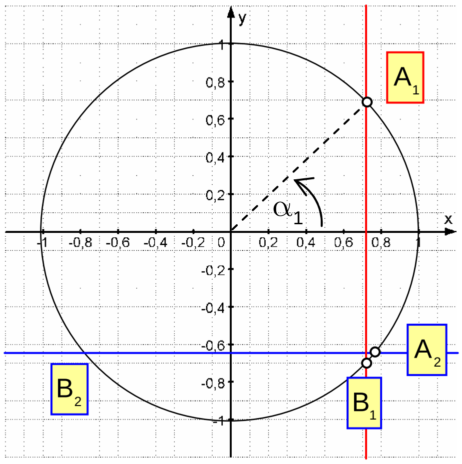
Lösungsteil

Aufgabe 11

Auf dem **Einheitskreis** liegen diese Punkte $A\left(0{,}72 \mid y_A\right)$ und $B\left(x_B \mid -0{,}65\right)$.
Berechne die fehlenden Koordinaten mit Formeln und schreibe diese an.

Beschreibe ausführlich, was diese Koordinaten mit Sinus uns Kosinus zu tun haben.

Lösung



Der Einheitskreis hat die Gleichung

$x^2 + y^2 = 1$. Durch Einsetzen einer Koordinate folgt daraus die andere:

$$x_A = 0{,}72 \;\Rightarrow\; y_A = \pm\sqrt{1-x^2} \approx \pm 0{,}69$$

Ergebnis:

Die Gerade x = 0,72 schneidet den Kreis in den zwei Punkten $A_1\left(0{,}72 \mid 0{,}69\right)$ und $A_2\left(0{,}72 \mid -0{,}69\right)$

$$y_B = -0{,}65 \;\Rightarrow\; x_B = \pm\sqrt{1-y^2} \approx \pm 0{,}76$$

Ergebnis:

Die Gerade y = 0,72 schneidet den Kreis in den zwei Punkten $B_1\left(0{,}76 \mid -0{,}65\right)$ und $B_2\left(-0{,}76 \mid -0{,}65\right)$.

Am Einheitskreis stellt die y-Koordinate eines Punktes den Sinus des Steigungswinkels der Strecke OA dar, und die x-Koordinate den Kosinus.

So bedeutet $x_A = 0{,}72$ $\cos\alpha = 0{,}72$: $\alpha_1 \approx 43{,}9$ bzw. $\alpha_2 = 360^\circ - \alpha_1 \approx 316{,}1^\circ$

und $y_B = -0{,}67$ heißt $\sin\beta = -0{,}67$:

Aus $\sin\beta = 0{,}67$ folgt im 1. Feld $\beta' \approx 42{,}1^\circ$. Die Sinuswerte sind im 3. und 4. Feld negativ. Also folgt aus $\sin\beta = -0{,}67$: $\beta_2 = 180^\circ + \beta' \approx 222{,}1^\circ$ und
$\beta_2 \approx 360^\circ - 42{,}1^\circ = 317{,}9^\circ$

Aufgabe 12

Zeichne einen Einheitskreis (Längeneinheit 4 cm). Trage darauf die Punkte ein, zu denen die folgenden Drehwinkel gehören (beginnend im Punkt $R(1|0)$.
Berechne die Koordinaten dieser Punkte.(exakte Werte, kein TR).

a) A bei $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ b) B bei $\beta = \frac{13}{4}\pi$ c) C bei $\gamma = -\frac{7}{3}\pi$

Lösung

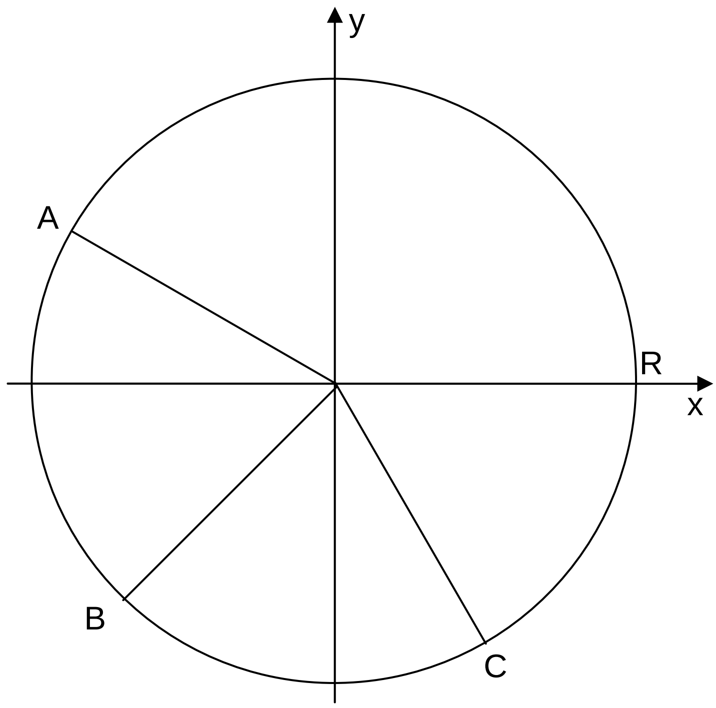
Punkt A

$\frac{5}{6}\pi \mathrel{\hat{=}} 180^o - 30^o = 150^o$

$\sin 150^o = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$,

$\cos 150^o = -\cos 30^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$A\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$



Punkt B

$\frac{13}{4}\pi = 2\pi + \frac{5}{4}\pi \mathrel{\hat{=}} 180^0 + 45^o = 225^o$

$\sin 225^o = -\sin 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 225^o = -\cos 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$B\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \,\middle|\, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

Punkt C

$-\frac{7}{3}\pi = -2\pi - \frac{1}{3}\pi \mathrel{\hat{=}} -60^o \mathrel{\hat{=}} 300^o$

$\sin 300^o = -\sin 60^o = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 300^o = \cos 60^o = \frac{1}{2}$

$C\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Aufgabe 14

Gib die **zugehörigen Winkel** aus dem Intervall $0^0 \le \alpha < 360^o$ an:

a) $\sin\alpha = 0{,}24$ b) $\cos\alpha = -0{,}83$ c) $\tan\alpha = 3{,}6$

Lösung

a) $\sin\alpha = 0{,}24$:
im 1. Feld: $\alpha_1 \approx 13{,}9^o$
im 2. Feld: $\alpha_2 = 180^o - \alpha_1 \approx 166{,}1^o$

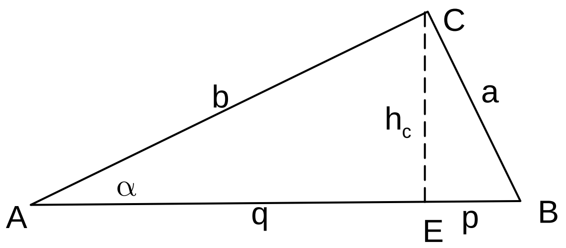
b) $\cos\alpha = -0{,}83$
Hilfsrechnung: Zu $\cos\beta = 0{,}83$ gehört im 1. Feld $\beta_1 \approx 33{,}9^o$
Daraus folgt im 2. Feld: $\alpha_1 = 180^o - \beta_1 \approx 146{,}1^o$
im 3. Feld: $\alpha_2 = 180^o + \beta_1 \approx 213{,}9^o$

c) $\tan\alpha = 3{,}6$
im 1. Feld: $\alpha_1 \approx 74{,}\mathbf{5}^o$
im 3. Feld: $\alpha_2 = \alpha_1 + 180^o \approx 254{,}5^o$

Aufgabe 111

In einem **Dreieck** sei $\gamma = 90^\circ$, $a = 8\text{ cm}$ und $b = 5$ cm.

