ZAHLENFOLGEN
Teil 1

Einführende Beispiele
Arithmetische Folgen

Datei Nr. 40011

Friedrich Buckel

Stand:
August 2006

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Die Lösungen zu den meisten Aufgaben und das Kapitel 3 befinden sich nur auf der Mathematik-CD.

Die Fortsetzung (Geometrische Folgen) folgt in der Datei „Folgen 2“ Nr. 40012.

1 Einführende Beispiele

1.1 Erste Definition

Eine Zahlenfolge ist eine geordnete und nummerierte Liste von Zahlen, die entweder in der aufzählenden Schreibweise oder durch eine Berechnungsvorschrift gegeben sein kann.

1.2 Beispiele: Zahlenfolgen in der aufzählenden Schreibweise:

(a)	$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots$	Diese Folge besteht aus allen geraden Zahlen in steigender Folge, beginnend bei 2.
(b)	$1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \ldots$	Es handelt sich um die Folge der Quadratzahlen, beginnend bei 1.
(c)	$2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ \ldots$	Es handelt sich um die Folge aller Primzahlen. Es gibt dazu keine algebraische Bildungsvorschrift.
(d)	$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ldots$	Dies ist die Folge aller Stammbrüche. Sie haben im Zähler stets die Zahl 1.
(e)	$3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \ldots$	Hier muss auffallen, dass alle Zahlen den Abstand 4 haben und die kleinste 3 ist.
(f)	$5;\ -5;\ 5;\ -5;\ \ldots$	Die ist eine alternierende Folge (d.h. mit wechselnden Vorzeichen), bestehend nur aus 5 und -5.
(g)	$-5;\ 5;\ -5;\ 5;\ \ldots$	Diese Folge beschreibt man wie (f), sie beginnt nur mit – 5 und ist daher eine andere Zahlenfolge !!
(h)	$4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ldots$	Dies ist die Folge der Zahlen, die aus 4 durch fortgesetzte Halbierung entsteht.
(i)	$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ldots$	Diese Folge beginnt mit zwei Einsen, dann folgt jeweils die Summe der beiden Vorgänger
(j)	$\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ldots$	Die Folge beginnt mit $\frac{1}{2}$. Dann erhöhen sich Zähler und Nenner jeweils um 1.
(h)	$100;\ 99;\ 92;\ 73;\ \ldots$	Die Folge beginnt mit 100. Dann wird jeweils eine Kubikzahl subtrahiert, beginnend mit 1^3.

1.3 Aufgaben (Lösungen auf Seite 3)

Gegeben sind die ersten Glieder einer Zahlenfolge. Schreibe die nächsten 4 dazu und gib die Bildungsvorschrift mit Worten an.

(a) $-8;\ -4;\ 0;\ 4;\ ...$

(b) $12;\ 6;\ 4;\ 3;\ ...$

(c) $28;\ 21;\ 14;\ 7;...$

(d) $8;14;\ 20;\ 26;\ ...$

(e) $60;\ 59;\ 56;\ 51;\ ...$

(f) $-24;\ -23;\ -20;\ -15;\ ..$

(g) $3;\ 9;\ 27;\ 81;$

(h) $78;\ 72;\ 54;\ 0;...$

(i) $5;-10;15;-20;\ ...$

(j) $5;-10;20;-40;\ ...$

(k) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ ...$

(l) $24;-12;\ 6;\ -3;\ ...$

(m) $\frac{4}{3};\ 1;\ \frac{8}{9};\ \frac{10}{12};\ ...$

1.4 Aufgaben mit Lösungen auf Seite 4

Gegeben sind die ersten Glieder einer Zahlenfolge. Schreibe die nächsten 4 dazu und gib die Bildungsvorschrift mit Worten an.

(a) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ ...$

(b) $\frac{1}{16};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};...$

(c) $40;\ 28;\ 16;\ 4;\ ...$

(d) $\frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{8};\ \frac{2}{5};...$

(e) $99;\ 96;\ 91;\ 84;\ ...$

(f) $\frac{2}{3};\ \frac{9}{4};\ \frac{8}{27};\ \frac{81}{16};...$

(g) $1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;...$

(h) $36;\ 9;\ \frac{9}{4};\ \frac{9}{16};\ ...$

(i) $0;6;-6;18;\ ...$

(j) $\frac{15}{8};\ 1;\ \frac{5}{12};\ 0;\ ...$

(k) $4;\ 5;\ 8;\ 13;$

(l) $\frac{16}{27};\ \frac{8}{9};\ \frac{4}{3};\ 2;...$

Lösungen zu 1.3

(a) $-8\,;\ -4\,;\ 0\,;\ 4\,;\ 8\,;\ 12\,;\ 16\,;\ 20$ (blau die neuen Glieder der Folge)
Aufsteigende Folge mit Abstand 4, beginnend bei –8.

(b) $12=\frac{12}{1}\,;\ 6=\frac{12}{2}\,;\ 4=\frac{12}{3}\,;\ 3=\frac{12}{4}\,;\ \frac{12}{5}\,;\ \frac{12}{6}=2\,;\ \frac{12}{7}\,;\ \frac{12}{8}=\frac{3}{2}\,;\ldots$ (rot zur Erklärung)
Die Folge besteht aus Brüchen mit dem Zähler 12 und dem Nenner 1, 2, 3 usw.

(c) $28\,;\ 21\,;\ 14\,;\ 7\,;\ 0\,;\ -7\,;\ -14\,;\ -21\,;\ldots$
Fallende Folge mit der Differenz 7, beginnend bei 28.

(d) $8\,;14\,;\ 20\,;\ 26\,;\ 32\,;\ 38\,;\ 44\,;\ 50\,;\ \ldots$
Steigende Folge mit der Differenz 6, beginnend bei 8.

(e) $60\,;\ 59=60-1\,;\ 56=60-4\,;\ 51=60-9\,;\ 44=60-16\,;\ 35\,;\ 24\,;\ 11\,;\ldots$
Die Folge entsteht aus 60 durch Subtraktion der Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16 , ...

(f) $-24\,;\ -23=-24+1\,;\ -20=-24+4\,;\ -15=-24+9\,;\ -24+16=-8\,;\ 1\,;\ 12\,;\ 25\,;\ldots$
Die Folge entsteht aus – 24 durch Addition der Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16 , ...

(g) $3\,;\ 9\,;\ 27\,;\ 81\,;\ 243\,;\ 729\,;\ 2187\,;\ 6561\,;\ \ldots$
Es handelt sich um Dreierpotenzen.

(h) $78=81-3\,;\ 72=81-9\,;\ 54=81-27\,;\ 0=81-81\,;-162\,;\ -648\,;\ -2106\,;\ -6480$
Die Dreierpotenzen werden von 81 subtrahiert.
Oder diese Methode:

$$78\xrightarrow[-6]{}72\xrightarrow[\substack{+3\cdot(-6)\\=-18}]{}54\xrightarrow[\substack{+3\cdot(-18)\\=-54}]{}0\xrightarrow[\substack{+3\cdot(-54)\\=-162}]{}-162\xrightarrow[\substack{+3\cdot(-162)\\=-486}]{}-648$$

usw.

(i) $5\,;-10\,;15\,;-20\,;\ 25\,;\ -30\,;\ 35\,;\ -40\,;\ \ldots$
Die Folge besteht aus ganzzahligen Vielfachen von 5. Die geradzahligen Vielfachen erhalten ein negativem Vorzeichen.

(j) $5\,;-10\,;20\,;-40\,;\ 80\,;\ -160\,;\ 320:\ -640\,;\ \ldots$
Alternierende Folge, beginnend mit 5. Fortgesetzte Multiplikation mit (-2) .

(k) $1;\ -1;\ -3\,;\ -5\,;\ -7\,;\ -9\,;\ -11;\ -13\,;\ -15\,;\ \ldots$
Es wird fortlaufend 2 subtrahiert, beginnend bei 1.

(l) $24=\frac{24}{1}\,;-12=-\frac{24}{2}\,;\ 6=\frac{24}{4}\,;\ -3=-\frac{24}{8}\,;\ \frac{3}{2}=\frac{24}{16}\,;\ -\frac{3}{4}=-\frac{24}{32}\,;\ \frac{3}{8}=\frac{24}{64}\,;\ -\frac{3}{16}\,;\frac{3}{32}\ ;-\frac{3}{64}\,;\ \ldots$
Entweder: 24 dividiert man durch Potenzen von (-2): 1 ; -2 ; 4 ; -8 ; 16 ; -32 ; usw.
Oder 24 wird fortgesetzt durch -2 dividiert.

(m) $\frac{4}{3}\,;\ 1=\frac{6}{6}\,;\ \frac{8}{9}\,;\ \frac{10}{12}\,;\ \frac{12}{15}=\frac{4}{5}\,;\ \frac{14}{18}=\frac{7}{9}\,;\ \frac{16}{21}\,;\ \frac{18}{24}=\frac{3}{4}$
Beginnend mit $\frac{4}{3}$ wird fortgesetzt im Zähler 2, im Nenner 3 dazuaddiert.

Lösungen zu 1.4 (blau = neu, rot = Erklärung)

(a) $1;\ -1;\ -3;\ -5;\ -7;\ -9;\ -11;\ -13;\ldots$
Fallende Folge durch fortgesetzte Subtraktion von – 2, beginnend mit 1.

(b) $\frac{1}{16};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{1}=1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots$
Wachsende Folge durch fortgesetzte Multiplikation mit 2, beginnend bei $\frac{1}{16}$

(c) $40;\ 28=40-12;\ 16=28-12;\ 4=16-12;\ -8;\ -20;\ -32;\ -44$
Fallende Folge durch fortgesetzte Subtraktion von 12, beginnend bei 40.

(d) $\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}=\frac{2}{6};\ \frac{3}{8};\ \frac{2}{5}=\frac{4}{10};\ \frac{5}{12};\ \frac{6}{14}=\frac{3}{7};\ \frac{7}{16};\ \frac{8}{18}=\frac{4}{9};\ \ldots$
Folge von Bruchzahlen, deren Zähler um 1 und der Nenner um 2 vergrößert werden, beginnend bei $\frac{1}{4}$.

