Berechnung von Flächen unter Kurven

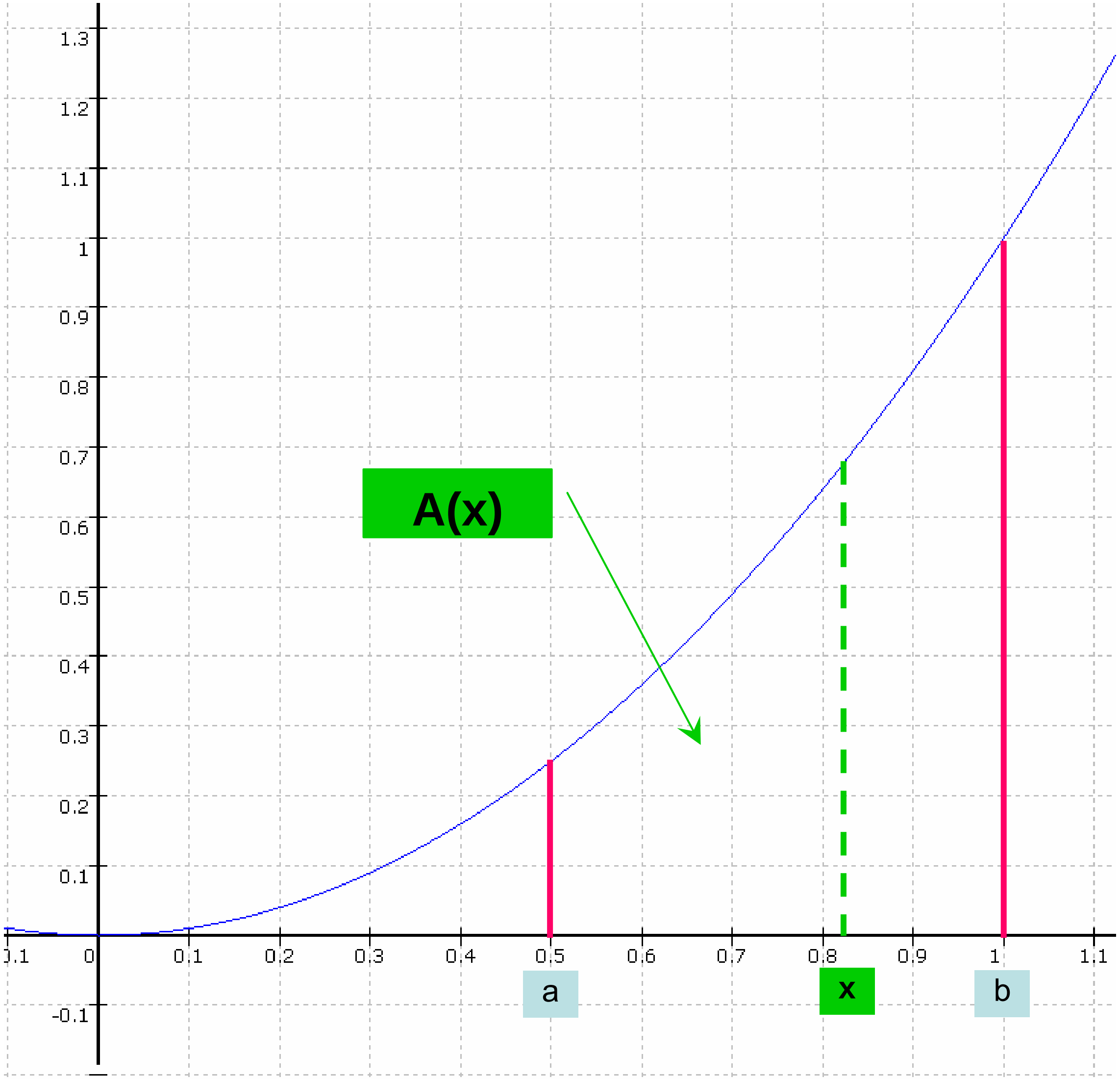
Es soll die Fläche unter einer beliebigen (stetigen) Kurve berechnet werden.

Dazu betrachten wir die (sog.) Flächenfunktion, mit der die zu berechnende Fläche quasi angenähert wird.

Aber die Untersuchung dieser Flächenfunktion liefert uns auch ein exaktes Verfahren zur Berechnung von Flächeninhalten unter Kurven.

