Polarform komplexer Zahlen

1. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in Polarform an.

   (a) $2+3i$ (b) $3+4i$ (c) $4-5i$

   (d) $5-6i$ (e) $-6+7i$ (f) $-7+8i$

   (g) $-8-9i$ (h) $-9-10i$ (i) $-10+11i$

   Lösung: (a) $(\sqrt{13}|56{,}3°)$ (b) $(5|53{,}1°)$ (c) $(\sqrt{41}|308{,}7°)$

   (d) $(\sqrt{61}|309{,}8°)$ (e) $(\sqrt{85}|130{,}6°)$ (f) $(\sqrt{113}|131{,}2°)$

   (g) $(\sqrt{145}|228{,}4°)$ (h) $(\sqrt{181}|228{,}0°)$ (i) $(\sqrt{221}|132{,}3°)$

2. Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten wird durch ein tiefgestelltes p gekennzeichnet. Stellen Sie die Ergebnisse in Polar- und in Normalform dar.

   (a) $(\,3\,|\,40°\,)_{\mathrm{p}} \cdot (\,4\,|\,130°\,)_{\mathrm{p}}$ (b) $\left(\frac{2}{7}\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}} \cdot (\,14\,|\,60°\,)_{\mathrm{p}}$ (c) $(\sqrt{3}+i)\cdot\left(2\,\middle|\,\frac{2\pi}{3}\right)_{\mathrm{p}}$

   (d) $(\,3\,|\,40°\,)_{\mathrm{p}}^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\,\middle|\,140°\right)_{\mathrm{p}}^2$ (e) $\left(\frac{2}{7}\,\middle|\,\frac{7\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}} \cdot (\,14\,|\,60°\,)_{\mathrm{p}}^2$ (f) $(\sqrt{3}-i)^2\cdot(-1+i)^2$

   Lösung: (a) $(\,12\,|\,170°\,)_{\mathrm{p}} = -12\cos 10° + 12\,i\sin 10°$ (b) $(\,4\,|\,90°\,)_{\mathrm{p}} = 4\,i$

   (c) $(\,4\,|\,150°\,)_{\mathrm{p}} = -2\sqrt{3}+2\,i$ (d) 1

   (e) $(\,56\,|\,330°\,)_{\mathrm{p}} = 28\sqrt{3}-28\,i$ (f) $(\,8\,|\,210°\,)_{\mathrm{p}} = -4\sqrt{3}-4\,i$

3. Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten wird durch ein tiefgestelltes p gekennzeichnet. Stellen Sie die Ergebnisse in Polar- und in Normalform dar.

   (a) $(\,3\,|\,40°\,)_{\mathrm{p}} : (\,4\,|\,130°\,)_{\mathrm{p}}$ (b) $\left(\frac{2}{7}\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}} : (\,14\,|\,60°\,)_{\mathrm{p}}$ (c) $(\sqrt{3}+i) : \left(2\,\middle|\,\frac{2\pi}{3}\right)_{\mathrm{p}}$

   Lösung: (a) $\left(\frac{3}{4}\,\middle|\,270°\right)_{\mathrm{p}} = -\frac{3}{4}\,i$ (b) $\left(\frac{1}{49}\,\middle|\,330°\right)_{\mathrm{p}} = \frac{\sqrt{3}}{98} - \frac{i}{98}$ (c) $-i$

4. Das Produkt zweier beliebiger komplexer Zahlen mit den Polardarstellungen $z_1 = (\,r_1\,|\,\varphi_1\,)_{\mathrm{p}}$ und $z_2 = (\,r_2\,|\,\varphi_2\,)_{\mathrm{p}}$ ist definiert durch

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (\,r_1 \cdot r_2\,|\,\varphi_1 + \varphi_2\,)_{\mathrm{p}}}$$

(a) Berechnen Sie das Produkt von $z_1 = (\,2\sqrt{3}\,|\,2\,)$ und $z_2 = (\,-1\,|\,\sqrt{3}\,)$. Stellen Sie das Ergebnis in der Polar- und in der Normalform dar.