(e) $99=100-1;\ 96=100-4;\ 91=100-9;\ 84=100-16;\ 75;\ 64;\ 51;\ 36;\ \ldots$
Von 100 wird die Folge der Quadratzahlen subtrahiert. Oder:
Es wird fortgesetzte die Folge der ungeraden Zahlen subtrahiert (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...) beginnend bei 100.

(f) $\frac{2}{3};\ \frac{9}{4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2};\ \frac{8}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3};\ \frac{81}{16}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4};\left(\frac{2}{3}\right)^{5}=\frac{32}{243};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-6}=\frac{729}{64};\ \frac{128}{2187};\frac{6561}{256}$
Der Bruch $\frac{2}{3}$ wird potenziert, die Exponenten sind die Folge 1, -2, 3, -4 , …

(g) $1;\ 2;\ 3=1+2;\ 5=2+3;\ 8=3+5;13=5+8;\ 21;\ 34;\ 55;\ \ldots$
Die ersten beiden Zahlen sind 1 und 2, dann ist jede weitere Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger

(h) $36;\ 9;\ \frac{9}{4};\ \frac{9}{16};\ \frac{9}{64};\frac{9}{256};\ \frac{9}{1024};\ \frac{9}{4096};\ \ldots$
Die Folge beginnt mit 36, dann wird fortlaufend durch 4 dividiert.

(i) $0=2+(-2)^1;6=2+(-2)^2;-6=2+(-2)^3;18=2+(-2)^4;\ -30=2+(-2)^5;$
$66=2+(-2)^6;\ -126=2+(-2)^7;258=2+(-2)^8$
Zur Zahl 2 werden ganzzahlige Potenzen von (-2) addiert.

(j) $\frac{15}{8};\ 1=\frac{10}{10};\ \frac{5}{12};\ 0=\frac{0}{14};\ -\frac{5}{16};\ -\frac{5}{9}=-\frac{10}{18};\ -\frac{3}{4}=-\frac{15}{20};\ -\frac{10}{11}=-\frac{20}{22}$
Die Folge beginnt mit $\frac{15}{8}$. Dann wird fortgesetzt der Zähler um 5 verkleinert, der Nenner um 2 vergrößert.

(k) $4;\ 5=4\boxed{+1};\ 8=5\boxed{+3};\ 13=8\boxed{+5};\ 20=13\boxed{+7};\ 29=20\boxed{+9};\ 40=29\boxed{+11};\ 53$
Die Folge beginnt mit 4, dann wird fortgesetzt die Folge der ungeraden Zahlen addiert.

(l) $\frac{16}{27};\ \frac{8}{9}=\frac{16}{27}\boxed{\cdot\frac{3}{2}};\ \frac{4}{3}=\frac{8}{9}\boxed{\cdot\frac{3}{2}};\ 2=\frac{4}{3}\boxed{\cdot\frac{3}{2}};\ 3;\ \frac{9}{2};\ \frac{27}{4};\ \frac{81}{8};\ \ldots$

Die Folge beginnt mit $\frac{16}{27}$. Dann wird fortgesetzt mit $\frac{3}{2}$ multipliziert.

1.5 Zahlenfolgen sind Funktionen

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung: Jeder Zahl des Definitionsbereiches wird ein eindeutiger Funktionswert zugeordnet. Dabei wird die Grundmenge der reellen Zahlen zugrunde gelegt. Der Definitionsbereich ist die Teilmenge der Grundmenge, der auch wirklich Funktionswerte zugeordnet werden (können).

Nimmt man als Grundmenge die Menge **N** der natürlichen Zahlen, oder aber $\mathbf{N}_O = \{0;1;2;3;...\}$, dann wird jeder natürlichen Zahl ein Funktionswert zugeordnet. Man nennt dies dann auch Zahlenfolge.

(a) Nehmen wir den Funktionsterm $f(n) = 2n$ mit $\mathbf{G} = \mathbf{N}$, dann erhalten wir diese Folge: f(1) = 2 ; f(2) = 4 ; f(3) = 6 ; f(4) = 8 usw.
Meistens schreibt man dafür dann kürzer $a_1 = 2$, $a_2 = 4$; $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ usw.
Die war das Beispiel (a) von Seite 1.

(b) Oder $f(n) = n^2$ bzw. $a_n = n^2$ ergibt $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$ usw.
Dies war Beispiel (b) von Seite 1.

Hier eine Reihe weiterer Funktionsterme für Zahlenfolgen:

(c) $f(n) = 4n - 1$ bzw. $a_n = 4n - 1$. Dies ergibt die Folge 3 ; 7 ; 11 ; 15 ; ...

(d) $f(n) = a_n = 50 - 5n$ ergibt $a_1 = 45$; $a_2 = 40$; $a_3 = 35$; $a_4 = 30$; ...

(e) $a_n = n^2 - 2n$ ergibt $a_1 = -1$; $a_2 = 0$; $a_3 = 3$; $a_4 = 8$ usw.

(f) $a_n = \frac{16}{n}$ ergibt $a_1 = 16$; $a_2 = 8$; $a_3 = \frac{16}{3}$; $a_4 = 4$;...

(g) $a_n = \frac{3n+1}{n-3}$ ergibt $a_1 = -2$; $a_2 = \frac{7}{-1} = -7$; $a_3 = \frac{10}{0}$ existiert nicht !!
$a_4 = 13$; $a_5 = 8$; $a_6 = \frac{19}{3}$; ...
Hier gibt es für die Zahl 3 keinen Funktionswert, d.h. das 3. Glied der Folge existiert nicht. Sie hat ausnahmsweise einen eingeschränkten Definitionsbereich $\mathbf{D} = \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

(h) $a_n = (-1)^n$ ist eine ganz interessante Folge.
Für gerades n wird der Wert +1, für ungerades n dagegen – 1:
$a_1 = -1$; $a_2 = 1$; $a_3 = -1$; ... usw.

(i) $a_n = (-1)^n \cdot (2n+5)$ Der Faktor $(-1)^n$ macht die Folge zu einer **alternierenden** Folge, d.h. die Glieder haben abwechselnd positives und negatives Vorzeichen:

$a_1 = -7$; $a_2 = +9$; $a_3 = -11$; $a_4 = 13$ usw.

(j) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n+5)$. Vergleiche bitte die Folgen (i) und (j). Der einzige Unterschied ist der Faktor $(-1)^n$ bzw. $(-1)^{n+1}$
Die Wirkung sieht man in einer Tabelle am besten:

n	$(-1)^n$	$(-1)^n \cdot (2n+5)$	$(-1)^{n+1}$	$(-1)^{n+1} \cdot (2n+5)$
1	-1	-7	+1	+7
2	+1	+9	-1	-9
3	-1	-11	+1	+11
4	+1	+13	-1	-13
5	-1	-15	+1	+15

Wenn n gerade ist, dann ist n+1 ungerade und umgekehrt. Die Glieder der Folgen in (i) und (j) haben also stets das entgegengesetzte Vorzeichen:

(k) Drei ganz wichtige Folgen sind
(1) $a_n = 2n$ Sie liefert alle **geraden** Zahlen
(2) $a_n = 2n-1$ Sie liefert alle **ungeraden** Zahlen.
(3) $a_n = 2n+1$ Sie liefert ebenfalls nur **ungerade** Zahlen, beginnend ab $a_1 = 3$. Lässt man hier jedoch bereits n ab 0 laufen, dann erhält man wegen $a_0 = 1$ alle ungeraden Zahlen.

1.6 Aufgaben

Berechne jeweils a_1 bis a_5 !

(a) $a_n = 3n-11$

(b) $a_n = 24-10n$

(c) $a_n = n^2-16$

(d) $a_n = n^2-2n+3$

(e) $a_n = n^3-n^2-18$

(f) $a_n = \frac{n-4}{n}$

(g) $a_n = \frac{(n-2)^2}{n^2+4}$

(h) $a_n = \frac{4n+(-1)^n}{2n}$

(i) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n^2+4}{n-4}$

(j) $a_n = \frac{2^n}{n}$

(k) $a_n = \frac{8}{2^{n-1}}$

(l) $a_n = 3^{2n-1}$

(m) $a_n = \sqrt{n+4}$

(n) $a_n = \sin(n \cdot \frac{\pi}{4})$

(o) $a_n = \frac{(-1)^n+1}{n}$

(p) $a_n = n^{(-1)^n}$

(q) $a_n = (2n-1)^{n-1}$

(r) $a_n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$

Lösungen zu 1.6

(a) $a_n = 3n - 11$ -8 ; -5 ; -2 ; 1 ; 4 ; ...

(b) $a_n = 24 - 10n$ 14 ; 4 ; -6 ; -16 ; -26 ; ...

(c) $a_n = n^2 - 16$ -15 ; -12 ; -7 ; 0 ; 9 ; ...

(d) $a_n = n^2 - 2n + 3$ 2 ; 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; ...

(e) $a_n = n^3 - n^2 - 18$ -18 ; - 14 ; 0 ; 30 ; 82 ; ...

(f) $a_n = \frac{n-4}{n}$ $-3;\ -1;\ -\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{1}{5};\ \ldots$

(g) $a_n = \frac{(n-2)^2}{n^2+4}$ $\frac{1}{5};\ 0;\ \frac{1}{13};\ \frac{4}{20} = \frac{1}{5};\ \frac{9}{29};\ \ldots$

(h) $a_n = \frac{4n + (-1)^n}{2n}$ $\frac{3}{2};\ \frac{9}{4};\ \frac{11}{6};\ \frac{17}{8};\ \frac{19}{10};\ldots$

(i) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n^2+4}{n-4}$ $\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3};\ -\frac{8}{-2} = 4;\ \frac{13}{-1} = -13;\ a_4 = -\frac{20}{0}$ ex. nicht ; $29;\ldots$

(j) $a_n = \frac{2^n}{n}$ $2;\ 2;\ \frac{8}{3};4;\frac{32}{5};\ \ldots$

(k) $a_n = \frac{8}{2^{n-1}}$ $8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ldots$

(l) $a_n = 3^{2n-1}$ 3; 27; 243; 2187; 19683; ...