Berechne der Reihe nach
(ohne den Satz des Pythagoras)
α, c, β, h_c, q und p



Lösung

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha \approx 58{,}0^\circ$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 9{,}4\text{ cm}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 32^\circ$$

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha \approx 4{,}2\text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{q}{b} \Rightarrow q = b \cdot \cos\alpha \approx 2{,}6\text{ cm}$$

$$p = c - q \approx 6{,}8\text{ cm}$$

Lösung 211

Dreieck MES: $\tan\alpha = \dfrac{h}{\frac{1}{2}a} \Rightarrow h = \frac{1}{2}a \cdot \tan\alpha \approx 25{,}7\text{ cm}$

Strecke MB: $\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \approx 17{,}0\text{ cm}$

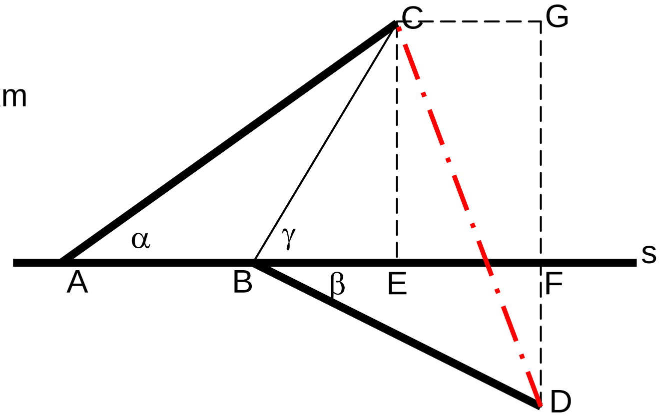
Dreieck MBS: $\tan\beta = \dfrac{h}{\overline{\overline{MB}}} 56{,}5^{\circ} \Rightarrow \beta \approx 56{,}5^{\circ}$

$\sin\beta = \dfrac{h}{k} \Rightarrow k = \dfrac{h}{\sin\beta} \approx 30{,}8\text{ cm}$

Dreieck MES: $\sin\alpha = \dfrac{h}{h_s} \Rightarrow h_s = \dfrac{h}{\sin\alpha} \approx 28{,}4\text{ cm}$

Dreieck BES: $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{a}{2 \cdot k} \Rightarrow \dfrac{\gamma}{2} = 22{,}9^{0} \Rightarrow \gamma \approx 45{,}8^{\circ}$.

Lösung 321



Gegeben:

$\overline{AB} = 6\,\text{km}$, $\overline{AC} = 12\,\text{km}$, $\overline{BD} = 18\,\text{km}$

$\alpha = 48^\circ$ und $\beta = 32^\circ$

a) Gesucht ist $\overline{BC}$ und γ.

Dreieck AEC:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AC}\cdot\cos\alpha \approx 8{,}030\,\text{km}$$

Also ist $\overline{BE} = \overline{AE} - \overline{AB} \approx 2{,}030\,\text{km}$.

$$\sin\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CE} = \overline{AC}\cdot\sin\alpha \approx 8{,}918\,\text{km}$$

Dreieck BED: $\tan\gamma = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \Rightarrow \gamma \approx 77{,}2^\circ$

und $\cos\gamma = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{BE}}{\cos\gamma} \approx 9{,}163\,\text{km}$

b) Dreieck BDF: $\cos\beta = \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BF} = \overline{BD}\cdot\cos\beta \approx 15{,}265\,\text{km}$

Also ist $\overline{EF} = \overline{BF} - \overline{BE} = 13{,}235\,\text{km}$

$$\sin\beta = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{DF} = \overline{BD}\cdot\sin\beta \approx 9{,}539\,\text{km}$$

Dreieck CDG: $\overline{DG} = \overline{DF} + \overline{EC} \approx 18{,}457\,\text{km}$
$\overline{CG} = \overline{EF} \approx 13{,}235\,\text{km}$

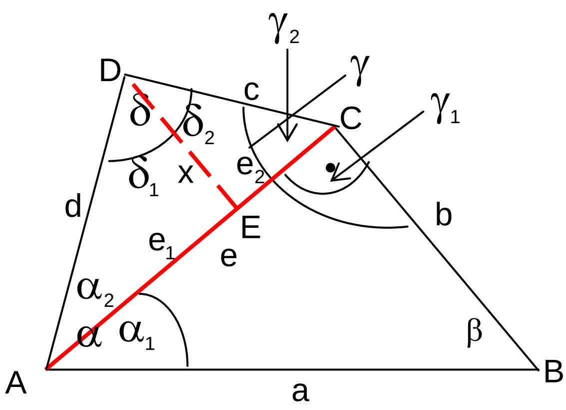
Nach Pythagoras folgt:

$$\overline{CD}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{CG}^2 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{\overline{DG}^2 + \overline{CG}^2} \approx 22{,}712\,\text{km}$$

Lösung 351

Gegeben: $\alpha = 75^O$; $\beta = 50^O$, d = 4,0 cm und e = 5,0 cm.

a) Teildreieck ABC:



$$\tan\beta = \frac{e}{b} \Rightarrow b = \frac{e}{\tan\beta} = 4{,}2\text{ cm}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = 6{,}5\text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 90^O - \beta = 40^O$$

Teildreieck AED:

$$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 35^O \quad \text{und} \quad \delta_1 = 90^O - 35^O = 55^O$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{e_1}{d} \Rightarrow e_1 = d \cdot \cos\alpha_2 = 3{,}3\text{ cm}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d \cdot \sin\alpha_2 = 2{,}3\text{ cm}$$

Teildreieck DEC:

$$e_2 = e - e_1 = 1{,}7\text{ cm}$$

$$\tan\delta_2 = \frac{e_2}{x} \Rightarrow \delta_2 = 36{,}5^O$$

$$\gamma_2 = 90^O - \delta_2 = 53{,}5^O$$

Also wird $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 91{,}5^O$

und $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 90^O + 53{,}5^O = 143{,}5^O$.

$$\sin\gamma_2 = \frac{x}{c} \Rightarrow c = \frac{x}{\sin\gamma_2} = 2{,}9\text{ cm}$$

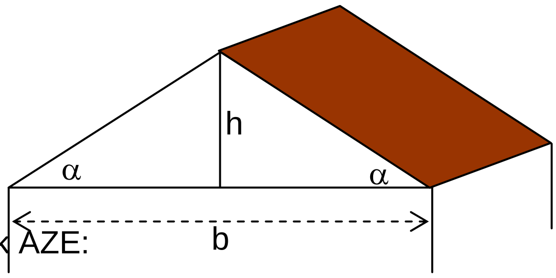
b) **Flächeninhalt**

Man zerlegt das Viereck durch die Diagonale e in zwei
Dreiecke mit der Grundseite e. Dann sind b und x die beiden Höhen:

$$A_V = \tfrac{1}{2} e \cdot x + \tfrac{1}{2} e \cdot b = \tfrac{1}{2} e \cdot (x + b) = 2{,}5 \cdot (2{,}3 + 4{,}2)\text{cm}^2 = 16{,}25\text{ cm}^2$$

Lösung 401

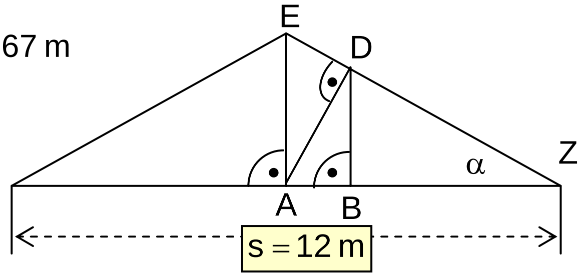
Lösung 9



a) Mit $\alpha = 24^{O}$ und h = 3,5 m

folgt $\tan\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}b} \Rightarrow b = \frac{h}{\frac{1}{2}\cdot\tan\alpha} = \frac{2h}{\tan\alpha} = 15{,}72\text{ m}$

b) Bei $\alpha = 24^{O}$ und s = 12 m folgt im Dreieck AZE:



$$\tan\alpha = \frac{\overline{AE}}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\cdot\overline{AE}}{s} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{s}{2}\cdot\tan\alpha = 2{,}67\text{ m}$$