Zur Wiederholung: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$

Die Flächenfunktion

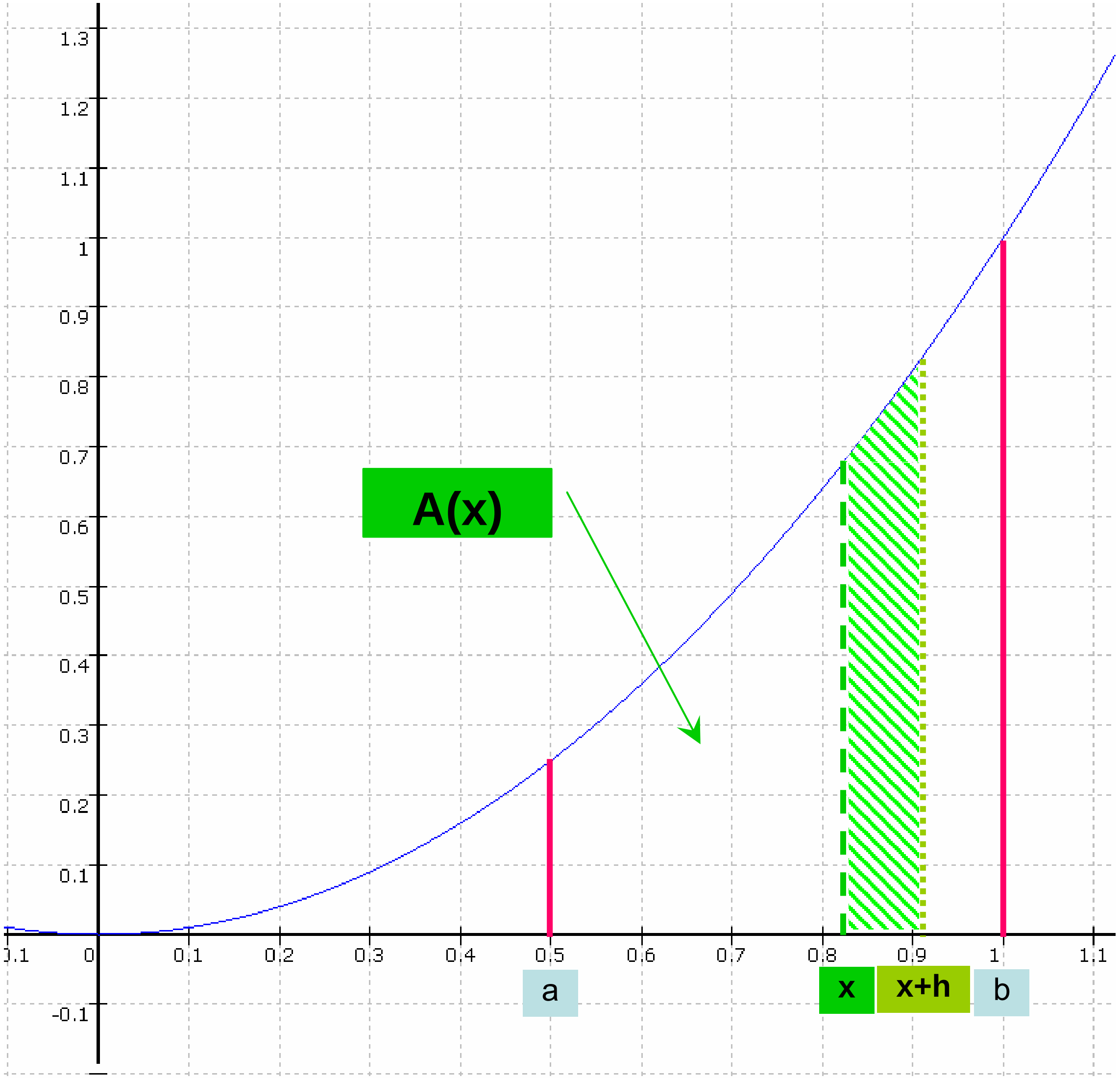


Gegeben sei $f(x)=x^2$.
Gesucht ist die Fläche **A** unter der Kurve von der unteren Grenze $a=0,5$ bis zur oberen Grenze $b=1$.

Um A zu berechnen, untersuchen wir zunächst die Fläche von a bis zu einem beliebigen x ($a \leq x \leq b$).