(m) $a_n = \sqrt{n+4}$ $\sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{7};\ \sqrt{8};\ 3;\ \ldots$

(n) $a_n = \sin(n \cdot \frac{\pi}{4})$ $a_1 = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $a_2 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$;
$a_3 = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $a_4 = \sin(\pi) = 0$;
$a_5 = \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; ...

(o) $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ $0;\ 1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{3};\ldots$

(p) $a_n = n^{(-1)^n}$ $1;\ 2;\ 3^{-1} = \frac{1}{3};\ 4;\frac{1}{5};\ldots$

(q) $a_n = (2n-1)^{n-1}$ $1;\ 3^1 = 3;\ 5^2 = 25;\ 7^3 = 343;\ 9^4 = 6561;\ \ldots$

(r) $a_n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$ $\frac{1}{2};\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9};\ \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64};\ \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625};\ \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$

1.7 Rekursive Folgen

Eine Folge heißt rekursiv, wenn man keine direkte Möglichkeit hat, beliebige Glieder der Folge (z.B. a_{37}) zu berechnen, sondern wenn man die Glieder der Folge aus seinen Vorgängern berechnet.

Beispiele:

(a) $a_1 = 5$; $a_n = a_{n-1} + 3$.

Hier berechnet man $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$.
oder $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$.

Aber $a_{37} = a_{36} + 3 = ?$
Wenn man a_{36} noch nicht kennt, dann läßt sich auch a_{37} nicht berechnen.

(b) $a_1 = 2$; $a_n = -a_{n-1}$
Also: $a_2 = -a_1 = -2$
Dann $a_3 = -a_2 = 2$
$a_4 = -a_3 = -2$ usw.

(c) $a_1 = 20$; $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$
Also: $a_2 = \frac{1}{2} a_1 = 10$
Dann $a_3 = \frac{1}{2} a_2 = 5$
$a_4 = \frac{1}{2} a_3 = 2{,}5$ usw.

(d) $a_1 = 1$; $a_n = 3a_{n-1} - n$
Also $a_2 = 3 - 2 = 1$
Dann $a_3 = 3 - 3 = 0$
$a_4 = 0 - 4 = -4$ usw.

(e) $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
Also $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
Dann $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ usw.

1.8 **Aufgabe**: Berechne bis a_5 .

(a) $a_1 = 12$; $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$

(b) $a_1 = 1$; $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} + 1$

(c) $a_1 = 4$; $a_n = \frac{3}{2} \cdot a_{n-1}$

(d) $a_1 = -1$; $a_n = 4 - a_{n-1}$

(e) $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1}{}^2$

(f) $a_1 = -2$; $a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}{}^2$

(g) $a_1 = 2$; $a_n = \dfrac{1 - a_{n-1}}{a_{n-1}}$

(h) $a_1 = 2$; $a_2 = 1$; $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$

(i) $a_1 = 4$; $a_n = a_{n-1} + \dfrac{n-1}{n}$

(k) $a_1 = 0$; $a_n = 2^{a_{n-1}}$

Lösungen zu 1.8

(a) $a_1 = 12\ ;\ a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$ $\quad 12;\ \dfrac{1}{12};\ 12;\ \dfrac{1}{12};\ 12;\ \ldots$

(b) $a_1 = 1\ ;\ a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} + 1$ $\quad 1;\ 2;\ \dfrac{3}{2};\ \dfrac{5}{3};\ \dfrac{8}{5};\ \dfrac{13}{8}\ ;\ \ldots$

(c) $a_1 = 4\ ;\ a_n = \tfrac{3}{2} \cdot a_{n-1}$ $\quad 4;\ 6;\ 9;\ \dfrac{27}{2};\ \dfrac{81}{4};\ \ldots$

(d) $a_1 = -1\ ;\ a_n = 4 - a_{n-1}$ $\quad -1;\ 5;\ -1;\ 5;\ -1;\ \ldots$

(e) $a_1 = 1\ ;\ a_n = {a_{n-1}}^2$ $\quad 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ \ldots$

(f) $a_1 = -2\ ;\ a_n = (-1)^n \cdot {a_{n-1}}^2$ $\quad -2;\ 4;\ -16;\ 256;\ -65536;\ \ldots$

(g) $a_1 = 2\ ;\ a_n = \dfrac{1 - a_{n-1}}{a_{n-1}}$ $\quad 2;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3;\ -\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{7}{4};\ \ldots$

(h) $a_1 = 2 ; a_2 = 1\ ;\ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$ $\quad 2;\ 1;\ \dfrac{2}{1} = 2;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{\frac{1}{2}} = 4;\ \dfrac{1}{8};\ \ldots$

(i) $a_1 = 4\ ;\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{n-1}{n}$ $\quad 4;\ 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{2};\ \dfrac{9}{2} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{31}{6};\ \dfrac{31}{6} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{71}{12}\ ;\ \ldots$

(k) $a_1 = 0\ ;\ a_n = 2^{a_{n-1}}$ $\quad 0;\ 1;\ 2;\ 4;\ 16;\ 65536;\ \ldots$

2 Lineare Folgen - Arithmetische Folgen

Didaktische Vorbemerkung

Man kann die Einführung dieser speziellen Folgen auf zwei prinzipiell verschiedene Arten machen. Entweder man definiert eine arithmetische Folge durch die konstanten Abstände ihrer Glieder, oder man geht vom linearen Funktionsterm aus. Ich beschreite hier den letzten Weg.

2.1 Definition einer linearen Folge

Eine Folge, die durch eine linearen Funktionsterm $a_n = d \cdot n + c$ definiert wird, heißt eine **lineare Folge**.

Beispiele:

(a) $a_n = n - 2$ ergibt $a_1 = -1;\ a_2 = 0;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3$ usw.

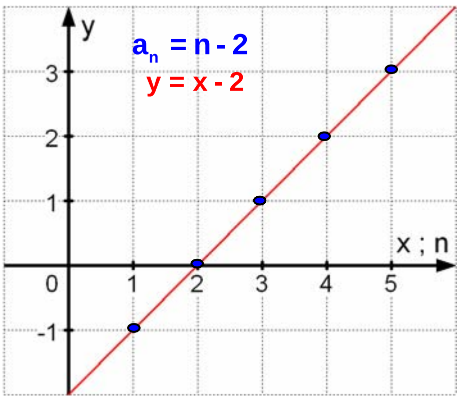
(b) $a_n = 2n + 1$ ergibt $a_1 = 3;\ a_2 = 5;\ a_3 = 7;\ a_4 = 9;\ a_5 = 11$ usw.

Nun schreibe ich zwei lineare Gleichungen auf:

(1) $y = x - 2$ und (2) $y = 2x + 1$, Diese Gleichungen stellen Geraden im x-y-Achsenkreuz dar. Auf ihnen liegen die Punkte, die zur Folge gehören:

Bei (a): $(1|-1);(2|0);(3|1);(4|2);(5|3)$ usw.

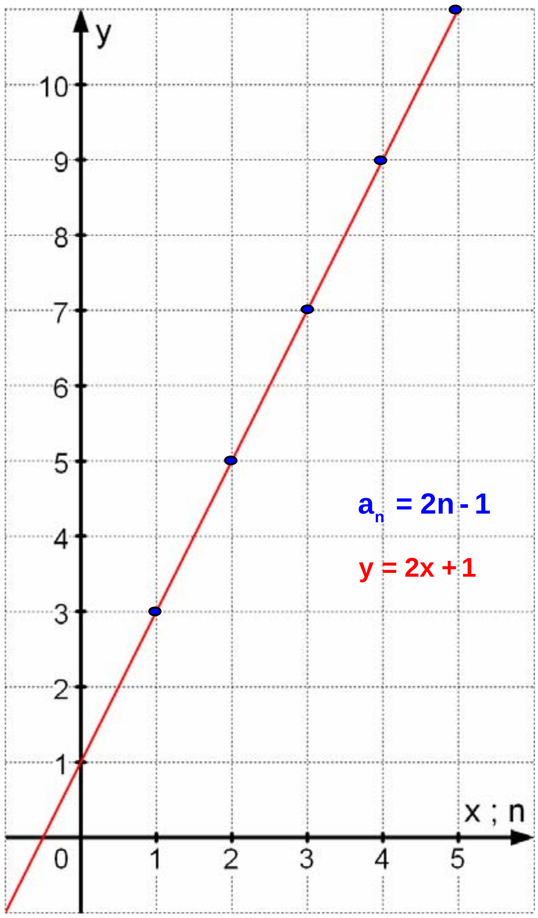
Bei (b): $(1|3);(2|5);(3|7);(4|9);(5|11)$ usw.



Man erkennt, daß die zur Folge gehörenden Punkte $(1|a_1);(2|a_2);...;(n|a_n);...$ auf den Geraden liegen, die zu den x-y-Gleichungen gehören.

Das Schaubild einer Zahlenfolge ist also nur eine Menge einzelner Punkte.

Weil diese Punkte auf einer Geraden liegen, ist der Begriff „lineare Folge“ verständlich.



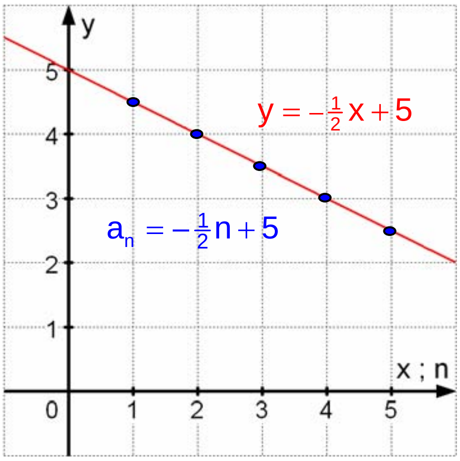
(c) $a_n = -0{,}5 \cdot n + 5$ $a_1 = 4{,}5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 3{,}5$; $a_4 = 3$; $a_5 = 2{,}5$ usw.