Im Dreieck AZD gilt:

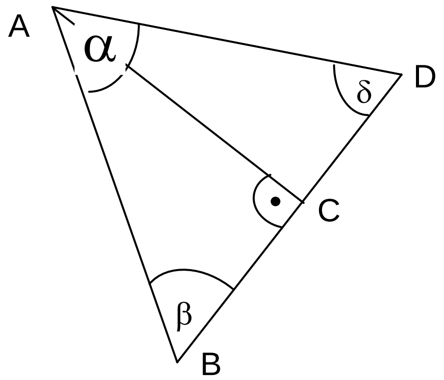
$$\sin\alpha = \frac{\overline{AD}}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\cdot\overline{AD}}{s} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{s}{2}\cdot\sin\alpha = 2{,}44\text{ m}$$

und $\cos\alpha = \frac{\overline{DZ}}{\frac{1}{2}s} = \frac{2\cdot\overline{DZ}}{s} \Rightarrow \overline{DZ} = \frac{s}{2}\cdot\cos 24^{O} = 5{,}48\text{ m}$

Damit können wir jetzt im Dreieck BZD die Strecke BD berechnen:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{DZ}} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{DZ}\cdot\sin 24^{O} = 2{,}23\text{ m}$$

Lösung 402



Gegeben:

$\overline{AB} = 16\text{ km}$

$\alpha = 50^\circ$ und $\beta = 60^\circ$

a) Teildreieck ABC:

$$\sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}\cdot\sin\beta = 13{,}856\text{ km}$$

Teildreieck ABC:

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AB}\cdot\cos\beta = 8{,}0\text{ km}$$

<u>Gesamte Wegstrecke</u>:

$$s_1 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 16\text{ km} + 8\text{ km} + 13{,}8\text{ km} = 37{,}8\text{ km}$$

b) <u>Zweite Wegstrecke</u>:

Berechnung des Winkels im Dreieck ABD: $\delta = 180^\circ - \alpha - \beta = 70^\circ$

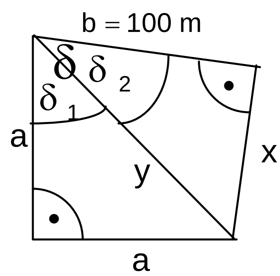
Teildreieck ACD: $\tan\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{AC}}{\tan\delta} = 5{,}043\text{ km}$

und $\sin\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\sin\delta} = 14{,}745\text{ km}$

$$s_2 = 14{,}745\text{ km} + 5{,}043\text{ km} + 8{,}0\text{ km} + 16{,}0\text{ km} = 43{,}788\text{ km}$$

Unterschied: $\Delta s \approx 6\text{ km}$

c) <u>Zaun um den Campingplatz</u>.



Das linke Teildreieck ist gleichschenklig und rechtwinklig, also sind die Basiswinkel 45° groß: $\delta_1 = 45^\circ$. Also folgt $\delta_2 = \delta - \delta_1 = 30^\circ$

Im rechten Dreieck können wir daher so rechnen:

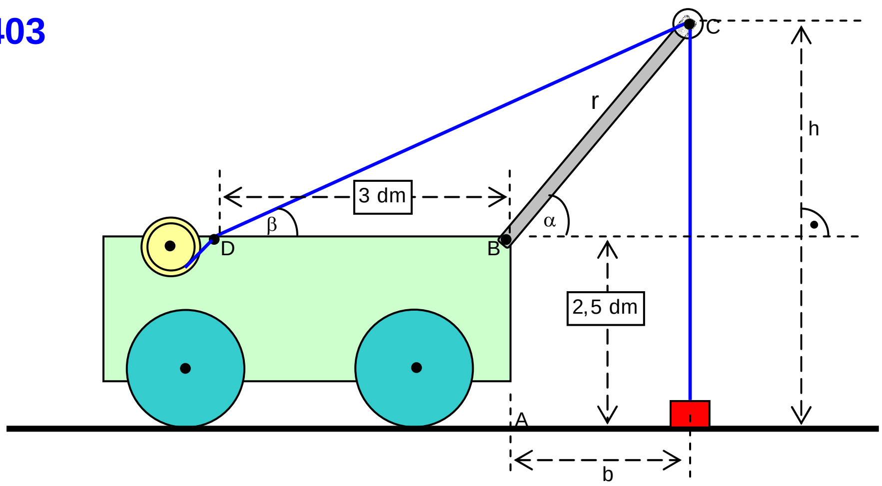
$$\tan\delta_2 = \frac{x}{100\text{ m}} \Rightarrow x = 100\text{ m}\cdot\tan 30^\circ = 57{,}7\text{ m}.$$

$$\cos\delta_2 = \frac{b}{y} \Rightarrow y = \frac{b}{\cos\delta_2} = 115{,}5\text{ m}$$

Damit folgt im linken Teildreieck: $\sin\delta_1 = \frac{a}{y} \Rightarrow a = y\cdot\sin 45^\circ = 81{,}7\text{ m}$

Umfang: $U = 2a + x + b = 321{,}1\text{ m}$

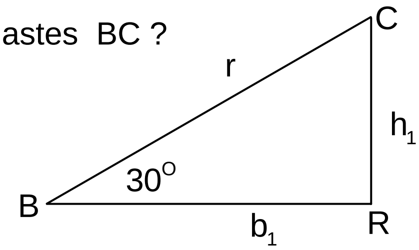
Lösung 403



Der Mast BC ist 5 dm lang, α kann im Bereich zwischen 30^O und 70^O liegen.

a) In welcher Entfernung b vom Punkt A kein eine Last höchstens liegen, damit sie vom Kran hochgezogen werden kann ?

$$\cos 30^O = \frac{b_1}{r} \Rightarrow b_1 = r \cdot \cos 30^O = 4{,}33 \text{ dm}$$



b) Welche maximale Höhe h erreicht die Spitze C des Mastes BC ?

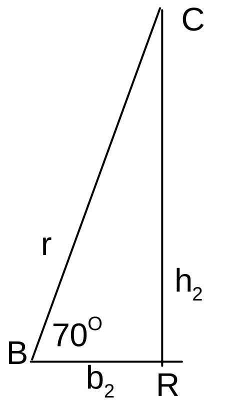
$$\sin 70^O = \frac{h_2}{r} \Rightarrow h_2 = r \cdot \sin 70^O = 4{,}70 \text{ dm}$$

Gesamthöhe: $h = h_2 + 2{,}5 \text{ dm} = 7{,}20 \text{ dm}$

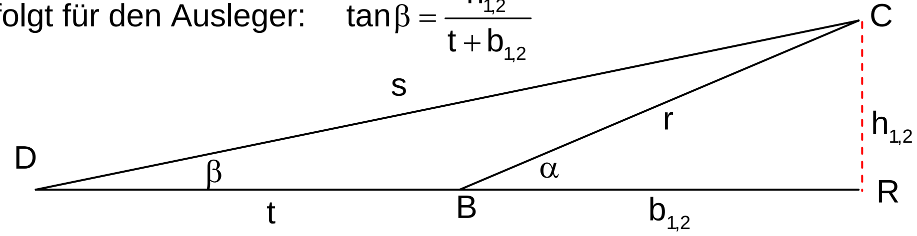
c) Welche Werte kann der Winkel β annehmen ?