Für $x=b$ erhalten wir unsere gesuchte Fläche **A**.

Die Flächenfunktion

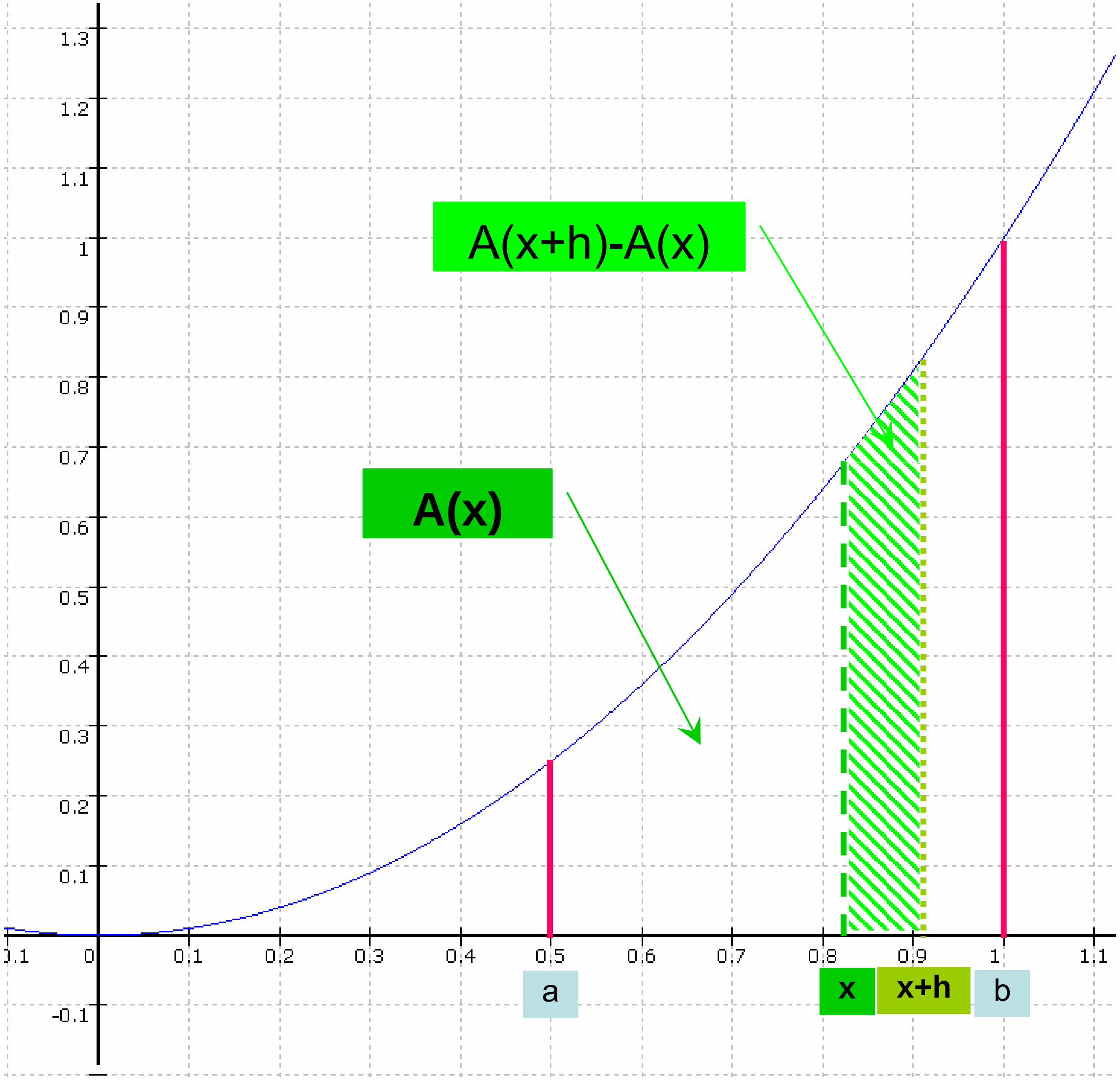


Wie ändert sich nun die Flächenfunktion A(x), wenn wir x etwas ändern, etwa auf x+h ?

Vergrößern wir x um h auf x+h, so ändert sich die Flächenfunktion von A(x) auf A(x+h).