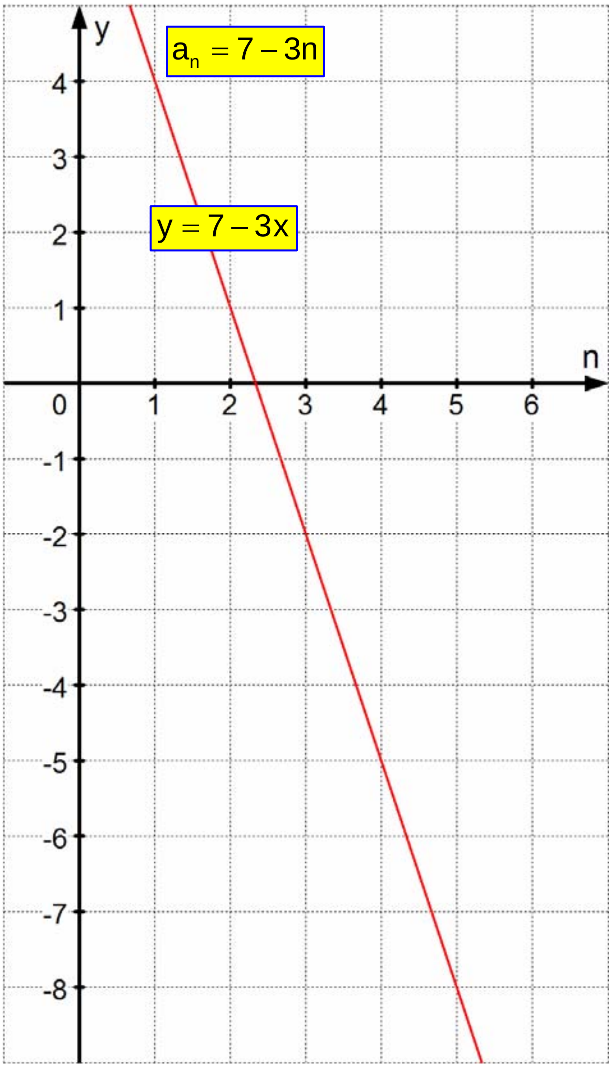
(d) $a_n = 7 - 3n$ $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -5$; $a_5 = -8$ usw.

Die Gleichungen der zugehörigen Geraden sind

(3) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ und (4) $y = -3x + 7$

Hier die zugehörigen Schaubilder.





2.2 AUFGABEN

Berechne die ersten 5 Glieder der linearen Folge und erstelle ein Schaubild:

(a) $a_n = \frac{3}{2}n - 5$

(b) $a_n = \frac{1}{4}n + 3$

(c) $a_n = -4n + 12$

(d) $a_n = -\frac{1}{2}n$

2.3 Die wichtige arithmetische Eigenschaft einer linearen Folge

Das Beispiel (a) in 2.1 enthielt die Folge $a_n = n - 2$ mit den Werten

$$a_1 = -1;\ a_2 = 0;\ a_3 = 1;\ a_4 = 2;\ a_5 = 3 \quad \text{usw.}$$

Wir beobachten: $-1 \xrightarrow[+1]{} 0 \xrightarrow[+1]{} 1 \xrightarrow[+1]{} 2 \xrightarrow[+1]{} 3 \xrightarrow[+1]{} \ldots$

Das Beispiel (b) in 2.1 enthielt die Folge $a_n = 2n + 1$ mit den Werten

$$a_1 = 3;\ a_2 = 5;\ a_3 = 7;\ a_4 = 9;\ a_5 = 11$$

Wir beobachten: $3 \xrightarrow[+2]{} 5 \xrightarrow[+2]{} 7 \xrightarrow[+2]{} 9 \xrightarrow[+2]{} 11 \xrightarrow[+2]{} \ldots$

Die Folge $a_n = 3n + 15$ hat die Werte $a_1 = 18;\ a_2 = 21;\ a_3 = 24;\ a_4 = 27;\ a_5 = 30;\ \ldots$

Wir beobachten: $18 \xrightarrow[+3]{} 21 \xrightarrow[+3]{} 24 \xrightarrow[+3]{} 27 \xrightarrow[+3]{} 30 \xrightarrow[+3]{} \ldots$

Die Folge $a_n = \frac{1}{2}n - 2$ hat die Werte $a_1 = -\frac{3}{2};\ a_2 = -1;\ a_3 = -\frac{1}{2};\ a_4 = 0;\ a_5 = \frac{1}{2};\ \ldots$

Wir beobachten $-\frac{3}{2} \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} -1 \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} -\frac{1}{2} \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} 0 \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[+\frac{1}{2}]{} \ldots$

Zusammengefaßt: Der Abstand, also die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder, ist bei diesen linearen Folgen immer gleich groß, und zwar so groß, wie der Koeffizient von n angibt:

Bei $a_n = 1 \cdot n - 2$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder 1.
Bei $a_n = 2n + 1$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder 2.
Bei $a_n = 3n + 15$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder 3.
Bei $a_n = \frac{1}{2}n - 2$ ist der Abstand aufeinanderfolgender Glieder $\frac{1}{2}$.

Das läßt den Verdacht aufkommen, daß das immer so ist:

> Bei einer linearen Folge ist der Abstand (die Differenz) aufeinander folgender Glieder immer konstant.
> Daher heißen solche Folgen auch **arithmetische** Folgen.

Beweis:

Eine lineare Folge hat einen Funktionsterm der Form $a_n = d \cdot n + c$.

Dann lautet das nächste Glied: $a_{n+1} = d \cdot (n+1) + c = dn + d + c$.

Wir berechnen die Differenz: $a_{n+1} - a_n = (d \cdot n + d + c) - (d \cdot n + c) = d$

Ergebnis: Die Differenz aufeinanderfolgender Glieder einer linearen Folge ist konstant und zwar so groß, wie der Koeffizient von n angibt.

Bemerkung: Dieser Koeffizient ist bei der entsprechenden x-y-Geradengleichung $y = mx + n$ die Steigungszahl m.

Nun können wir natürlich auch sichergehen, daß dies auch für Folgen gilt, bei denen d eine negative Zahl ist. Schauen wir uns dazu zwei schon gezeigte Beispiele aus 2.1 an:

(c) $a_n = -0{,}5 \cdot n + 5$ mit den Werten $a_1 = 4{,}5$; $a_2 = 4$; $a_3 = 3{,}5$; $a_4 = 3$; $a_5 = 2{,}5$ ...

$$4{,}5 \xrightarrow[-0{,}5]{} 4 \xrightarrow[-0{,}5]{} 3{,}5 \xrightarrow[-0{,}5]{} 3 \xrightarrow[-0{,}5]{} 2{,}5 \xrightarrow[-0{,}5]{} \dots$$

(d) $a_n = 7 - 3n$ mit den Werten $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = -2$; $a_4 = -5$; $a_5 = -8$

$$4 \xrightarrow[-3]{} 1 \xrightarrow[-3]{} -2 \xrightarrow[-3]{} -5 \xrightarrow[-3]{} -8 \xrightarrow[-3]{} \dots$$

Grundaufgabe:

Beweise, daß die Folge a_n mit $a_n = 48 - 16\,n$ eine arithmetische Folge ist.

BEWEIS:

$$d = a_{n+1} - a_n = \left(48 - 16 \cdot (n+1)\right) - \left(48 - 16 \cdot n\right)$$
$$d = 48 - 16n - 16 - 48 + 16n = -16$$

Weil die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, liegt eine arithmetische Folge vor.

Aus dieser schönen Eigenschaft läßt sich eine Berechnungsformel herleiten:

$$a_1 \xrightarrow[+d]{} a_2 \xrightarrow[+d]{} a_3 \xrightarrow[+d]{} a_4 \xrightarrow[+d]{} a_5 \xrightarrow[+d]{} a_6 \xrightarrow[+d]{} a_7$$

$\boxed{a_3 = a_1 + 2d}$ $\boxed{a_7 = a_5 + 2d}$

$\boxed{a_4 = a_1 + 3d}$

$\boxed{a_5 = a_2 + 3d}$

$\boxed{a_6 = a_1 + 5d}$

$\boxed{a_7 = a_3 + 4d}$

Es gibt eine herrliche Gedächtnisstütze für die dargestellten Zusammenhänge, nämlich das Lattenzaun-Modell.

Betrachten wir die Gleichung $a_6 = a_2 + 4d$. Die bedeutet $a_6 - a_2 = 4d$.
Und das weiß nun doch jeder: Zwischen der 6. und der 2. Latte sind 4 Zwischenräume!

Oder $a_4 = a_1 + 3d \Leftrightarrow a_4 - a_1 = 3d$: Zwischen der 1. und 4. Latte sind doch drei Zwischenräume.

Dies kann man für folgende Aufgabenstellung ausnützen :

Grundaufgabe:

Von einer arithmetischen Folge kennt man

$$a_4 = 17 \quad \text{und} \quad a_{10} = 59.$$

Berechne die ersten 5 Glieder der Folge.

LÖSUNG:

Nach der Lattenzaunmethode folgt

$$6d = a_{10} - a_4 = 59 - 17 = 42 \Rightarrow d = 7$$

Analog: $a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = a_4 - 3d = 17 - 3 \cdot 7 = 17 - 21 = -4$

Also $-4 \xrightarrow[+7]{} 3 \xrightarrow[+7]{} 10 \xrightarrow[+7]{} 17 \xrightarrow[+7]{} 24 \xrightarrow[+7]{} \ldots$

Das ganze läßt sich verallgemeinern:

Dann gilt auch $a_n - a_1 = (n-1) \cdot d$ bzw. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Für eine beliebige arithmetische Folge gilt:

$$a_m - a_n = (m-n) \cdot d$$

$$a_n - a_1 = (n-1) \cdot d$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Beispiel: Aus $a_1 = -4$ und $d = 7$ folgt

$a_n = -4 + (n-1) \cdot 7 = -4 + 7n - 7 = 7n - 11$

Dies ist der Funktionsterm aus dem obigen Beispiel !