Wenn $\alpha = 30^O$ ist, dann ist $b_2 = 4{,}33$ dm und

$$\sin 30^O = \frac{h_1}{r} \Rightarrow h_1 = r \cdot \sin 30^O = 2{,}5 \text{ dm}$$



Also folgt für den Ausleger: $\tan\beta = \dfrac{h_{1,2}}{t + b_{1,2}}$



Für $\alpha = 30^O$ war $b_1 = 4{,}33$ dm ,
also folgt: $\overline{DR} = 3 \text{ dm} + 4{,}33 \text{ dm} = 7{,}33 \text{ dm}$.

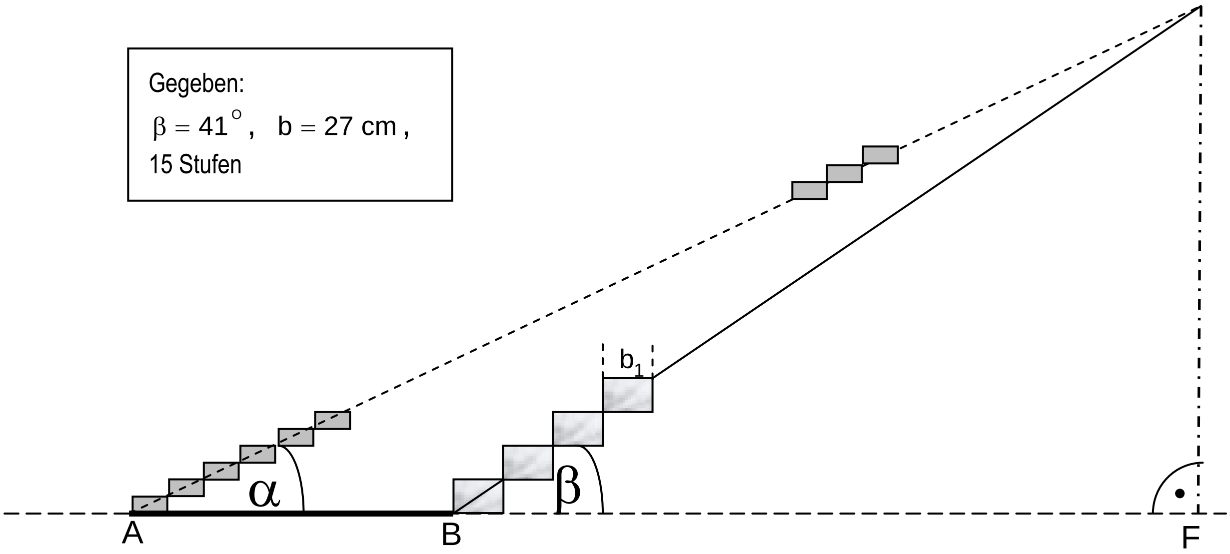
Und wegen $h_1 = 2{,}5$ dm folgt $\tan\beta_1 = \dfrac{2{,}5}{7{,}33} \Rightarrow \beta_1 = 18{,}8^O$.

Entsprechend gilt für $\alpha = 70^O$:

$h_2 = 4{,}7$ dm und aus $\cos 70^O = \dfrac{b_2}{r} \Rightarrow b_2 = 5 \text{ m} \cdot \cos 70^O = 1{,}71 \text{ m}$

Daher folgt: $\tan\beta_1 = \dfrac{4{,}7}{3 + 1{,}71} = \dfrac{4{,}7}{4{,}71} \Rightarrow \beta_1 \approx 45^O$.

Lösung 404



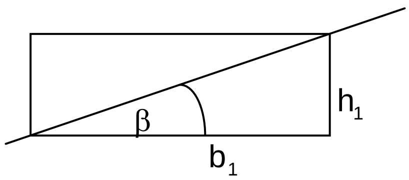
a) Wenn man der Zeichnung entnimmt, dass die 15 Stufen sich nicht überlappen, dann haben sie die Gesamtbreite $b = \overline{BF} = 15 \cdot b_1 = 15 \cdot 27 \cdot cm = 405\ cm$.

Damit kann man die Treppenhöhe berechnen:

$\tan\beta = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \tan 41^\circ = 352\ cm$.

Auf eine Stufe entfällt daher $h_1 = \frac{352}{15} cm = 23{,}5\ cm$.

Dies kann man auch nur an einer Stufe berechnen:



$\tan\beta = \frac{h_1}{b_1} \Rightarrow h_1 = b_1 \cdot \tan 41^\circ = 23{,}5\ cm$

b) Die neue Treppe erhält $\alpha = 25^\circ$.

Aus $\tan\alpha = \frac{h}{\overline{AF}} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{h}{\tan\alpha} = 755\ cm$

Der Abstand der Fußpunkte A und B ist daher

$\overline{AB} = 755\ cm - 405\ cm = 350\ cm$

c) Die neue Treppe hat 22 Stufen, d.h. für eine Stufe ergibt sich

als Breite: $b_2 = \frac{755}{22} cm = 34{,}3\ cm$ und

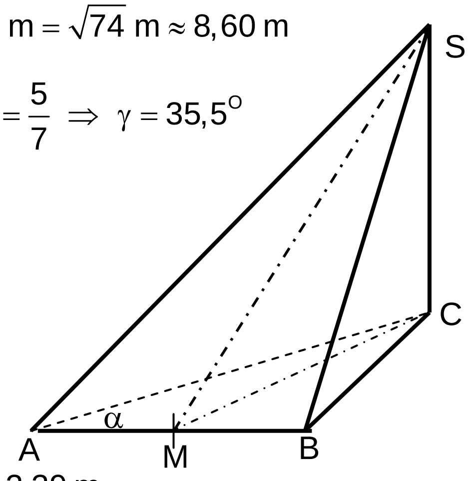
als Höhe: $h_2 = \frac{352}{22} cm = 16\ cm$

Lösung 405

a) Gegeben sind $h = \overline{CS} = 5\text{ m}$ und $a = \overline{BC} = 7\text{ m}$

Dann folgt mit des Satz des Pythagoras:

$\overline{BS}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CS}^2 \Rightarrow \overline{BS} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CS}^2} = \sqrt{49+25}\text{ m} = \sqrt{74}\text{ m} \approx 8{,}60\text{ m}$



Und für den Winkel $\gamma = \sphericalangle CBS$ folgt: $\tan\gamma = \dfrac{\overline{CS}}{\overline{BC}} = \dfrac{5}{7} \Rightarrow \gamma = 35{,}5^{\circ}$

b) Im Grunddreieck ABC ist der Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$ mit 70° gegeben, ferner kennt man aus a) $a = \overline{BC} = 7\text{ m}$. Das Dreieck ist ferner laut Aufgabe gleichschenklig.

Also liegt bei M ein rechter Winkel.

Also gilt: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BC}\cdot\cos\alpha = 2{,}39\text{ m}$

Folglich wird $\overline{AB} = 2\cdot\overline{AM} = 4{,}78\text{ m}$ (bzw. 4,79 m bei höherer Genauigkeit).