Wo in dem Bild findet man die Differenz A(x+h)-A(x) ?

Die Flächenfunktion



Untersuchen wir nun diesen Streifen von x bis x+h etwas genauer:

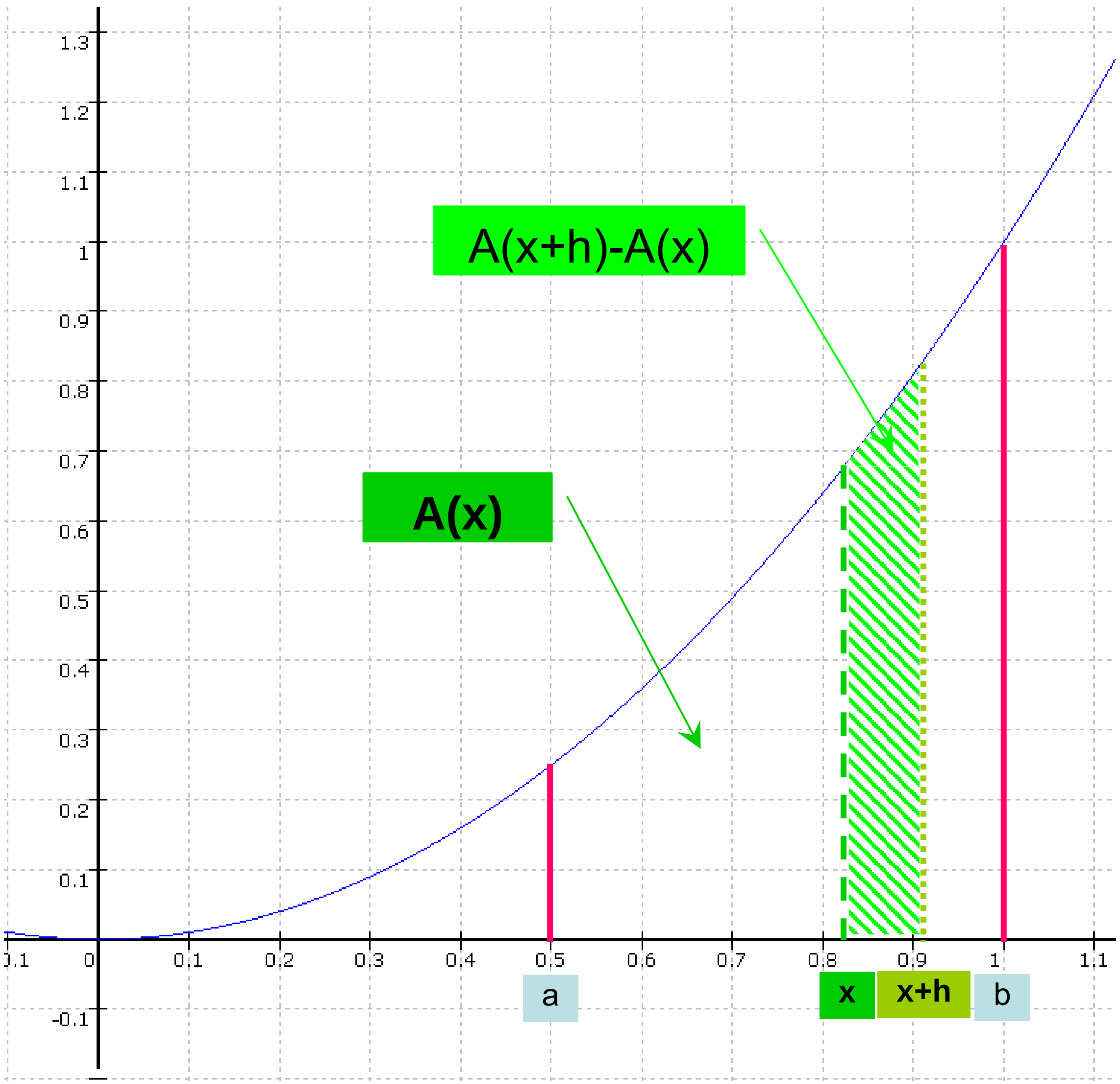
Für seeeehr kleine h wird der Streifen seeeehr schmal, d.h., die Funktionswerte in dem Intervall [x,x+h] sind ungefähr gleich.

