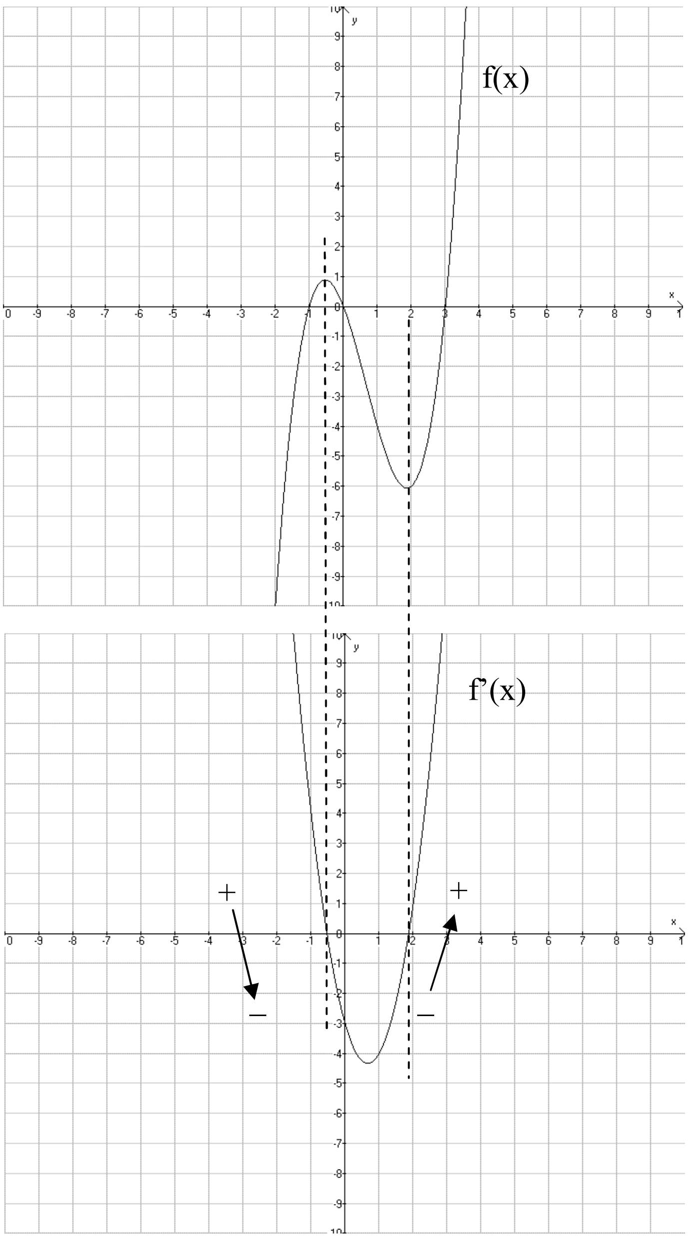
2.3.3. Hinreichende Kriterien für Extremstellen (Unterscheidungsmerkmale für HP/TP)

(1) Vorzeichenwechselkriterium



Gegeben ist eine Funktion f(x). Daraus soll die Funktion f'(x) skizziert werden.

- Die Extremwerte von f(x) sind die Nullstellen der Funktion f'(x)
- Hat die Funktion f(x) an einer Stelle x einen positiven Anstieg, so hat f'(x) an der Stelle x positive Funktionswerte.
- Hat die Funktion f(x) an einer Stelle x einen negativen Anstieg, so hat f'(x) an der Stelle x negative Funktionswerte.

An der Zeichnung erkennt man:

- Hat f(x) an einer Stelle x einen Hochpunkt, dann geht f'(x) an der Stelle x von positiven zu negativen Funktionswerten über ((+ / –) - Vorzeichenwechsel).
- Hat f(x) an einer Stelle x einen Tiefpunkt, dann geht f'(x) an der Stelle x von negativen zu positiven Funktionswerten über ((- / +) - Vorzeichenwechsel).

SATZ: (VORZEICHENWECHSELKRITERIUM)

Die Funktion f sei in einer Umgebung U der Stelle x_e differenzierbar und es gilt f'(x) = 0.

Wenn f' an der Stelle x_e einen

(+ / –) – Vorzeichenwechsel	|	**(– / +) – Vorzeichenwechsel**

hat, dann liegt an x_e ein

Hochpunkt	|	**Tiefpunkt**

vor.

(2) Kriterium der 2. Ableitung

- Die Funktion f hat an der Stelle x einen Hochpunkt.
- Dann hat die Funktion f'(x) an der Stelle x eine Nullstelle und einen (+ / –) – Vorzeichenwechsel, also einen negativen Anstieg.
- Somit hat die Funktion f''(x) an der Stelle x negative Funktionswerte.

- Die Funktion f hat an der Stelle x einen Tiefpunkt.
- Dann hat die Funktion f'(x) an der Stelle x eine Nullstelle und einen (– / +) – Vorzeichenwechsel, also einen positiven Anstieg.
- Somit hat die Funktion f''(x) an der Stelle x positive Funktionswerte.

SATZ: (KRITERIUM DER 2. ABLEITUNG)
Die Funktion f sei an einer Stelle x_e zweimal differenzierbar.
Wenn $f'(x_e) = 0$ und zugleich

$$\begin{Bmatrix} f''(x_e) < 0 \\ f''(x_e) > 0 \end{Bmatrix}$$

gelten, dann hat der Graph von f an der Stelle x_e einen relativen

$$\begin{Bmatrix} \textit{Hochpunkt} \\ \textit{Tiefpunkt} \end{Bmatrix}.$$

Beispiel:
$f(x) = x^2 - 4x + 3$
notwendiges Kriterium:
$f'(x) = 2x - 4$
$0 = 2x - 4$
$x = 2$
hinreichendes Kriterium
$f''(x) = 2$
$f''(2) = 2 > 0 \rightarrow$ TP o. Min.
Berechnung des Punktes:
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3$
$f(2) = -1$
<u>HP (2; –1)</u>