(b) Das neutrale Element der Multiplikation sei $E = (\,r_\mathrm{e}\,|\,\varphi_\mathrm{e}\,)_\mathrm{p}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von E in der Polar- und in der Normaldarstellung.
Für welche komplexe Zahl I gilt $I^2 = -E$?

Lösung: (a) $z_1 = (\,4\,|\,30°\,)_\mathrm{p}, \quad z_2 = (\,2\,|\,120°\,)_\mathrm{p}, \quad z_1 \cdot z_2 = (\,8\,|\,150°\,)_\mathrm{p} = (\,-4\sqrt{3}\,|\,4\,)$

(b) $E = (\,1\,|\,0\,)_\mathrm{p} = (\,1\,|\,0\,)$

$I_1 = (\,1\,|\,90°\,)_\mathrm{p} = (\,0\,|\,1\,), \quad I_2 = -I_1 = (\,1\,|\,270°\,)_\mathrm{p} = (\,0\,|-1\,)$

5. (a) $((2|\frac{\pi}{12})_\mathrm{p})^{10}$ (b) $(\sqrt{3}+i)^{20}$ (c) $(-i)^{4n-3}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Lösung: (a) $\left(1024\,\middle|\,\frac{5\pi}{6}\right)_\mathrm{p} = -512\sqrt{3} + 512\,i$

(b) $\left(2\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\right)_\mathrm{p}^{20} = \left(1\,048\,576\,\middle|\,\frac{4\pi}{3}\right)_\mathrm{p} = -524\,288 - 524\,288\sqrt{3}\,i$

(c) $\left[(-i)^4\right]^n \cdot (-i)^{-3} = (-i)^{-3} = -i$

6. Zeichnen Sie die beiden Zahlen $z_1 = 2 + \frac{3}{2}\,i$ und $z_2 = \frac{3}{2} + 2\,i$ in die Gauß'sche Zahlenebene ein. Berechnen Sie das Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$ in nachvollziehbarer Weise einmal in der Normal- und einmal in der Polarform.

Lösung: $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{25}{4}\,i = \left(\dfrac{25}{4}\,\middle|\,90°\right)_\mathrm{p}$

7. Verwandeln Sie $z = \sqrt{3} + i$ in die Polarform. Berechnen Sie z^2, $\dfrac{1}{z}$ und z^{13}. Alle Ergebnisse in Polar- und Normalform!

Lösung: $z = (\,2\,|\,30°\,)_\mathrm{p}$, $z^2 = (\,4\,|\,60°\,)_\mathrm{p} = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{2}\,\middle|\,330°\right)_\mathrm{p} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4}$

$z^{13} = (\,8192\,|\,30°\,)_\mathrm{p} = 4096(\sqrt{3}+i)$

8. Gegeben sind die komplexen Zahlen $x = -2 + 2i$ und $y = 5 - 12i$. Berechnen Sie

$$z = \frac{338}{y} - \frac{384}{x^2}$$

Stellen Sie das Ergebnis in der Polar- und Normalform dar.

Lösung: $z = 10 - 24i = (\,26\,|\,292{,}62°\,)_\mathrm{p}$

9. Berechnen Sie Formeln für $\sin 3\,\alpha$ und $\cos 3\,\alpha$. Hinweis: $(\,1\,|\,\alpha\,)_\mathrm{p}^3$.

Lösung:
$$(\,1\,|\,\alpha\,)_\mathrm{p}^3 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \underbrace{\cos^3\alpha - 3\,\sin^2\alpha\cos\alpha}_{\cos 3\,\alpha} + \underbrace{i\,(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)}_{i\,\sin 3\,\alpha}$$
$$(\,1\,|\,\alpha\,)_\mathrm{p}^3 = (\,1\,|\,3\,\alpha\,)_\mathrm{p} = \cos 3\,\alpha + i\,\sin 3\,\alpha$$