Dann gilt:

$$A(x+h)-A(x) \approx h \cdot f(x)$$

WARUM ???

Die Flächenfunktion



$$A(x+h)-A(x) \approx h \cdot f(x)$$

Wir dividieren beide Seiten durch h

→ **dürfen wir das** ?

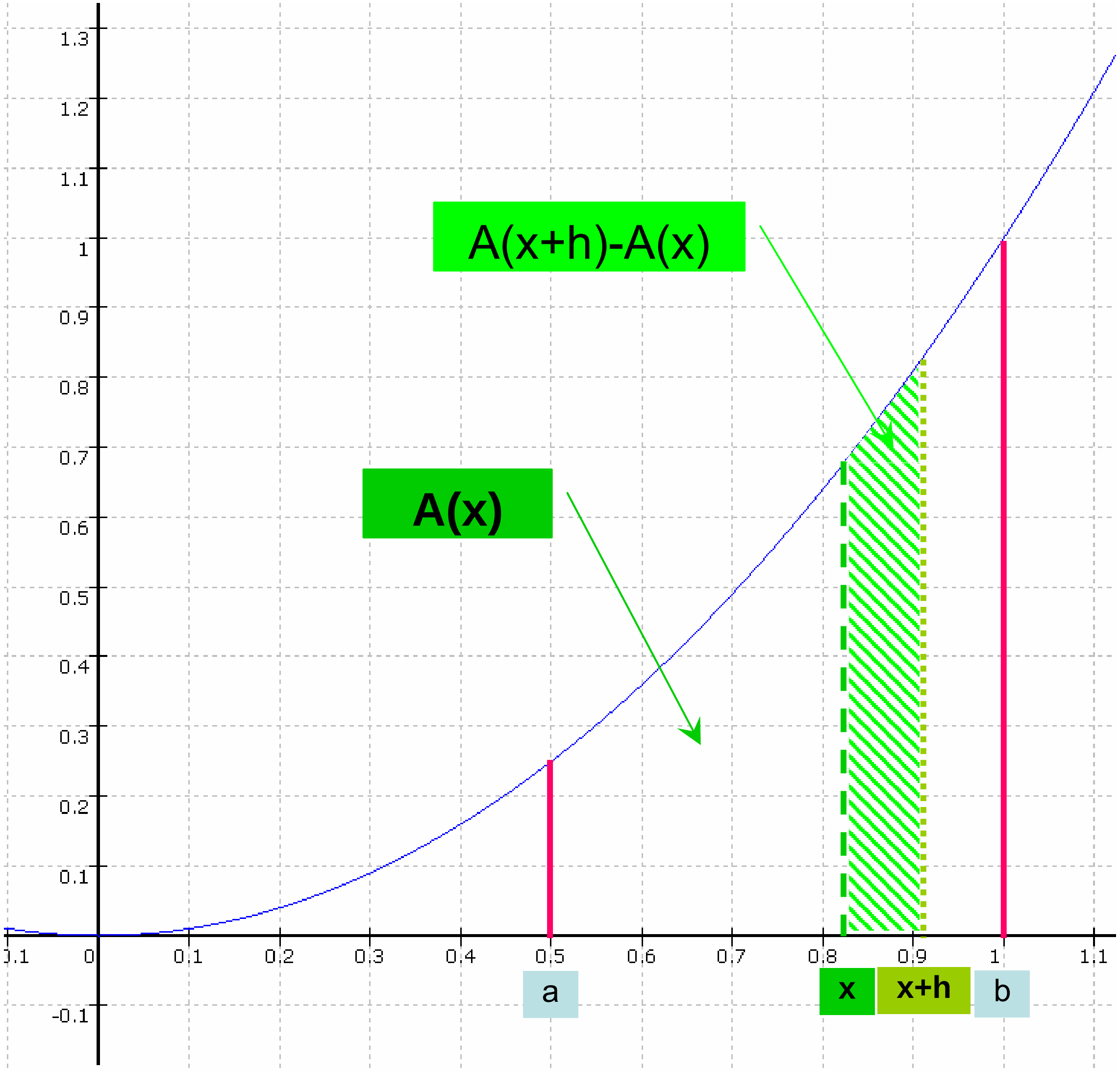
JA, denn h ist zwar seeeehr klein, aber nicht 0