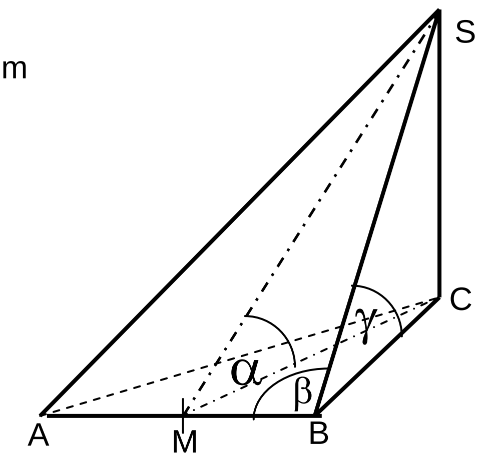
Die Dreieckshöhe CM:

$\sin\alpha = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CM} = \overline{AC}\cdot\sin\alpha = \overline{BC}\cdot\sin\alpha = 6{,}58\text{ m}$

Damit ergibt sich als Dreiecksinhalt:
$\mathbf{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CM} = \frac{1}{2}\cdot 2{,}39\text{ m}\cdot 6{,}58\text{ m} = 7{,}86\text{ m}^2$.

c) Es ist $\alpha = \sphericalangle CMS$, $\beta = \sphericalangle SBA$ und $\gamma = \sphericalangle CBS$.

Begründe, dass gilt $\sin\beta = \dfrac{\overline{MS}}{\overline{BS}}$



Das Dreieck ABS ist gleichschenklig und da AB die Basis ist und M deren Mittelpunkt, liegt bei M ein rechter Winkel. Also ist BS die Hypotenuse und MS die Gegenkathete.

Dreieck MCS: $\sin\alpha = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{MS}}$; Dreieck BMS: $\sin\beta = \dfrac{\overline{MS}}{\overline{BS}}$

Daraus folgt: $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{MS}}\cdot\dfrac{\overline{MS}}{\overline{BS}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{BS}}$ und dies ist gerade $\sin\gamma$ im Dreieck BCS.

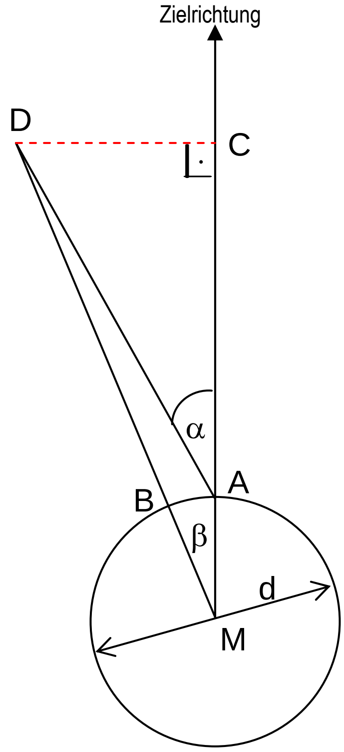
Also gilt $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \sin\gamma$.

Weil für alle Winkel gilt $\sin\beta \le 1$, wird die linke Seite der Gleichung größer, wenn man $\sin\beta$ durch 1 ersetzt. Also folgt $\sin\alpha \ge \sin\gamma$, und folglich ist auch $\alpha \ge \gamma$.

Lösung 411

a) Dreieck ACD: $\sin\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{AD} \cdot \sin\alpha = 22{,}94\text{ m}$

b) Vorplanung:



Um die Differenz $\overline{AD} - \overline{BD}$ zu berechnen, benötigt man $\overline{MD}$, denn $\overline{BD} = \overline{MD} - r$.

1. Schritt: Berechnung von $\overline{AC}$ im Dreieck ACD:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \cos\alpha = 32{,}77\text{ m}$$

2. Schritt: Übergang zum Dreieck BCD:

$$\overline{MC} = \overline{AC} + r = 32{,}77\text{ m} + 1{,}25\text{ m} = 34{,}02\text{ m}$$

3. Schritt: Berechnung des Winkels β : *)

$$\tan\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{MC}} \Rightarrow \beta = 34{,}0^{\circ}$$

4. Schritt: Berechnung der Hypotenuse MD im Dreieck MDC:

$$\sin\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{MD}} \Rightarrow \overline{MD} = \frac{\overline{CD}}{\sin\beta} = 41{,}02\text{ m}$$

5. Schritt: Verkürzen um den Radius:

$$\overline{BD} = \overline{MD} - r = 41{,}02\text{ m} - 1{,}25\text{ m} = 39{,}77\text{ m}$$

6. Schritt: Berechnung der gesuchten Differenz:

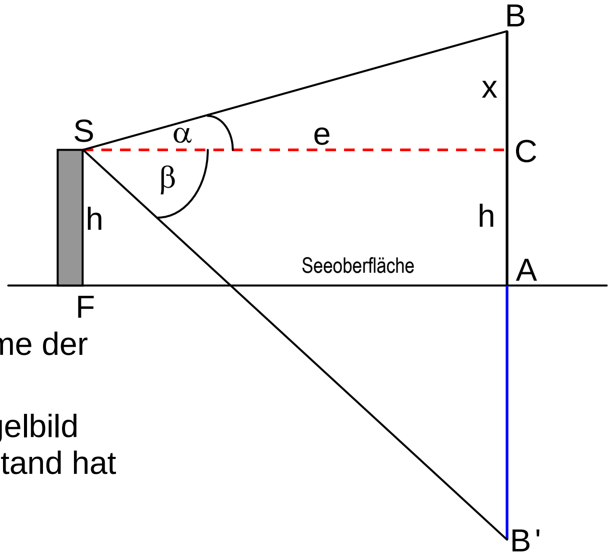
$$\overline{AD} - \overline{BD} = 40\text{ m} - 39{,}77\text{ m} = 0{,}23\text{ m}$$

Bemerkung: Eine wunderschöne Aufgabe, die nur mit rechtwinkligen Dreiecken auskommt.

*) Man hätte den 3. und 4. Schritt durch den Satz des Pythagoras ersetzen können: $\overline{MD} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{MC}^2} = 41{,}02\text{ m}$ usw.

Lösung 412

Gegeben:
$\overline{FS} = 34\ \text{m}$ $\alpha = 73^\circ$; $\beta = 75^\circ$
Gesucht: $\overline{AB}$



Vorplanung:

Die gesuchte Höhe $\overline{AB}$ berechnen wir als Summe der Turmhöhe h und der Streckenlänge $x = \overline{BC}$.
Ferner müssen wir ausnützen, dass B' als Spiegelbild von B an der Seeoberfläche zu A denselben Abstand hat wie B, also ist auch $\overline{AB'} = h + x$.

Dreieck SBC: $\tan\alpha = \dfrac{x}{e}$ (1)

Dreieck SB'C: $\tan\beta = \dfrac{\overline{CB'}}{e} = \dfrac{h + \overline{AB'}}{e} = \dfrac{h + (h + x)}{e} = \dfrac{2h + x}{e}$ (2)

Zwischenbemerkung

Die Aufgabe wird dadurch zunächst unübersichtlich und schwer, dass hier mit x und e zwei Unbekannte vorliegen. Da wir jedoch zwei Dreiecke vorliegen haben, kommen wir auf zwei Gleichungen, so dass wir durch Elimination einer der beiden Unbekannten der Reihe nach beide berechnen können. Schaut man sich die beiden Gleichungen an, dann stellt man fest, dass es leichter zu eliminieren ist, weil x sowohl in einem Bruch, als auch noch in einer Summe eingebunden ist. ***In diesem Fall gibt es eine raffinierte Lösung, die etwas kürzer, aber sehr effektiv ist:***

Wir dividieren (1) durch (2) - Divisionstrick - d.h. wir berechnen

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x}{e} \cdot \frac{e}{2h + x} \Leftrightarrow \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x}{2h + x}$$

Wegmultiplizieren der Nenner (über Kreuz multiplizieren):

$$(2h + x) \cdot \tan\alpha = x \cdot \tan\beta$$

$$2h \cdot \tan\alpha + x \cdot \tan\alpha = x \cdot \tan\beta$$

$$2h \cdot \tan\alpha = x \cdot \tan\beta - x \cdot \tan\alpha$$

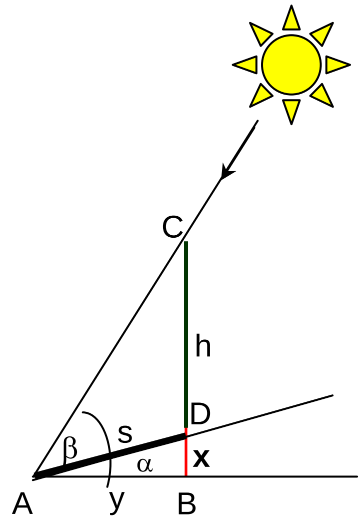
$$2h \cdot \tan\alpha = x \cdot (\tan\beta - \tan\alpha)$$

$$x = \frac{2h \cdot \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = 482{,}3\ \text{m}$$

Also folgt: $\overline{AB} = x + h = 482{,}3\ \text{m} + 34\ \text{m} = 516{,}3\ \text{m}$

Ergebnis: Der Ballon fliegt in etwa 516 m über der Seeoberfläche.

