1} = (\sqrt{3}-1)$. Wenn tatsächlich eine geometrische Folge vorliegt, dann haben wir hier schon den Faktor q gefunden. *Welch seltsames q !!*

Nun wissen wir, daß die Figuren so angelegt sind, daß die entsprechenden Winkel immer gleich bleiben, d.h. die Dreiecke und Quadrate werden kleiner, bleiben aber ähnlich. Die Ähnlichkeitslehre sagt uns, daß dann aber alle Verhältnisse gleich bleiben.

Also gilt auch $\frac{a_3}{a_2} = \left(\sqrt{3} - 1\right)$ usw.

Es liegt also tatsächlich eine geometrische Folge mit $q = \sqrt{3} - 1$ vor !

Berechnung der Seitenlängen:

$a_1 = 8\text{ cm}$, also folgt $a_2 = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot 8\text{ cm} \approx 5{,}86\text{ cm}$,

$a_3 = a_2 \cdot q = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \cdot 8\text{ cm} = \left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right) \cdot 8\text{ cm} = \left(4 - 2\sqrt{3}\right) \cdot 8\text{ cm} \approx 4{,}29\text{ cm}$

$a_4 = q \cdot a_3 = \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(4 - 2\sqrt{3}\right) \cdot 8\text{ cm} = \left(4\sqrt{3} - 4 - 6 + 2\sqrt{3}\right) \cdot 8\text{ cm} = \left(6\sqrt{3} - 10\right) \cdot 8\text{ cm} \approx 3{,}19\text{ cm}$

$a_5 \approx 2{,}30\text{ cm}$

Berechnung der Quadratinhalte:

Es ist $F_1 = a_1^2 = 64$

$$F_2 = a_2^2 = (a_1 \cdot q)^2 = a_1^2 \cdot q^2 = F_1 \cdot q^2 = F_1 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \approx F_1 \cdot 0{,}536$$

$$F_3 = a_3^2 = (a_2 \cdot q)^2 = a_2^2 \cdot q^2 = F_2 \cdot q^2 = F_2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = F_1 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)^4$$

Die Folge der Flächeninhalte ist ebenfalls geometrisch und hat den Faktor q^2 .

Zusatz zur Konstruktion der Quadratfolge.

Wie kann man diese verschachtelten und verdrehten Quadrate konstruieren ?

Dazu muß man die Lage der Eckpunkte des jeweils nächsten Quadrates ermitteln.

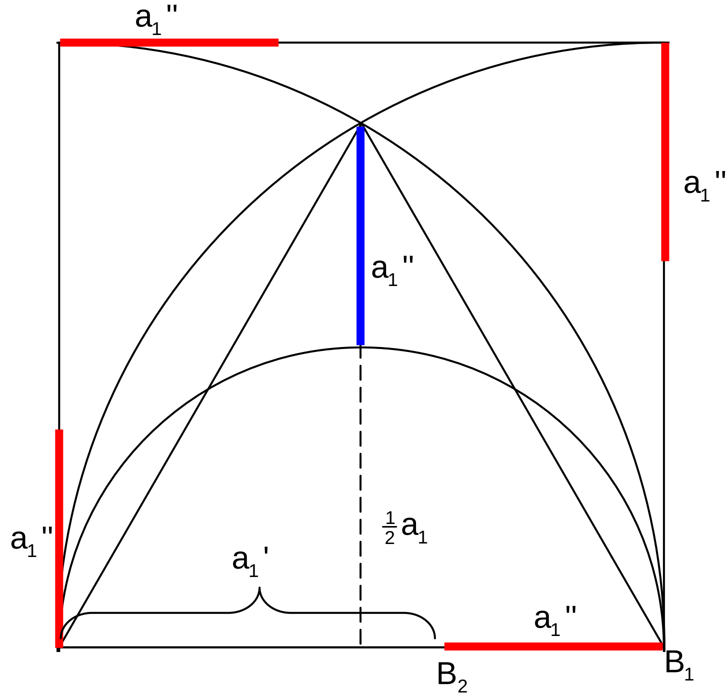
Ich habe diese Fragestellung in einer hochinteressanten und lebhaften Stunde von meinem Leistungskurs untersuchen lassen. Dabei haben sich zwei Methoden heraus kristallisiert, die ich hier vorstellen möchte.

Konstruktionsmethode von Eva:

Für die Teilstrecke a_1'', die von B_1 bis B_2 reicht, haben wir oben $a_1'' = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a_1$ ermittelt. Spaltet man dies auf in $a_1'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_1$, dann kann man erkennen, daß der erste Summand die Höhe in einem gleichschenkligen Dreieck mit der Grundseite a_1 ist. Davon zieht man dann die halbe Grundseite ab.

Man konstruiert also über der Grundseite ein gleichseitiges Dreieck:

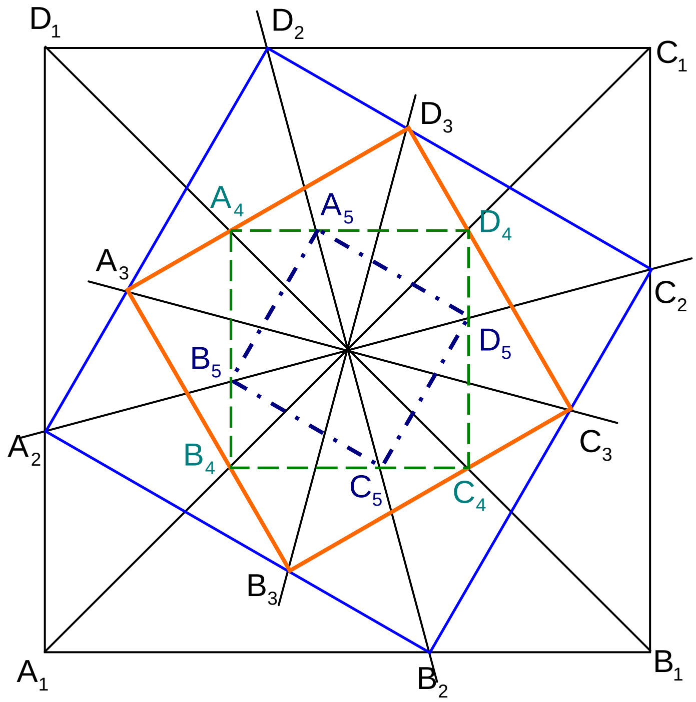
Dann zeichnet man die zugehörige Höhe ein und nimmt unten durch einen Kreisbogen $\frac{1}{2}a_1$ weg, es bleibt a_1'' übrig (dick blau). Diese Strecke trägt man auf den vier Quadratseiten ab und erhält so die Eckpunkte des ersten verdrehten Quadrats B_2 usw.



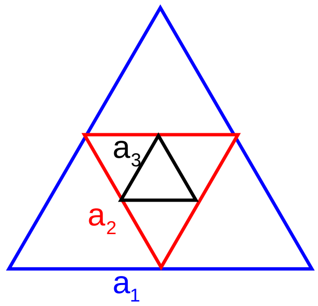
Konstruktionsmethode von Laura:

Sie hat erkannt, daß hier eine Drehstreckung um 30^O um den Quadratmittelpunkt vorliegt. Für jedes weitere Quadrat benötigt man wieder diese Drehstreckung. Also sollte man durch den Mittelpunkt Linien im Winkelabstand 30^O zeichnen. Diese schneiden dann die Quadratseiten in den gesuchten neuen Eckpunkten der folgenden Quadrate.

Man kann dann fortgesetzt alle weiteren Quadrate einzeichnen, so lange man Lust hat bzw. die Zeichnung noch überschaubar bleibt.



Aufgabe 14



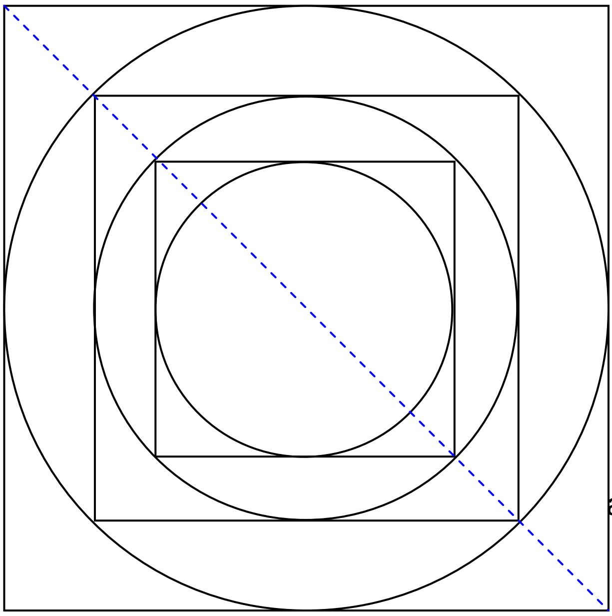
In ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge $a_1 = a$ wird auf die dargestellte Art eine Folge von gleichseitigen Dreiecken einbeschrieben. Berechne die Folge der Dreiecksseiten a_1 , a_2 , ... a_n , .. und der Flächeninhalte F_1 , F_2 , ... , F_n .

Diese Aufgabe ist elementar einfach:

Die Seiten werden fortgesetzt halbiert, d.h. es ist $a_2 = \frac{1}{2}a_1$; $a_3 = \frac{1}{2}a_2$; usw.
Also liegt eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{2}$ vor.

Die Fläche eines Dreiecks wird durch das nächste Dreieck in 4 kongruente Teile zerlegt, also ist das innere nächste Dreieck nur noch $\frac{1}{4}$ des vorangehenden.
Also bilden auch die Flächeninhalte eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 15



$a_1 = a$

In ein Quadrat der Seite a wird ein Kreis einbeschrieben. In diesen wiederum ein Quadrat, das parallel zum äußeren Quadrat liegt usw. Berechne die Folge der Flächeninhalte der Quadrate Q_1 , Q_2 , ... , Q_n , ... und der Kreise: F_1 , F_2 , ... , F_n , ...

(1) Die erste Quadratseite ist $a_1 = a$. Dieses Quadrat hat den Inhalt $Q_1 = a^2$.
Daher ist der Radius des ersten Inkreises $r_1 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a$.
Der Flächeninhalt dazu ist $F_1 = \pi r_1^2 = \pi \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$.

(2) Der Durchmesser des erste Inkreises ist die Diagonale d_2 des zweiten Quadrates: $d_2 = a$ andererseits ist $d_2 = a_2\sqrt{2}$ also folgt

$$a_2\sqrt{2} = a \Rightarrow a_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Das 2. Quadrat hat also den Inhalt $Q_2 = a_2^{\ 2} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}Q_1$

Der Radius des zweiten Inkreises ist $r_2 = \frac{1}{2}a_2$.

Sein Flächeninhalt ist $F_2 = \pi r_2^{\ 2} = \pi \frac{1}{4} a_2^{\ 2} = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi a^2 = \frac{1}{2}F_1$

Man erkennt aus diesen Rechnungen, daß der algebraische Zusammenhang sich auf das jeweils nächste Quadrat bzw. seinen Inkreis überträgt.
Beide Figuren liefern für den Inhalt eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{2}$.