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x)$$

Je kleiner h ist, desto genauer ist diese Näherungsformel für den Flächeninhalt A(x)

Also bilden wir den Grenzwert für h→0 und erhalten eine exakte Formel

Die Flächenfunktion



$$A(x+h)-A(x) \approx h \cdot f(x)$$

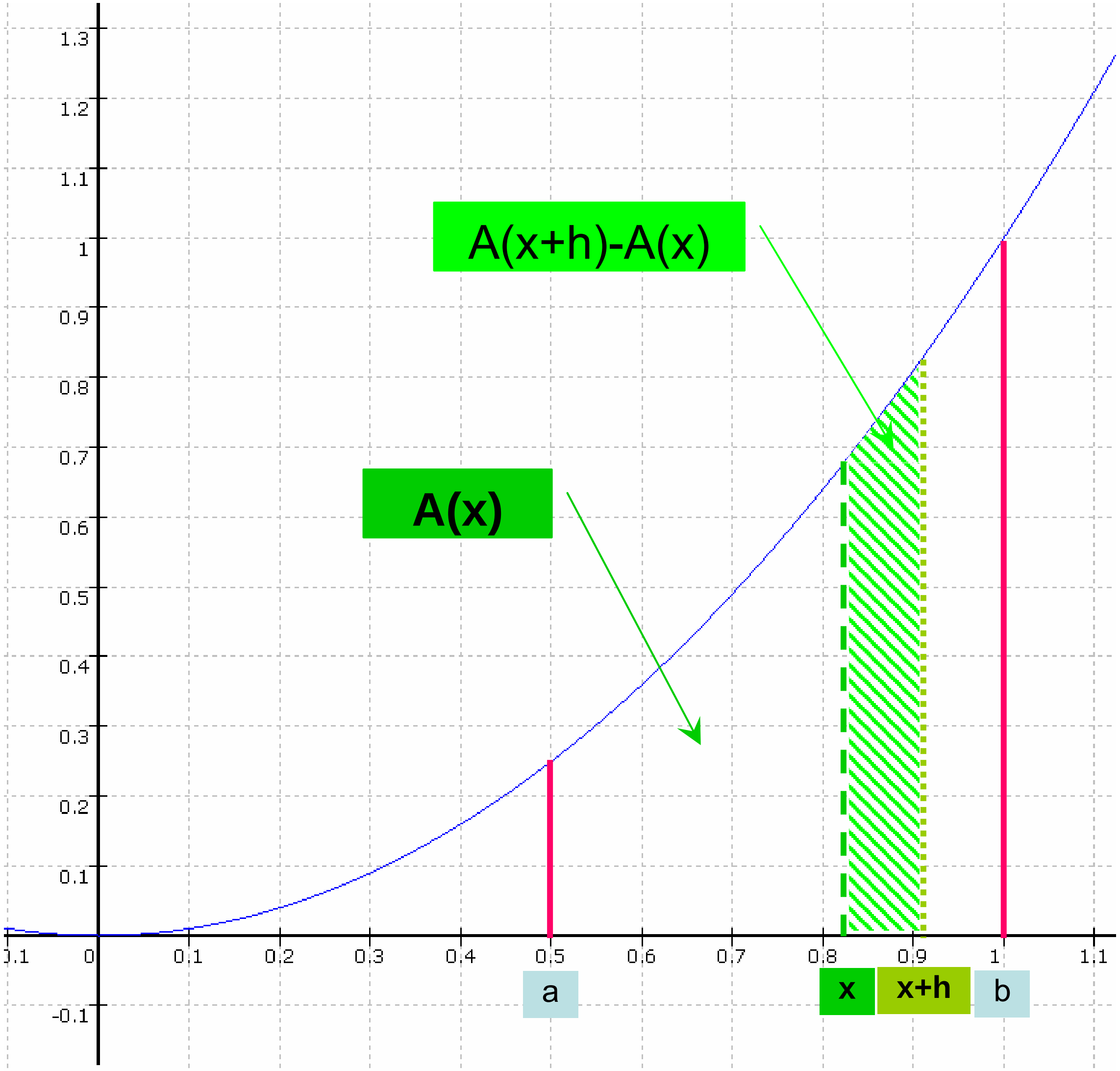
$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x)$$

$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$

Was bedeutet nun diese Gleichung ?
Was hat sie mit unserem ursprünglichen Problem zu tun ?