Noch einige Beispiele:

(e) Eine arithmetische Folge ist gegeben durch $a_3 = 6$ und $a_{10} = -36$.
Berechne a_1 und d und stelle die Berechnungsformel für a_n auf.

Lösung: $7d = a_{10} - a_3 = -36 - 6 = -42 \Rightarrow d = -6$.

$a_1 = a_3 - 2d = 6 - (-12) = 6 + 12 = 18$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 18 + (n-1) \cdot (-6) = 18 - 6n + 6 = 24 - 6n$.

(f) Prüfe nach, ob eine arithmetische Folge vorliegt und stelle dann die Berechnungsvorschrift auf: $a_1 = 186$; $a_2 = 318$; $a_5 = 714$

LÖSUNG: (Wir müssen überprüfen, ob die Differenzen konstant sind:)

$$a_2 - a_1 = 318 - 186 = 132 = d$$

$$a_5 - a_2 = 714 - 318 = 396$$

Wenn eine arithmetische Folge vorliegt, muß $a_5 - a_2 = 3d$ sein:

$$3d = 396 \;\Rightarrow\; d = 132 .$$

Dies stimmt, also liegt eine arithmetische Folge vor.

Und es gilt:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 186 + (n-1)\cdot 132 = 186 + 132n - 132 = 132n + 54$$

(g) Prüfe nach, ob eine arithmetische Folge vorliegt und stelle dann die Berechnungsvorschrift auf: $a_3 = 1900$; $a_7 = 1600$; $a_{14} = 1075$

LÖSUNG:

$$a_7 - a_3 = 4d = -300 \;\Rightarrow\; d = -75 \quad (1)$$

$$a_{14} - a_7 = 7d = 1075 - 1600 = -525 \;\Rightarrow\; d = -75 \quad (2).$$

Die Rechnung (1) und (2) führen zum selben Wert von d, also liegt eine arithmetische Folge vor mit $a_1 = a_3 - 2d = 1900 - 2\cdot(-75) = 2050$ und

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 2050 + (n-1)\cdot(-75) = 2050 - 75n + 75 = -75n + 2125$$

(h) Zeige, daß jetzt keine arithmetische Folge vorliegt: $a_2 = 320$; $a_4 = 392$; $a_7 = 504$

Beweis:

$$a_4 - a_2 = 392 - 320 = 72 = 2d \;\Rightarrow\; d = 36$$

$$a_7 - a_4 = 503 - 392 = 111 = 3d \;\Rightarrow\; d = 37$$

Weil die zweite Berechnung von d zu einem anderen Ergebnis führt, kann keine arithmetische Folge vorliegen !

(Man muß sich auch den passenden Text zu einer solchen Rechnung einfallen lassen !)

2.4 Aufgaben

(1) Beweise, daß eine arithmetische Folge vorliegt. Stelle eine Berechnungsvorschrift auf.

a) $a_3 = -28$; $a_5 = 26$; $a_8 = 107$

b) $a_2 = 249$; $a_6 = 405$; $a_{10} = 561$

c) $a_{11} = 296$; $a_{16} = 216$; $a_{25} = 72$

d) $a_3 = 20181$; $a_{10} = 17311$; $a_{20} = 13211$; $a_{131} = -32299$

(2) Zeige, daß keine arithmetische Folge vorliegt.
Wie müßte a_{12} lauten, wenn eine arithmetische Folge vorliegen sollte ?

a) $a_5 = 450$; $a_7 = 506$; $a_{12} = 674$

b) $a_6 = 630$; $a_8 = 560$; $a_{12} = 455$

(3) Gegeben sind die arithmetischen Folgen a_n und b_n .
Prüfe nach, ob $c_n = a_n + b_n$; $d_n = a_n - b_n$; $e_n = 3a_n$ und $f_n = a_n \cdot b_n$ arithmetische Folge sind.

für $a_n = 6n - 12$ und $b_n = 2n + 15$

(4) Gegeben sind 3 Glieder eine Folge. Setze so wenig wie nötig Zahlen dazwischen, damit eine arithmetische Folge entsteht.
Berechne dann a_1 und a_n .

a) $a_6 = 122$; $b = 156$; $c = 207$

b) $b = 388$; $a_{15} = 340$; $c = 280$

c) $b = -84$; $c = -39$; $a_{20} = 24$

(5) Ist b ein Glied der gegebenen Folge ?

a) $a_n = 14n + 16$; $b = 1808$

b) $a_n = 240 - 28n$; $b = -290$

c) $a_3 = 64$; $a_6 = 256$; $b = 640$

d) $a_{10} = 25$; $a_{14} = -25$; $b = 175$

(6) Beweise allgemein, daß eine Folge der Form $f_n = an^2 + bn + c$ keine arithmetische Folge ist.

Lösungen zu 2.2

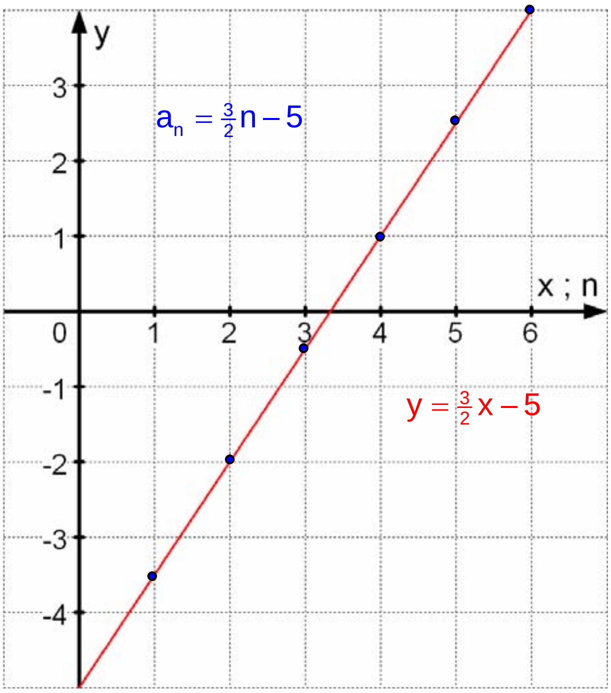
Berechne die ersten 5 Glieder der linearen Folge und erstelle ein Schaubild:

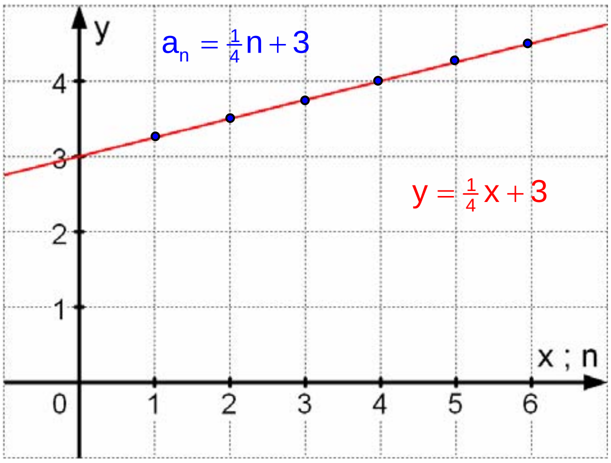
(a) $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ $\quad a_1 = -\frac{7}{2};\ a_2 = -2;\ a_3 = -\frac{1}{2};\ a_4 = 1;\ a_5 = \frac{5}{2};\ \ldots$

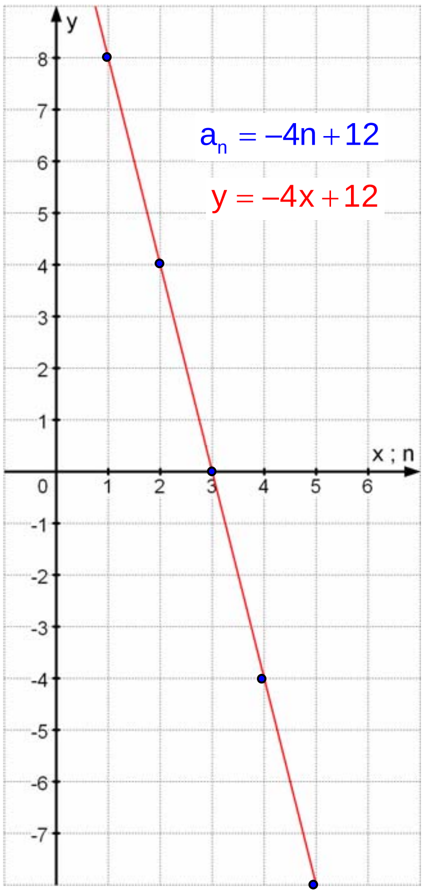
(b) $a_n = \frac{1}{4}n + 3$ $\quad a_1 = \frac{13}{4};\ a_2 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2};\ a_3 = \frac{15}{4};\ a_4 = 4;\ a_5 = \frac{17}{4};\ \ldots$

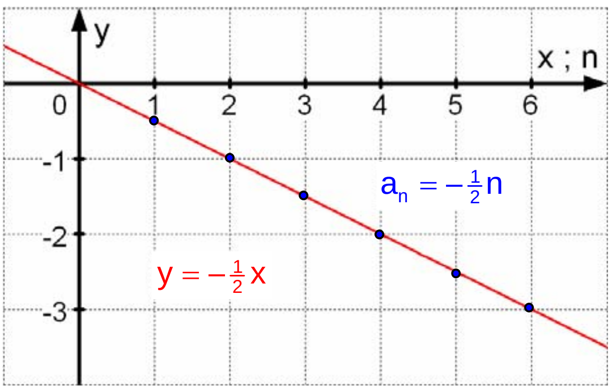
(c) $a_n = -4n + 12$ $\quad a_1 = 8;\ a_2 = 4;\ a_3 = 0;\ a_4 = -4;\ a_5 = -8;\ \ldots$