Lösung 413



Gegeben:
$\alpha = 20^{\circ}$; $\beta = 65^{\circ}$
$s = 5\text{ m}$
Gesucht: h

1. Methode

nach dem Prinzip der geschachtelten rechtwinkligen Dreiecke:

Das Dreieck ABD ist rechwinklig, ebenso das Dreieck ABC. Beide verknüpfen wir durch diese Gleichungen:

1. Schritt: Dreieck ABC:

$$\tan\beta = \frac{h+x}{y} \Rightarrow y\cdot\tan\beta = h + x \Rightarrow h = y\cdot\tan\beta - x \qquad (1)$$

2. Schritt: Berechnung von x und y aus dem Teildreieck ABD:

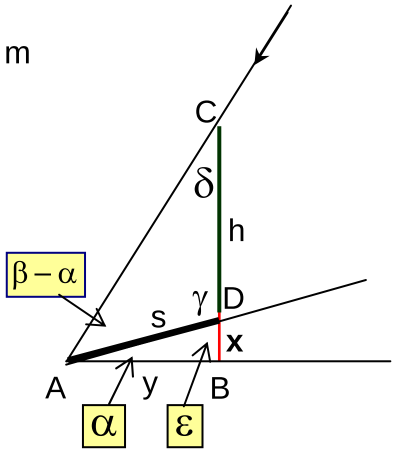
$$\sin\alpha = \frac{x}{s} \Rightarrow x = s\cdot\sin\alpha = 1{,}71\text{m} \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{s} \Rightarrow y = s\cdot\cos\alpha = 4{,}70\text{ m} \qquad (3)$$

3. Schritt: (2) und (3) in (1) einsetzen:

$$h = y\cdot\tan\beta - x = 4{,}70\text{ m}\cdot\tan 65^{\circ} - 1{,}71\text{m} = 8{,}40\text{ m}$$

2. Methode



h wird mit dem Sinussatz im Dreieck ADC berechnet.

$$\frac{h}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{s}{\sin\delta} \Rightarrow h = \frac{s\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\sin\delta} \qquad (4)$$

Dazu muss man zuerst den Winkel δ berechnen:

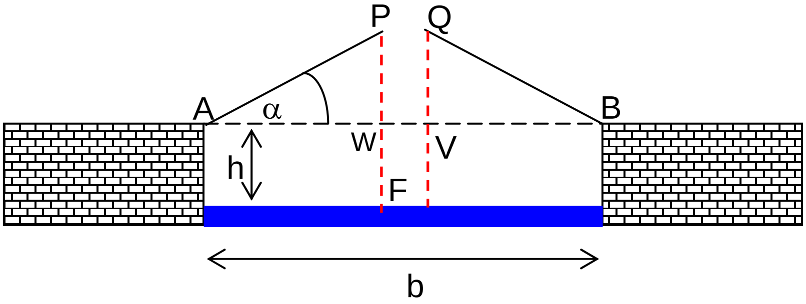
$\varepsilon = 90^{\circ} - \alpha = 70^{\circ}$, $\gamma = 180^{\circ} - \varepsilon = 110^{\circ}$. Also wird $\delta = 180^{\circ} - \gamma - (\beta - \alpha) = 25^{\circ}$.

Nun folgt aus (4) sofort

$$h = \frac{s\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\sin\delta} = \frac{5\cdot\sin 45^{\circ}}{\sin 25^{\circ}} = 8{,}40\text{ m}$$

Lösung 414

Gegeben:
$b = 13\text{ m}$, $h = 3{,}7\text{ m}$.
Maximaler Winkel
$\alpha = 31^{\circ}$.
Schiffsmaße:
Breite 6 m, Höhe 4,5 m



a) Berechnung der Höhe des Punktes P (bzw. Q) über der Wasseroberfläche:

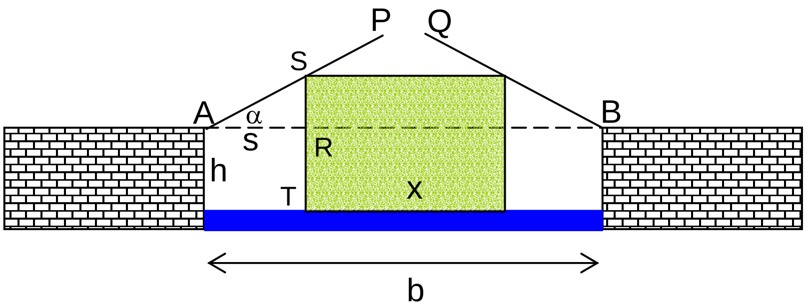
Im Dreieck AWP gilt: $\sin\alpha = \dfrac{\overline{PW}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{PW} = \overline{AP}\cdot\sin\alpha = \tfrac{1}{2}b\cdot\sin\alpha = 3{,}35\text{ m}$

Gesamthöhe: $\overline{FP} = h + \overline{PW} = 7{,}05\text{ m}$

Ferner folgt: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AW}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{AW} = \overline{AP}\cdot\cos\alpha = 5{,}57\text{ m}$

Da $\overline{BV} = \overline{AW}$, folgt $\overline{PQ} = b - 2\cdot\overline{AW} = 13\text{ m} - 2\cdot 5{,}57\text{ m} = 1{,}86\text{ m}$

b)



Das Schiff, das unter der Zugbrücke durchfahren soll, hat die Breite $x = 6$ m. Nehmen wir an, es fährt genau in der Mitte des Flusses, dann bleibt links und rechts noch eine Strecke s frei:

$$s = \tfrac{1}{2}(b - x) = \tfrac{1}{2}\cdot(13\text{ m} - 6\text{ m}) = 3{,}5\text{ m}$$

Wir berechnen nun, wie hoch das Schiff am linken Rand sein darf, wie hoch also S über der Wasserfläche liegen kann, wenn $\overline{AR} = 3{,}5\text{ m}$ und $\alpha = 31^{\circ}$ betragen.

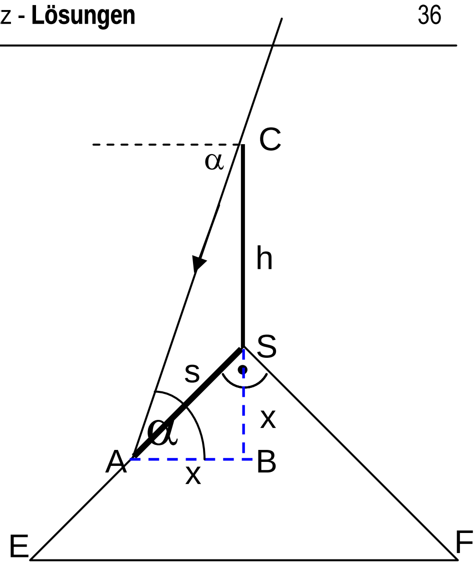
$$\tan\alpha = \frac{\overline{SR}}{\overline{AR}} \Rightarrow \overline{SR} = \overline{AR}\cdot\tan\alpha = 2{,}10\text{ m}$$

Damit folgt für die zulässige Schiffshöhe:

$$\overline{ST} = h + \overline{SR} = 3{,}70\text{ m} + 2{,}10\text{ m} = 5{,}80\text{ m}$$

Da das Schiff tatsächlich nur 4,5 m aus dem Wasser herausragt, kann das Schiff unter der Zugbrücke hindurch fahren.