Die Flächenfunktion



$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$

- Wir w(s)ollten die Fläche unter der Kurve im Intervall [a,b] berechnen.
- A(x) ist die Flächenfunktion, also die Funktion, die angibt, wie groß der Flächeninhalt unter einer Kurve von a bis zu einem gewissen $x \leq b$ ist.
- Die obige Formel sagt nun, dass wir dazu lediglich eine Funktion brauchen, deren Ableitung f(x) ist. Eine solche Funktion nennt man

Stammfunktion
von f(x)

Stammfunktion

- Um unsere gesuchte Fläche berechnen zu können, müssen wir uns zunächst mit Stammfunktionen und deren Gesetzmäßigkeiten befassen:
- Die gegebene Funktion war $f(x)=x^2$
- Wir brauchen eine Funktion, deren Ableitung x^2 ist – eben eine Stammfunktion von f(x)

Def.: F(x) heißt Stammfunktion von f(x) genau dann, wenn F´(x)=f(x) ist.

- Bezeichnung:
  - Geg.: f(x)
  - Stammfunktion: F(x) → F´(x)=f(x)
  - Man schreibt auch : $F(x) = \int f(x)dx$
  - Sprich: unbestimmtes Integral über f(x) dx
- Das Finden einer Stammfunktion ist also
  - das Lösen des unbestimmten Integrals über f(x)
  - die Umkehrung des Differenzierens

Stammfunktion

1. $\int x\,dx=$
2. $\int x^2 dx=$
3. $\int x^3 dx=$
4. $\int x^n dx=$
5. $\int (x^2-x)dx=$
6. $\int 2dx=$
7. $\int (x^3-x^2-1)dx=$

Regeln:

Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), dann ist auch F(x)+c (c) eine Stammfunktion von f(x)

→ zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante

→ zu jeder Funktion gibt es unendlich viele Stammfunktionen

→ hat man eine, dann hat man alle

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad (n, c \in \Re)$$

$$\int a\,dx = ax + c \quad (a, c \in \Re)$$

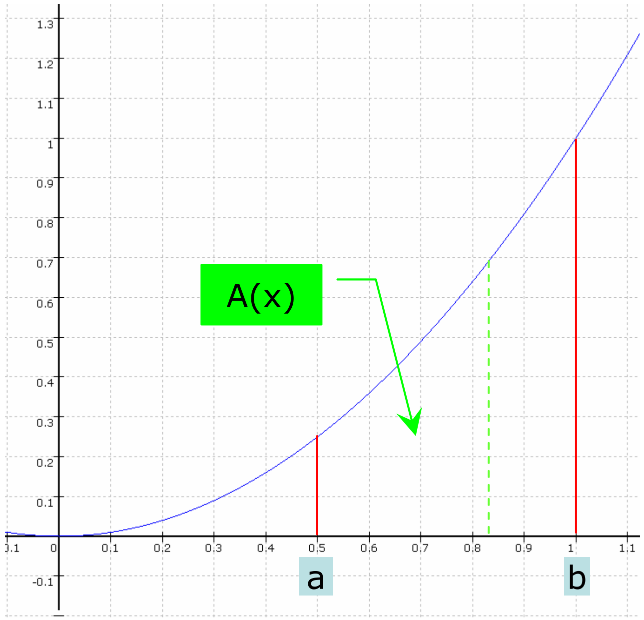
mit $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ hat man eine Stammfunktion

mit $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 - 132$ hat man auch eine Stammfunktion

mit $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ hat man alle Stammfunktionen

Was ist mit $\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx$?

Flächenberechnung



Gegeben sei $f(x)=x^2$.
Gesucht ist die Fläche **A** unter der Kurve von der unteren Grenze $a=0{,}5$ bis zur oberen Grenze $b=1$.

Wie lässt sich die Aufgabe mit den inzwischen gewonnenen Erkenntnissen lösen ?