(d) $a_n = -\frac{1}{2}n$ $\quad a_1 = -\frac{1}{2};\ a_2 = -1;\ a_3 = -\frac{3}{2};\ a_4 = -2;\ a_5 = -\frac{5}{2};\ \ldots$









Lösungen zu 2.4

(1) Beweise, daß eine arithmetische Folge vorliegt. Stelle eine Berechnungsvorschrift auf.

a) $a_3 = -28$; $a_5 = 26$; $a_8 = 107$

$a_5 - a_3 = 26 + 28 = 54 = 2d \Rightarrow d = 27$

$a_8 - a_5 = 107 - 26 = 81 = 3d \Rightarrow d = 27$

Weil beide Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_1 = a_3 - 2d = -28 - 54 = -82$ und

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -82 + (n-1) \cdot 27 = -82 + 27n - 27 = 27n - 109$

b) $a_2 = 249$; $a_6 = 405$; $a_{10} = 561$

$a_6 - a_2 = 405 - 249 = 156 = 4d \Rightarrow d = 39$

$a_{10} - a_6 = 561 - 405 = 156 = 4d \Rightarrow d = 39$

Weil beide Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_1 = a_2 - d = 249 - 39 = 210$ und

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 210 + (n-1) \cdot 39 = 210 + 39n - 39 = 39n + 171$

c) $a_{11} = 296$; $a_{16} = 216$; $a_{25} = 72$

$a_{16} - a_{11} = 216 - 296 = -80 = 5d \Rightarrow d = -16$

$a_{25} - a_{16} = 72 - 216 = -144 = 9d \Rightarrow d = -16$

Weil beide Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_1 = a_{11} - 10d = 296 + 160 = 456$ und

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 456 + (n-1) \cdot (-16) = 456 - 16n + 16 = -16n + 472$

d) $a_3 = 20181$; $a_{10} = 17311$; $a_{20} = 13211$; $a_{131} = -32299$

$a_{10} - a_3 = 17311 - 20181 = -2870 = 7d \Rightarrow d = -410$

$a_{20} - a_{10} = 13211 - 17311 = -4100 = 10d \Rightarrow d = -410$

$a_{131} - a_{20} = -32299 - 13211 = -45510 = 111d \Rightarrow d = -410$

Weil alle drei Werte gleich sind, liegt eine arithmetische Folge vor mit

$a_1 = a_3 - 2d = 20181 - 2 \cdot (-410) = 21001$ und

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 21001 + (n-1) \cdot (-410) = 21001 - 410n + 410$

$a_n = -410n + 21411$

(2) Zeige, daß keine arithmetische Folge vorliegt.
Wie müßte a_{12} lauten, wenn eine arithmetische Folge vorliegen sollte ?

a) $a_5 = 450$; $a_7 = 506$; $a_{12} = 674$

$a_7 - a_5 = 506 - 450 = 56 = 2d \Rightarrow d = 28$

$a_{12} - a_7 = 674 - 506 = 168 = 5d \Rightarrow d = \frac{168}{5} = 33{,}6$

Diese verschiedenen d-Werte sind ein Widerspruch zur Annahme, es liege eine arithmetische Folge vor.

Richtiger Wert für a_{12}': $a_{12} = a_7 + 5 \cdot d = 506 + 5 \cdot 28 = 646$

b) $a_6 = 630$; $a_8 = 560$; $a_{12} = 455$

$a_8 - a_6 = 560 - 630 = -70 = 2d \Rightarrow d = -35$

$a_{12} - a_8 = 455 - 560 = -105 = 4d \Rightarrow d = -\frac{105}{4} \neq -35$

Also liegt keine arithmetische Folge vor.

Richtiger Wert für a_{12} : $a_{12} = a_8 + 4d = 560 + 4 \cdot (-35) = 560 - 140 = 420$

(3) Gegeben sind die arithmetischen Folgen a_n und b_n .
Prüfe nach, ob $c_n = a_n + b_n$; $d_n = a_n - b_n$; $e_n = 3a_n$ und $f_n = a_n \cdot b_n$ arithmetische Folge sind für $a_n = 6n - 12$ und $b_n = 2n + 15$

1. $c_n = a_n + b_n = 8n + 3$ ist eine lineare Folge (Gleichungstyp !) und daher eine arithmethische Folge.

2. $d_n = a_n - b_n = 4n - 27$ ist eine lineare Folge (Gleichungstyp !) und daher eine arithmethische Folge.

3. $e_n = 3a_n = 18n - 36$ ist eine lineare Folge (Gleichungstyp !) und daher eine arithmethische Folge.

4. $f_n = a_n \cdot b_n = (6n - 12)(2n + 15) = 12n^2 - 24n + 90n - 180 = 12n^2 - 66n - 180$ ist keine lineare Folge und daher keine arithmetische Folge, was wir wie folgt beweisen (und das geht bei allen quadratischen Folgen so):

Beweis, daß $f_n = 12n^2 - 66n - 180$ keine arithmetische Folge ist:

$f_1 = 12 - 66 - 180 = -162$

$f_2 = 48 - 132 - 180 = -264$

$f_3 = 108 - 198 - 180 = -270$

$f_2 - f_1 = -264 + 162 = -102$; $f_3 - f_2 = -270 + 264 = -6$.

Weil $f_2 - f_1 \neq f_3 - f_2$ liegt keine arithmetische Folge vor.

(4) Gegeben sind 3 Glieder eine Folge. Setze so wenig wie nötig Zahlen dazwischen, damit eine arithmetische Folge entsteht.
Berechne dann a_1 und a_n .

a) $a_6 = 122$; $b = 156$; $c = 207$

$b - a_6 = 156 - 122 = 34$ und $c - b = 207 - 156 = 51$
Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Differenzen ist 17:
$34 = 2 \cdot 17$ und $51 = 3 \cdot 17$, also wählen wir die Folgendifferenz $d = 17$.
Dann muß zwischen 122 und 156 die Zahl $a_7 = 122 + 17 = 139$ geschaltet werden, b ist dann a_8. Und zwischen b und c haben wir 3 Differenzen (Abstände), also benötigen wir dort 2 Zwischenwerte:

$a_9 = 156 + 17 = 173$, $a_{10} = 156 + 2 \cdot 17 = 190$, $a_{11} = 156 + 3 \cdot 17 = 207$ ist dann c.

Die Folge lautet also

$$\ldots \xrightarrow[+17]{} 122 \xrightarrow[+17]{} 139 \xrightarrow[+17]{} 156 \xrightarrow[+17]{} 173 \xrightarrow[+17]{} 190 \xrightarrow[+17]{} 207$$

Damit folgt $a_1 = a_6 - 5d = 122 - 5 \cdot 17 = 37$ und

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 37 + (n-1) \cdot 17 = 37 + 17n - 17 = 17n + 20$$

b) $b = 388$; $a_{15} = 340$; $c = 280$

$a_5 - b = 340 - 388 = -48$ und $c - a_5 = 280 - 340 = -60$
Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Differenzen ist -12:
$-48 = 4 \cdot (-12)$ und $-60 = 5 \cdot (-12)$, also wählen wir die Folgendifferenz $d = -48$.
Dann haben wir zwischen 388 und 340 4 Differenzen (Abstände) und schalten folglich 3 Zahlen dazwischen:

$$388 \xrightarrow[-12]{} 376 \xrightarrow[-12]{} 364 \xrightarrow[-12]{} 352 \xrightarrow[-12]{} 340$$

$b = 338$ ist daher a_{11}.

Zwischen b und c haben wir 5 Differenzen (Abstände), also benötigen wir dort 4 Zwischenwerte:

$$340 \xrightarrow[-12]{} 328 \xrightarrow[-12]{} 316 \xrightarrow[-12]{} 304 \xrightarrow[-12]{} 292 \xrightarrow[-12]{} 280$$

Damit wir c = 280 zu a_{20}.

Wir erhalten dann $a_1 = a_{11} - 10d = 388 - 10 \cdot (-12) = 388 + 120 = 508$
und $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 508 + (n-1) \cdot (-12) = 508 - 12n + 12 = 520 - 12n$

c) $b = -84$; $c = -39$; $a_{20} = 24$

$c - b = -39 + 84 = 45$ und $a_{20} - c = 24 + 39 = 63$

Der größte gemeinsame Teiler von 45 und 63 ist 9: $45 = 9 \cdot 5$ und $63 = 9 \cdot 7$.
Also haben wir zwischen b und c 5 Abstände der Größe 9 und zwischen c und a_{20} 7 Abstände der Größe 9. Wir schalten also zwischen b und c 4 Zahlen und zwischen c und a_{20} 6 Zahlen:

$$-84 \xrightarrow[+9]{} -75 \xrightarrow[+9]{} -66 \xrightarrow[+9]{} -57 \xrightarrow[+9]{} -48 \xrightarrow[+9]{} -39$$

$$-39 \xrightarrow[+9]{} -30 \xrightarrow[+9]{} -21 \xrightarrow[+9]{} -12 \xrightarrow[+9]{} -3 \xrightarrow[+9]{} 4 \xrightarrow[+9]{} 15 \xrightarrow[+9]{} 24$$

Damit wird $b = a_7$, dann von a_{20} aus zählen wir 5+7=12 Zwischenräume herunter, also 13 Zahlen !

Es folgt also $a_1 = a_7 - 6d = -84 - 7 \cdot 9 = -147$
und $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -147 + (n-1) \cdot 9 = 9n - 156$.

(5) Ist b ein Glied der gegebenen Folge ?

a) $a_n = 14n + 16$; $b = 1808$

$1808 = 14n + 16 \Rightarrow 14n = 1792 \Rightarrow n = 128$. Erg.: $b = a_{128}$.

b) $a_n = 240 - 28n$; $b = -290$

$-290 = 240 - 28n \Rightarrow 28n = 290 + 240 = 530 \Rightarrow n = 18{,}9...$
b ist also kein Glied der Folge.

c) $a_3 = 64$; $a_6 = 256$; $b = 640$

$3d = a_6 - a_3 = 256 - 64 = 192 \Rightarrow d = 64$

Aus $b = a_6 + k \cdot d \Rightarrow k = \dfrac{b - a_6}{d} = \dfrac{640 - 256}{64} = \dfrac{384}{64} = 6$ d.h. $b = a_{12}$

d) $a_{10} = 25$; $a_{14} = -25$; $b = 175$

$4d = a_{14} - a_{10} = -25 - 25 = -50 \Rightarrow d = -12{,}5$ (Fallende Folge !)