Lösung 415



a) Für die Berechnung des Schattens AS verwendet man einen Trick. Weil das Dach oben einen rechten Winkel besitzt, ist die Dachneigung 45^O groß. Daher ist das Dreieck EFS und auch ABS gleichschenklig rechtwinklig. Also sind die Strecken AB und BS gleich lang, ich nenne sie x.

Nun können wir in dem rechtwinkligen Dreieck ABC ganz komfortabel mit der Tangensfunktion arbeiten:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{h+x}{x}$$

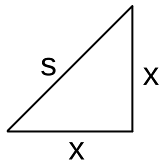
Also folgt: $x \cdot \tan\alpha = h + x$

Gegeben:
$\overline{SC} = h = 4\text{ m}$
$\alpha = 70^o$
$\overline{EF} = 10\text{ m}$

Da x die einzige Unbekannte in dieser Gleichung ist, können wir sie berechnen. Dazu muss sie nach links gebracht werden.

$$x \cdot \tan\alpha - x = h \quad \text{d.h.} \quad x \cdot (\tan\alpha - 1) = h$$

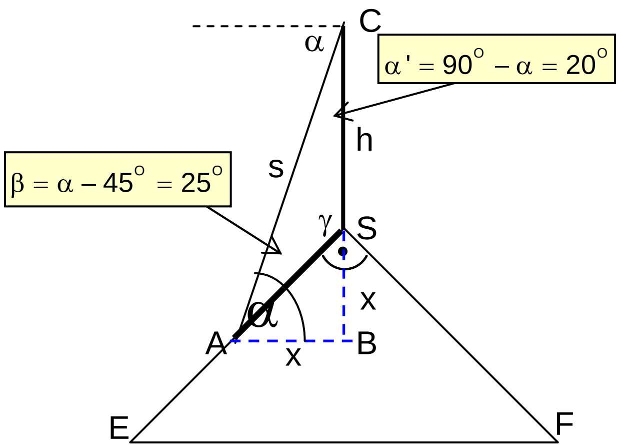
$$x = \frac{h}{\tan\alpha - 1} = 2{,}29\text{ m}.$$



Nach Pythagoras folgt nun $s^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow s = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} = 3{,}24\text{ m}$

2. Lösungsweg zu a)

Im Dreieck ASC können wir alle Winkel berechnen. Zuerst folgt bei C $\alpha' = 20^O$, dann bei A $\beta = 25^O$, und damit bei S $\gamma = 180^O - 20^O - 25^O = 135^O$.



Nun können wir den Sinussatz anwenden:

$$\frac{s}{\sin\alpha'} = \frac{h}{\sin\beta} \Rightarrow s = \frac{h \cdot \sin\alpha'}{\sin\beta} = 3{,}24\text{ m}$$

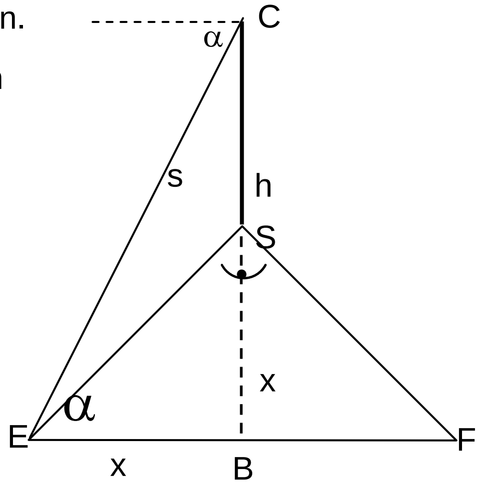
b) Nun soll der Schatten bis zum Punkt E reichen.

Aus den Abmessungen des Daches mit $\overline{EF} = 10\text{ m}$

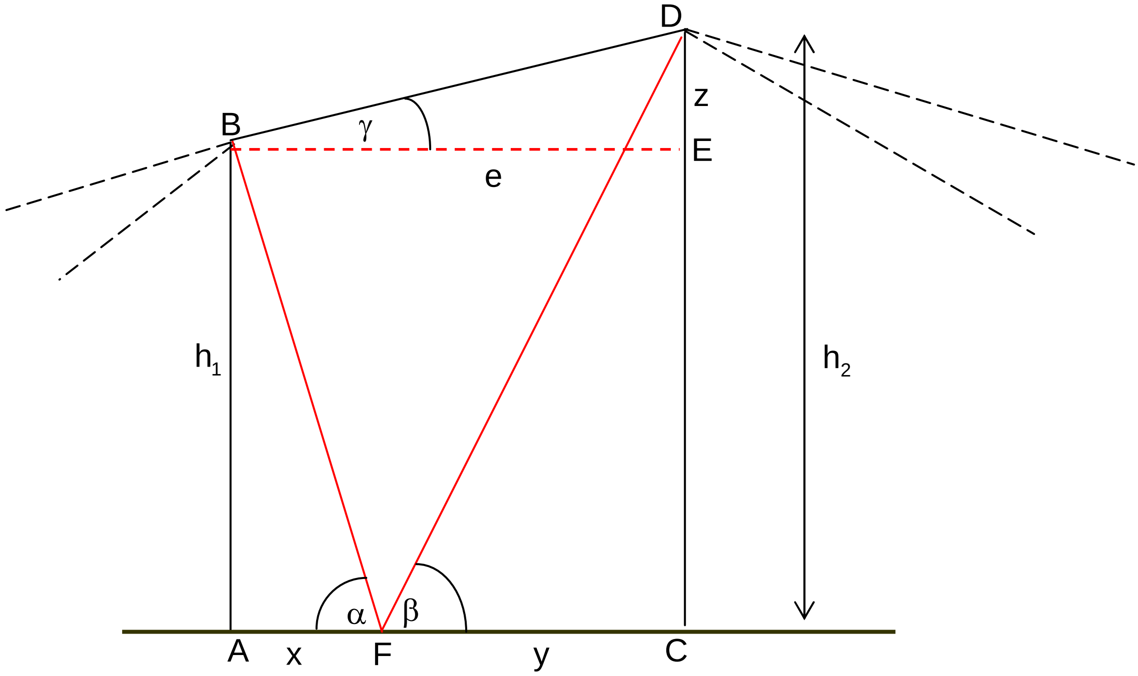
x = 5 m und somit wird $\overline{BC} = h + x = 9\text{ m}$.

Damit folgt im Dreieck EBC:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{EB}} = \frac{9}{5} = 1{,}8 \Rightarrow \alpha = 60{,}9^O.$$



Lösung 416



Gegeben sind $\alpha = 36{,}5^\circ$ und $\beta = 29^\circ$ sowie $h_1 = 48\text{ m}$ und $e = \overline{AC} = 180\text{ m}$

a) Im rechtwinkligen Dreieck AFB gilt: $\tan\alpha = \frac{h_1}{x} \Rightarrow x = \frac{h_1}{\tan\alpha} = 64{,}9\text{ m}$

Damit folgt: $y = e - x = 115{,}1\text{m}$.

b) Im rechtwinkligen Dreieck FCD gilt: $\tan\beta = \frac{h_2}{y} \Rightarrow h_2 = y \cdot \tan\beta = 63{,}8\text{ m}$

c) Im rechtwinkligen Dreieck BED gilt: $\tan\gamma = \frac{z}{e} = \frac{h_2 - h_1}{e} \Rightarrow \gamma = 5^\circ$

Damit folgt $\cos\gamma = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{AC}}{\cos\gamma} = 180{,}7\text{ m}$.

