Abituraufgaben zum Thema: Lineare Abbildung im R^2 (R^3), affine Abbildung im R^2(R^3)

3.3 Die Häuserfassaden in der Mega-City sind für weitere visuelle Effekte in Form und Position veränderbar. Im Folgenden wird dazu ein weiteres Gebäude E betrachtet. Seine Fassade hat in einem zweidimensionalen Koordinatensystem die Eckpunkte $E_1(60; 80)$, $E_2(100; 80)$, $E_3(100; 0)$ und $E_4(60; 0)$.

3.3.1 Die gesamte Fassade von E soll durch die Abbildung

α: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 - 200 \cdot a \\ 120 - 120 \cdot a \end{pmatrix}$ mit $0 \le a \le 1$ verändert werden.

Analysieren die Art der Abbildung sowie die Bedeutung des Wertes von a.

7 Punkte

3.3.2 Eine zweite Abbildung wird durch die Gleichung

β: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Untersuchen Sie die Abbildung β auf Fixpunkte und Fixpunktgeraden.

5 Punkte

3.3 Auf der Videowand des Stadions wird vor Zeitlupenwiederholungen eine graphische Sequenz bestehend aus einem animierten Dreieck eingeblendet. Die Eckpunkte des Dreiecks haben zu Beginn der Sequenz die Koordinaten $D_1(20; 40)$, $D_2(60; 40)$ und $D_3(40; 60)$.
Am Ende der Sequenz besitzen die Eckpunkte des Dreiecks die Koordinaten $D_1'(20; 40)$, $D_2'(100; 40)$ und $D_3'(60; 80)$.

3.3.1 Bestimmen Sie auf Grundlage einer Skizze ohne Rechnung, wie das Bilddreieck aus dem ursprünglichen Dreieck hervorgeht.

4 Punkte

3.3.2 Zeigen Sie, dass durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und den Vektor

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix}$ die angegebene Abbildung in Form einer affinen Abbildung

$\beta : \vec{x} \rightarrow A \cdot \vec{x} + \vec{b}$ beschrieben werden kann.

5 Punkte

3.3.3 Untersuchen Sie, ob die Abbildung aus 3.3.2 Fixpunkte besitzt.

4 Punkte

In einer anderen Sequenz sollen Punkte auf der Videowand zuerst durch die Abbildung

$$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

dann durch die Abbildung

$$\beta(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

abgebildet werden.

3.3.4 Analysieren Sie, was die Abbildungen α und β geometrisch bewirken.

4 Punkte

3.3.5 Berechnen Sie eine Abbildungsvorschrift für die Verkettung $\beta \circ \alpha$.

3 Punkte

3.3.6 In einer weiteren Sequenz wird die Abbildung $\gamma(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ verwendet.

Berechnen Sie die Matrizengleichung für die Umkehrabbildung von γ.

4 Punkte

3.6 Bei einigen Schreckerlebnissen, wie z. B. „Erdbeben", lassen sich die Aktivitäten von Neuronenverbindungen zweidimensional darstellen. Die Stärke einer Aktivität verändere sich nach der linearen Abbildung

$$\alpha : \vec{x} \rightarrow M \cdot \vec{x} \text{ mit } M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6.1 Im Ruhezustand haben die Neuronenverbindungen B bzw. C die Koordinaten B(2; 3) und C(2; -3).

Berechnen Sie die Koordinaten der Bildpunkte B' und C'.

3 Punkte

3.6.2 Eine angeregte Neuronenverbindung D' sei durch die Koordinaten D'(2; -1) gegeben.

Berechnen Sie die Koordinaten im Ruhezustand.

5 Punkte

3.7 Eine Punktwolke W_1 von zweidimensional dargestellten Neuronenverbindungen wird durch Anregung auf eine Punktwolke W_1' abgebildet (s. Abb. 2).

Leiten Sie eine Abbildung der Form $\beta: \vec{x} \rightarrow M_\beta \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit $M_\beta = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ her, so dass die Ränder der Punktwolke W_1 auf die Ränder der Punktwolke W_1' abgebildet werden.

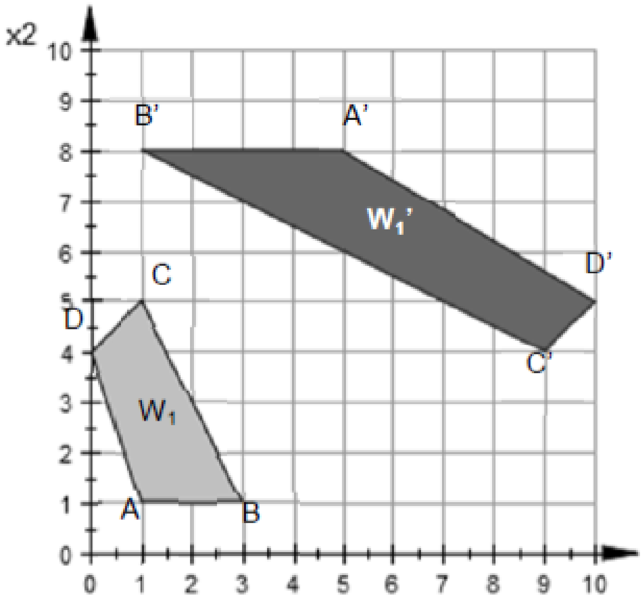

Abb. 2

7 Punkte