Aus $b = a_{14} + k \cdot d \Rightarrow k = \dfrac{b - a_{14}}{d} = \dfrac{175 + 25}{-12{,}5} = -\dfrac{200}{12{,}5} = -16$
Also wäre $b = a_{-2}$. Das ist nicht möglich !

b ist kein Glied der Folge.

(6) Beweise allgemein, daß eine Folge der Form $f_n = an^2 + bn + c$ keine arithmetische Folge ist.

Beweis:

Wir zeigen, daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder nicht konstant ist:

$$f_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$

$$f_n = an^2 + bn + c$$

$$f_{n+1} - f_n = \left[a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right]$$

$$f_{n+1} - f_n = \left[an^2 + 2an + a + bn + b + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right]$$

$$f_{n+1} - f_n = 2an + a + b$$

Und wie man sieht, hängt die Differenz von der Zahl n ab, bei der diese berechnet wird. Sie ist also nicht konstant. Daher ist die Folge nicht arithmetisch.

3 Arithmetische Folgen höherer Ordnung

3.1 Arithmetische Folge 2. Ordnung

Wir haben in der Aufgabe 6 der vorangegangenen Seite gesehen, daß eine Folge, die durch einen quadratischen Term berechnet wird, keine arithmetische Folge mehr ist. Aber sie hat viel Ähnlichkeit damit, was wir am nächsten Beispiel sehen werden:

BEISPIEL 1 $a_n = n^2 + 3n + 16$

$a_1 = 1 + 3 + 16 = 20$ $\qquad a_2 = 4 + 6 + 16 = 26$

$a_3 = 9 + 9 + 16 = 34$ $\qquad a_4 = 16 + 12 + 16 = 44$

$a_5 = 25 + 15 + 16 = 56$ $\qquad a_6 = 36 + 18 + 16 = 70$ usw.

Übersicht:

$$20 \xrightarrow[+6]{} 26 \xrightarrow[+8]{} 34 \xrightarrow[+10]{} 44 \xrightarrow[+12]{} 56 \xrightarrow[+14]{} 70 \xrightarrow[+16]{} \ldots$$

Erkennen Sie, daß die Differenzen eine arithmetische Folge bilden ?

$$6 \xrightarrow[2]{} 8 \xrightarrow[2]{} 10 \xrightarrow[2]{} 12 \xrightarrow[2]{} 14 \xrightarrow[2]{} 16 \xrightarrow[2]{} \ldots$$

Man führt hier folgende Begriffe:

Aus der Stammfolge	20 ; 26 , 34 ; 44 ; 56 ; 70 ; ...
Bildet man die 1. Differenzenfolge	6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; ...
Und daraus die 2. Differenzenfolge	2 ; 2 ; 2 ; 2 ; ...

Wir halten unsere Erkenntnis fest:
Bei dieser quadratischen Folge ist die erste Differenzenfolge eine arithmetische Folge, weil die 2. Differenzenfolge konstant ist.

Ist das bei jeder quadratischen Folge so ?

Die Antwort errechnen wir uns an Hand der allgemeinen quadratischen Folge:

$$f_n = an^2 + bn + c$$

Wir berechnen $f_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$ und daraus (wie in Aufgabe 6)

$$f_{n+1} - f_n = \left[a(n^2 + 2n + 1) + bn + b + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right]$$
$$f_{n+1} - f_n = \left[an^2 + 2an + a + bn + b + c\right] - \left[an^2 + bn + c\right]$$
$$f_{n+1} - f_n = 2an + a + b$$

Diese 1. Differenzenfolge nenne ich $d_n = (2a) \cdot n + (a+b)$.
Man erkennt, daß dies eine lineare Folge, also eine arithmetische Folge ist.
Also ist die zweite Differenzenfolge konstant, und zwar lautet sie konstant 2a 2a 2a ...

ANWENDUNG – BEISPIEL 2

Gegeben ist die Folge a_n durch $a_1 = -1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 7$ und $a_4 = 17$
Stelle einen möglichen Funktionsterm für diese Folge auf und gib a_5 an.

LÖSUNG

Man erkennt auf den ersten Blick, daß keine arithmetische Folge vorliegt, da die Abstände (Differenzen) nicht konstant sind. Aber (in diesem Abschnitt ist es naheliegend) wir können ja einmal die 1. und 2. Differenzenfolgen ansehen:

1. Differenzenfolge: 2 ; 6 ; 10 ; ...
2. Differenzenfolge: 4 ; 4 ; ...

Auf Grund der wenigen gegebenen Glieder der Folge müssen wir sagen: Die 2. Differenzenfolge *könnte* konstant sein, d.h. die 1. Differenzenfolge ist arithmetisch.

Nun haben wir nur gezeigt, daß bei dieser quadratischen Folge die Differenzenfolge arithmetisch ist, aber wir haben die Umkehrung nicht bewiesen. Und die würde lauten: Wenn die 1. Differenzenfolge arithmetisch ist, dann ist die Stammfolge quadratisch.

Wir gehen dennoch von der Annahme aus, die gegebene Folge ist quadratisch und erstellen unter dieser Annahme den Funktionsterm. Dann können wir den Beweis schnell vollenden. Jetzt die Rechnung:

ANSATZ: $a_n = an^2 + bn + c$.

Zur Berechnung der drei unbekannten Koeffizienten a, b und c benötigen wir drei (unabhängige) Gleichungen. Diese erstellt man unter Verwendung der gegebenen Glieder a_1 bis a_3:

n = 1: $a_1 = a + b + c = -1$ (1

n = 2: $a_2 = 4a + 2b + c = 1$ (2)

n = 3: $a_3 = 9a + 3b + c = 7$ (3)

(2) – (1) : $3a + b = 2$ (4)
(3) – (2) : $5a + b = 6$ (5)

(5) – (4) : $2a = 4 \Rightarrow a = 2$
In (4): $b = 2 - 3a = 2 - 6 = -4$
In (1): $c = -1 - a - b = -1 - 2 + 4 = 1$

ergibt $a_n = 2n^2 - 4n + 1$.
Nun wissen wir erst, daß diese Formel a_1, a_2 und a_3 richtig gerechnet.
Wir machen noch die Probe für $a_4 = 32 - 16 + 1 = 17$! und berechnen noch $a_5 = 50 - 20 + 1 = 31$.

3.2 Arithmetische Folge 3. Ordnung

Man kann erahnen, wie es mit Folgen aussehen wird, die einen Funktionsterm 3. Grades zur Berechnung verwenden.

BEISPIEL 3:

$$f_n = n^3 + n^2 - 5n + 4$$

$f_1 = 1+1-5+4 = 1;$ $\qquad$ $f_2 = 8+4-10+4 = 6$

$f_3 = 27+9-15+4 = 25$ $\qquad$ $f_4 = 64+16-20+4 = 64$

$f_5 = 125+25-25+4 = 129$ $\qquad$ $f_6 = 216+36-30+4 = 226$ usw.

Stammfolge:	1 ; 6 ; 25 ; 64 ; 129 ; 226 ; ...
1. Differenzenfolge:	5 ; 19 ; 39 ; 65 ; 97 ; ....
2. Differenzenfolge:	14 ; 20 ; 26 ; 32 ; ....
3. Differenzenfolge:	6 ; 6 ; 6 ; .,..

BEOBACHTUNG: Bei einer Folge 3. Ordnung ist die 3. Differenzenfolge konstant, also ist die 2. Differenzenfolge arithmetisch. (Folglich sollte die 2. Differenzenfolge quadratisch sein !!).

Dies nützen wir aus, um umgekehrt Funktionsterme für Folgen aufzustellen, wenn wir herausgefunden haben, daß ihre 2. Differenzenfolge arithmetisch ist.

BEISPIEL 4:

Stelle einen Funktionsterm für diese Stammfolge auf und berechne a_6 .

Stammfolge :	1 ; 0 ; -9 ; -32 ; -75 ; ...
1. Differenzenfolge :	-1 ; -9 ; -23 ; -43 ; ...
2. Differenzenfolge :	-8 ; -14 ; -20 ; ....
3. Differenzenfolge :	- 6 ; - 6 ; ....

Da die 3. Differenzenfolge konstant ist, ***könnte*** die Stammfolge eine arithmetische Folge 3. Ordnung sein. Daher beginnen wir mit dem Ansatz:

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d \quad \text{und stellen 4 Gleichungen auf:}$$

n=1: $\quad a_1 = a + b + c + d = 1 \qquad (1)$

n=2: $\quad a_2 = 8a + 4b + 2c + d = 0 \qquad (2)$

n=3: $\quad a_3 = 27a + 9b + 3c + d = -9 \qquad (3)$

n=4 $\quad a_4 = 64a + 16b + 4c + d = -32 \qquad (4)$

(2) – (1): $\quad 7a + 3b + c = -1 \qquad (5)$

(3) – (2): $\quad 19a + 5b + c = -9 \qquad (6)$

(4) – (3): $\quad 37a + 7b + c = -23 \qquad (7)$

(6) – (5): $12a + 2b = -8$ (8)
(7) – (6): $18a + 2b = -14$ (9)

(9) – (8) $6a = -6 \Rightarrow a = -1$

In (8): $-12 + 2b = -8 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$

In (5): $-7 + 6 + c = -1 \Rightarrow c = 0$

In (1): $-1 + 2 + 0 + d = 1 \Rightarrow d = 0$

Ergebnis: $a_n = -n^3 + 2n^2$.