Wir wissen:

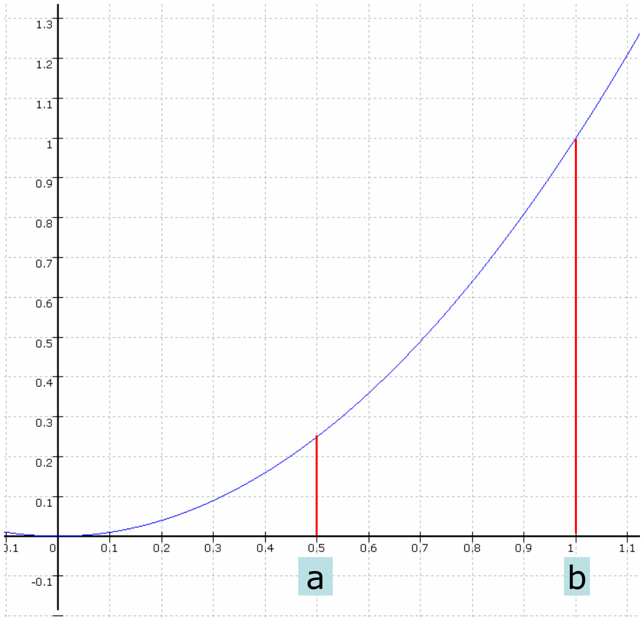
- ✓ $A'(x)=f(x) \rightarrow A(x)$ ist eine Stammfunktion
- ✓ $A(a)=0$
- ✓ $A(b)$ ist die gesuchte Fläche

Ist nun $F(x)$ eine andere Stammfunktion von $f(x)$, dann folgt:

- $A(x)=F(x)+c$; zwei Stammfunktionen unterscheiden sich um eine Konstante
- $A(a)=F(a)+c$ und mit $A(a)=0$ folgt $c=-F(a)$
- $A(b)=F(b)+c=F(b)-F(a)$

Für die Berechnung einer Fläche unter dem Graphen einer Funktion f im Intervall [a,b] müssen wir lediglich irgendeine Stammfunktion von f kennen und die Differenz ihrer Werte an den Stellen b und a bilden.

Flächenberechnung

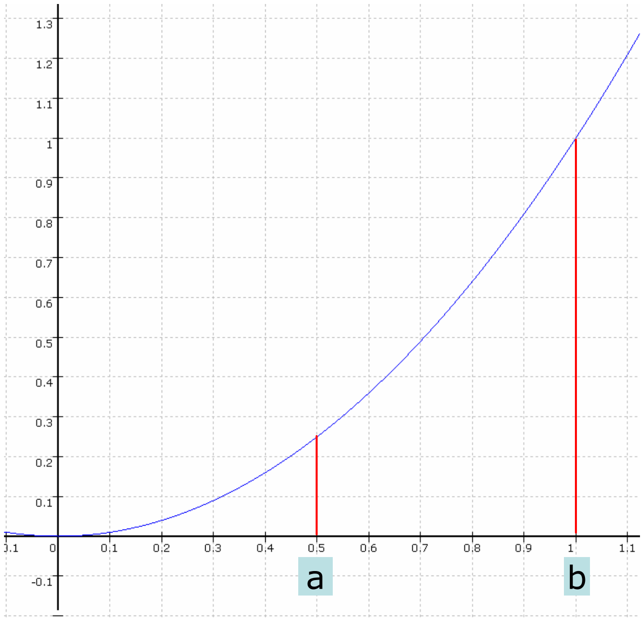


Gegeben sei $f(x)=x^2$.
Gesucht ist die Fläche **A** unter der Kurve von der unteren Grenze a=0,5 bis zur oberen Grenze b=1.

$$\left.\begin{aligned} F(x) = \tfrac{1}{3}x^3 &\rightarrow F(b) = F(1) = \tfrac{1}{3} \\ &\rightarrow F(a) = F(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{24} \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{8-1}{24} = \frac{7}{24}$$

Schreibweise

Das bestimmte Integral



$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ mit } F'(x) = f(x)$$

Für unsere Aufgabe ergibt sich somit:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$$

In unserem Beispiel sind diese $\frac{7}{24}$ der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $f(x) = x^2$ im Intervall $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Neue Fragen:

- ¿ Ist die mit dem bestimmten Integral berechnete Zahl immer ein Flächeninhalt ?
- ¿ Was ist, wenn der Graph ganz oder teilweise unter der Abszissenachse liegt ?
- ¿ Wie muss dann bei der Flächenberechnung vorgegangen werden ?

Ihr werdet sehen: „Berechne das bestimmte Integral" und „Berechne den Flächeninhalt" **können** verschiedene Aufgaben sein.