Dies gelingt auch mit dem Satz des Pythagoras:

$\overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + z^2 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + z^2} = 180{,}7\text{ m}$ mit $z = h_2 - h_1 = 13{,}8\text{ m}$.

Da die Länge des durchhängenden Seiles um 15 % größer ist, folgt für diese Länge:

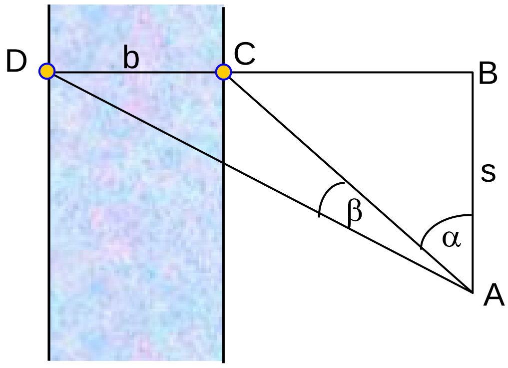
$L = \overline{BD} \cdot 1{,}15 = 207{,}8\text{ m}$.

Lösung 420

a) Hans markiert eine Stelle B auf der direkten Linie DC und steckt rechtwinklig zu CD eine Standlinie AB = s ab, die 44,2 m lang wird. Die Entfernung BC ist 34,3 m groß.

Schließlich misst er noch den Winkel $\beta = 23{,}0^\circ$.

Berechne die Breite b = CD des Flusses.



Teildreieck ABC: Aus den gegebenen Größen s und BC können wir den Winkel α berechnen:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{34{,}3\,\text{m}}{44{,}2\,\text{m}} \Rightarrow \alpha = 37{,}8^\circ$$

Teildreieck ABD: $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\overline{BD}}{s} \Rightarrow \overline{BD} = s\cdot\tan(\alpha+\beta)$

Breite des Flusses: $b = \overline{DC} = \overline{BD} - \overline{BC} = s\cdot\tan\underbrace{(\alpha+\beta)}_{60{,}8^\circ} - \overline{BC} = 44{,}8\,\text{m}$

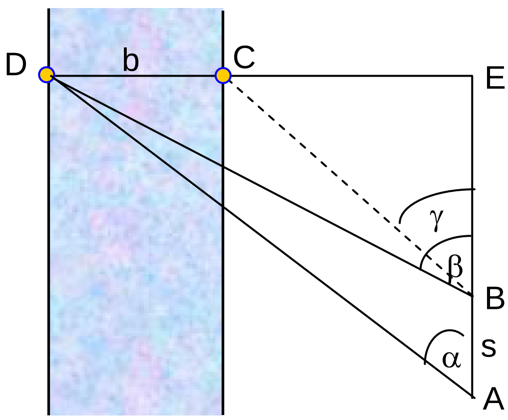
b) Sylvia bestimmt ebenso wie Hans eine Stelle E auf der Linie DC.

Ihre Standlinie s = AB ist ebenfalls senkrecht zu CD und hat die Länge 20,0 m.

Sie bestimmt drei Winkel

$\alpha = 59{,}5^\circ$, $\beta = 71{,}4^\circ$ und $\gamma = 52{,}2^\circ$

Berechne die Breite b = DC des Flusses.



Teildreieck AED: $\tan\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$ (1)

Teildreieck BED: $\tan\beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}$ (2)

Durch Division entsteht: $$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\cancel{\overline{DE}}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\cancel{\overline{DE}}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$$

Daraus folgt ohne Brüche: $\overline{AE}\cdot\tan\alpha = \overline{BE}\cdot\tan\beta$

Wegen $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE}$ folgt nun

$$\left(\overline{AB} + \overline{BE}\right) \cdot \tan\alpha = \overline{BE} \cdot \tan\beta$$

$$\overline{AB} \cdot \tan\alpha + \overline{BE} \cdot \tan\alpha = \overline{BE} \cdot \tan\beta$$

$$\overline{AB} \cdot \tan\alpha = \overline{BE} \cdot \tan\beta - \overline{BE} \cdot \tan\alpha$$

$$\overline{AB} \cdot \tan\alpha = \overline{BE} \cdot \left(\tan\beta - \tan\alpha\right)$$

$$\overline{BE} = \frac{\overline{AB} \cdot \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = 26{,}6\ \text{m} \qquad (3)$$

Aus (2) $\tan\beta = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BE}}$ folgt:

$$\overline{DE} = \overline{BE} \cdot \tan\beta = 79{,}2\ \text{m}$$

Oder als Formel mittels (3) :

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB} \cdot \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \cdot \tan\beta = \overline{AB} \cdot \frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

Und schließlich erhält man die Flussbreite durch Subtraktion von $\overline{EC}$.

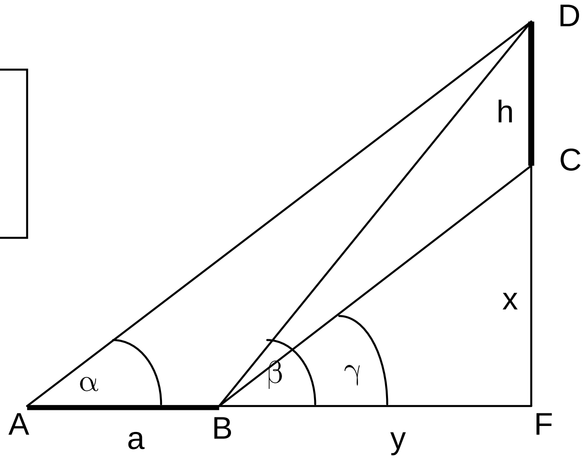
Im Teildreieck BEC kennen wir BE und γ also folgt

$$\tan\gamma = \frac{\overline{EC}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{EC} = \overline{BE} \cdot \tan\gamma = 34{,}3\ \text{m}$$

Breite des Flusses: $b = \overline{DE} - \overline{EC} = 79{,}2\ \text{m} - 34{,}3\ \text{m} = 44{,}9\ \text{m}$

Lösung 421

Gegeben: $\overline{AB} = a = 9{,}00\ \text{m}$
$\alpha = 28{,}7^\circ$; $\beta = 58{,}4^\circ$ und $\gamma = 42{,}3^\circ$
Gesucht: $\overline{CD}$.



Teildreieck AFD: $\tan\alpha = \dfrac{h+x}{a+y}$ (1)

Teildreieck BFD: $\tan\beta = \dfrac{h+x}{y}$ (2)

Teildreieck BFC: $\tan\gamma = \dfrac{x}{y}$ (3)

Berechnung von y aus (1) und (2) (Divisionstrick):

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{h+x}{a+y} \cdot \frac{y}{h+x} = \frac{y}{a+y}$$

Ergibt: $(a+y)\cdot\tan\alpha = y\cdot\tan\beta$

d.h. $a\cdot\tan\alpha + y\cdot\tan\alpha = y\cdot\tan\beta$

$$a\cdot\tan\alpha = y\cdot(\tan\beta - \tan\alpha)$$

$$y = \frac{a\cdot\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} = 4{,}57\ \text{m}$$

Berechnung von x aus (3): $x = y\cdot\tan\gamma = 4{,}16\ \text{m}$

Berechnung von h aus (2): $h + x = y\cdot\tan\beta \Rightarrow h = y\cdot\tan\beta - x = 3{,}26\ \text{m}$