ACHTUNG: Damit kann man a_1 bis a_4 berechnen. Zur Kontrolle der vollen Wirksamkeit müssen wir noch a_5 überprüfen:

$$a_5 = -5^3 + 2 \cdot 5^2 = -125 + 50 = -75 \quad \text{richtig !}$$

Gefragt war noch $a_6 = -6^3 + 2 \cdot 6^2 = -216 + 72 = -144$.

3.3 Aufgaben

(1) Berechne 5 Glieder dieser Folgen und zeige daß die 2. bzw. 3. Differenzenfolge konstant ist.

(a) $a_n = n^2 - 8n + 12$ (b) $a_n = -n^2 + 3n$

(c) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n + 1$ (d) $a_n = \frac{1}{3}n^3$

(e) $a_n = -n^3 + 2n + 20$ (f) $a_n = 4n^3 - 10n^2 + 3n - 300$

(2) Zeige, daß eine Differenzenfolge konstant ist und berechne darauf hin den Funktionsterm für die Folge.

(a) 21 ; 44 ; 69 ; 96 ; ...

(b) 19 ; 12 ; -1 ; -20 ; -45 ; ...

(c) 30 ; 29 ; 16 ; -15 ; -70 ; ...

(d) 2 ; 0 ; 26 ; 104 ; 258 ; ...

(3) Zeige durch Berechnung von 7 Gliedern, daß die 4. Differenzenfolge bei

$a_n = n^4 - n^2$ konstant ist.

Lösungen zu 3.3

(1) Berechne 5 Glieder dieser Folgen und zeige daß die 2. bzw. 3. Differenzenfolge konstant ist.

(a) $a_n = n^2 - 8n + 12$

Stammfolge:	5 ; 0 ; -3 ; -4 ; -3	
1. Differenzenfolge:	-5 ; -3 ; -1 ; 1	
2. Differenzenfolge:	2 ; 2 ; 2	(konstant!)

(b) $a_n = -n^2 + 3n$

Stammfolge:	2 ; 2 ; 0 ; -4 ; -10	
1. Differenzenfolge:	0 ; -2 ; -4 ; -6	
2. Differenzenfolge:	-2 ; -2 ; -2	(konstant!)

(c) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - n + 1$

Stammfolge:	$\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{5}{2}$; 5 ; $\frac{17}{2}$	
1. Differenzenfolge:	$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$	
2. Differenzenfolge:	1 ; 1 ; 1	(konstant!)

(d) $a_n = \frac{1}{3}n^3$

Stammfolge:	$\frac{1}{3}$; $\frac{8}{3}$; 9 ; $\frac{64}{3}$; $\frac{125}{3}$	
1. Differenzenfolge:	$\frac{7}{3}$; $\frac{19}{3}$; $\frac{37}{3}$; $\frac{61}{3}$	
2. Differenzenfolge:	4 ; 6 ; 8	
3. Differenzenfolge:	2 ; 2 ;	(konstant!)

(e) $a_n = -n^3 + 2n + 20$

Stammfolge:	21 ; 16 ; -1 ; -36 ; -95	
1. Differenzenfolge:	-5 ; -17 ; -35 ; -59	
2. Differenzenfolge:	-12 ; -18 ; -24	
3. Differenzenfolge:	-6 ; -6 ;	(konstant!)

(f) $a_n = 4n^3 - 10n^2 + 3n - 300$

Stammfolge:	-303 ; -302 ; -273 ; -192 ; -35	
1. Differenzenfolge:	1 ; 29 ; 81 ; 157	
2. Differenzenfolge:	28 ; 52 ; 76	
3. Differenzenfolge:	24 ; 24	(konstant!)

(2) Zeige, daß eine Differenzenfolge konstant ist und berechne darauf hin den Funktionsterm für die Folge.

a) Stammfolge: 21 ; 44 ; 69 ; 96 ; ...
1. Differenzenfolge: 23 ; 25 ; 27 ; ...
2. Differenzenfolge: 2 ; 2 ; .... (konstant)

Weil die 2. Differenzenfolge konstant ist, kann ein quadratischer Funktionsterm vorliegen, also machen wir diesen Ansatz:
$a_n = an^2 + bn + c$ und bilden mit a_1 , a_2 und a_3 3 Gleichungen:

n = 1: $a_1 = a + b + c = 21$ (1)
n = 2: $a_2 = 4a + 2b + c = 44$ (2)
n = 3: $a_3 = 9a + 3b + c = 69$ (3)

(2) – (1): $3a + b = 23$ (4)
(3) – (2): $5a + b = 25$ (5)

(5) – (4): $2a = 2 \Rightarrow a = 1$
in (4): $b = 23 - 3 = 20$
in (1): $c = 21 - 1 - 20 = 0$

Ergebnis: $a_n = n^2 + 20 \cdot n$
Probe: $a_4 = 16 + 80 = 96$
Neuberechnung: $a_5 = 25 + 5 \cdot 20 = 125$.

(b) Stammfolge: 19 ; 12 ; -1 ; -20 ; -45 ; ...
1. Differenzenfolge: -7 ; -13 ; -19 ; -25...
2. Differenzenfolge: -6 ; -6 ; -6 ; (konstant)

Weil die 2. Differenzenfolge konstant ist, kann ein quadratischer Funktionsterm vorliegen, also machen wir diesen Ansatz:
$a_n = an^2 + bn + c$ und bilden mit a_1 , a_2 und a_3 3 Gleichungen:

n = 1: $a_1 = a + b + c = 19$ (1)
n = 2: $a_2 = 4a + 2b + c = 12$ (2)
n = 3: $a_3 = 9a + 3b + c = -1$ (3)

(2) – (1): $3a + b = -7$ (4)
(3) – (2): $5a + b = -13$ (5)

(5) – (4): $2a = -6 \Rightarrow a = -3$
in (4): $b = -7 - 3a = -7 + 9 = 2$
in (1): $c = 19 - a - b = 19 + 3 - 2 = 20$
Ergebnis: $a_n = -3n^2 + 2n + 20$

Probe für $a_4 = -48 + 8 + 29 = -20$
Probe für $a_5 = -75 + 10 + 20 = -45$.

(c) Stammfolge: 30 ; 29 ; 16 ; -15 ; -70 ; ...

1. Differenzenfolge: -1 ; -13 ; -31 ; -55
2. Differenzenfolge: -12 ; - 18 ; -24
3. Differenzenfolge: -6 ; -6 ; (konstant!)

Weil die 3. Differenzenfolge konstant ist, kann ein Funktionsterm 3. Ordnung vorliegen, also machen wir diesen Ansatz:

$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ und bilden mit a_1 , a_2 , a_3 und a_4 vier Gleichungen.

n=1: $a_1 = a + b + c + d = 30$ (1)
n=2: $a_2 = 8a + 4b + 2c + d = 29$ (2)
n=3: $a_3 = 27a + 9b + 3c + d = 16$ (3)
n=4 $a_4 = 64a + 16b + 4c + d = -15$ (4)

(2) – (1): $7a + 3b + c = -1$ (5)
(3) – (2): $19a + 5b + c = -13$ (6)
(4) – (3): $37a + 7b + c = -31$ (7)

(6) – (5): $12a + 2b = -12$ (8)
(7) – (6): $18a + 2b = -18$ (9)
(9) – (8) $6a = -6 \Rightarrow a = -1$

in (8): $2b = -12 - 12a = -12 + 12 = 0 \Rightarrow b = 0$
in (5): $c = -1 - 7a - 3b = -1 + 7 = 6$
in (1): $d = 30 - a - b - c = 30 + 1 - 6 = 25$

Ergebnis: $a_n = -n^3 + 6n + +25$

Probe: $a_5 = -125 + 30 + 25 = -70$ stimmt !

(d) Stammfolge: 2 ; 0 ; 26 ; 104 ; 258 ; ...

1. Differenzenfolge: -2 ; 26 ; 78 ; 154
2. Differenzenfolge: 28 ; 52 ; 76
3. Differenzenfolge: 24 ; 24 ; (konstant!)

Weil die 3. Differenzenfolge konstant ist, kann ein Funktionsterm 3. Ordnung vorliegen, also machen wir diesen Ansatz:

$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ und bilden mit a_1 , a_2 , a_3 und a_4 vier Gleichungen.

n=1: $a_1 = a + b + c + d = 2$ (1)
n=2: $a_2 = 8a + 4b + 2c + d = 0$ (2)
n=3: $a_3 = 27a + 9b + 3c + d = 26$ (3)
n=4 $a_4 = 64a + 16b + 4c + d = 104$ (4)

(2) – (1):	$7a+3b+c=-2$	(5)
(3) – (2):	$19a+5b+c=26$	(6)
(4) – (3):	$37a+7b+c=78$	(7)
(6) – (5):	$12a+2b=28$	(8)
(7) – (6):	$18a+2b=52$	(9)
(9) – (8)	$6a=24 \Rightarrow a=4$	
in (8)	$2b=28-12a=28-48=-20 \Rightarrow b=-10$	
in (5)	$c=-2-7a-3b=-2-28+30=0$	
in (1)	$d=2-a-b-c=2-4+10=8$	
Ergebnis:	$a_n=4n^3-10n^2+8$	
Probe:	$a_5=500-250+8=258$.	

(3) Zeige durch Berechnung von 7 Gliedern, daß die 4. Differenzenfolge bei $a_n = n^4 - n^2$ konstant ist.

LÖSUNG:

$a_1=1-1=0$

$a_2=16-4=12$

$a_3=81-9=72$

$a_4=256-25=231$

$a_5=625-25=600$

$a_6=1296-36=1260$

$a^7=2401-49=2352$

Stammfolge:	0 ;	12 ;	72 ;	240 ;	600 ;	1260 ;	2352 ..
1. Differenzenfolge:		12 ;	60 ;	168 ;	360 ;	660 ;	1092
2. Differenzenfolge:			48 ;	108 ;	192 ;	300 ;	432
3. Differenzenfolge:				60 ;	84 ;	108 ;	132
4. Differenzenfolge:					24 ;	24 ;	24 ...