5 Fachbegriffe bei statistischen Tests

Das Beispiel Knallkörper hat Sie mit der Denk- und Schlussweise bei einem statistischen Test ein bisschen vertraut gemacht. Und Sie haben bereits zwei wichtige Begriffe (Fehler 1. und 2. Art) kennen gelernt. Hier eine Zusammenfasung:

Zweifel:	Ist die Sendung in Ordung, d. h. ist der Ausschussanteil in unserer Sendung wirklich nicht höher als 4%?
Daten erheben:	Eine Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Knallkörpern prüfen.
Entscheidungsregel:	Sendung ablehnen, wenn die Stichprobe mehr als 13 defekte Exemplare enthält.
Fehler 1. Art:	Wir lehnen die Sendung ab, *obwohl* sie in Ordnung ist : $\boxed{\alpha = P(\text{„Fehler 1. Art bei 4\% Ausschuss“})}$
Fehler 2. Art	Wir akzeptieren die Sendung, obwohl sie *nicht* in Ordnung ist: $\boxed{\beta = P(\text{„Fehler 2. Art bei z.B. 8\% Ausschuss“})}$

In den weiteren Tests wird es sich als hilfreich erweisen, wenn wir die folgenden vier neuen Fachbegriffe in unsere Überlegungen einbauen können:

- Nullhypothese
- Alternativhypothese
- Testgrösse
- Verwerfungsbereich

Sie werden diese Begriffe nicht als abstrakte Definitionen, sondern ebenfalls anhand unseres Qualitätstests kennen lernen. Und Sie werden schon bald sehen, dass es sich dabei nicht um (überflüssigen) Ballast handelt. Im Gegenteil: Die Begriffe werden Ihnen ermöglichen, sich in neuen und anspruchsvollen Testsituationen besser zurecht zu finden.

5.1 Die Nullhypothese

Unter der Nullhypothese (Symbol: H_0) versteht man bei einem statistischen Test die Behauptung, an der man zweifelt oder von der man glaubt, dass sie falsch sei. Man möchte also H_0 eigentlich ablehnen. Man will jedoch nicht vorschnell entscheiden, sondern aufgrund von objektiven Fakten, sodass man auch Personen mit anderer Auffassung überzeugen kann. In unserem Knallkörperbeispiel formulieren wir aufgrund unseres Zweifels:

H_0: „Der Ausschussanteil ist höchstens 4%“

Der (misstrauische) Einkäufer vermutet ja, dass der Ausschussanteil über 4% liegt, und in dieser Vermutung wird er bestärkt, wenn er H_0 ablehnen kann.

Merken Sie sich:

Unter der ***Nullhypothese*** $\boldsymbol{H_0}$ versteht man bei einem statistischen Test die Behauptung (Vermutung), die man *widerlegen* möchte.

Warum nicht direkt beweisen?

Möglicherweise macht Ihnen diese Definition Mühe, weil Sie verständlicherweise den Eindruck haben, man mache im Hinblick auf das Ziel einen Umweg. Warum nicht *direkt* beweisen, dass der Ausschuss grösser als 4% ist?

Beachten Sie, dass man mit Hilfe der Statistik nichts schlüssig *beweisen* kann. Man kann nur *Wahrscheinlichkeiten* berechnen und dann z.B. wie folgt entscheiden: Wenn unter der Voraussetzung von H_0 das Testergebnis eine *kleine* Wahrscheinlichkeit hat, so spricht dies eben gegen diese Hypothese H_0. In diesem Fall verwerfen wir H_0 zugunsten der sog. Alternativ- oder Gegenhypothese H_1 (auf die wir im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen) und wir nehmen die kleine Irrtumswahrscheinlichkeit α in Kauf, einen Fehler 1. Art zu begehen

Übrigens gilt nicht nur in der Statistik, sondern ganz allgemein, dass man eine Theorie anhand von Experimenten nur wiederlegen, aber nicht beweisen kann. Wenn das Experiment mit den Voraussagen übereinstimmt, heisst das nicht, dass die Theorie richtig ist. Es kann ja mehrere verschiedene Theorien geben, die teilweise die gleichen Vorhersagen machen.

Vergleich mit einem Widerspruchsbeweis

Das "Beweis"-Prinzip des statistischen Tests lässt sich mit dem Prinzip des Widerspruchsbeweises vergleichen, das Ihnen sicher schon in der Mathematik begegnet ist – vielleicht gerade in folgendem Beispiel:

Wenn Sie beweisen wollen, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als ein gewöhnlicher Bruch schreiben lässt (Behauptung B_1), so können Sie probehalber das Gegenteil (Behauptung B_0) als richtig annehmen. Aus B_0 folgt dann, dass sich eine gewisse natürliche Zahl auf zwei unterschiedliche Arten in Primfaktoren zerlegen lässt. Das steht in Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Der Widerspruch lässt sich nur lösen, indem Sie die Hypothese B_0 zugunsten der Alternative B_1 fallen lassen.

Dem Widerspruch im Beweis entspricht beim statistischen Test das Ereignis mit der *kleinen* Wahrscheinlichkeit ($\alpha \leq 5\%$).

Aufgabe 5.1:

Max glaubt, daß eine von Moritz verwendete Münze beim Werfen öfter „Zahl“ zeigt als „Bild“. Er beschliesst, sich wie folgt „Klarheit“ zu verschaffen: Zeigt die Münze in 20 Würfen mehr als beispielsweise 14-mal „Zahl“, so wird er seinen Verdacht als erhärtet betrachten.

Wie lautet in diesem Beispiel die Nullhypothese H_0?

5.2 Die Alternativhypothese (Gegenhypothese)

In unserem Knallkörper-Beispiel möchten wir H_0 (="höchstens 4% Ausschuss") ablehnen, weil wir „vermuten“ (die Gründe dafür sind, wie gesagt, unwesentlich), daß die Qualität schlechter ist als vereinbart, d. h. dass der Ausschussanteil grösser als 4% ist. Als Alternativhypothese (Symbol: H_1) postulieren wir:

H_1: „Der Ausschussanteil ist grösser als 4%“

Es ist nicht falsch, wenn Sie den Eindruck haben, dass eigentlich diese Alternativhypothese H_1 am Anfang unserer Überlegungen steht und dass H_0 mehr oder weniger als Gegenteil davon nachträglich formuliert wird.

Allgemein können wir sagen:

Unter der ***Alternativ- oder Gegenhypothese H_1*** versteht man bei einem statistischen Test die Behauptung, die man akzeptiert, wenn H_0 verworfen wird.

Wenn Statistikfachleute H_0 ablehnen können, fühlen Sie sich in der starken Position: Die *kleine* Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Testergebnisses spricht gegen H_0 und somit für H_1. Aber auf keinen Fall dürfen Sie sagen, es sei *bewiesen*, dass H_0 falsch und H_1 richtig sei.

Und wenn das Testergebnis *nicht* so ausfällt, dass Sie H_0 verwerfen können, ist ebenfalls nicht bewiesen, dass H_0 zutrifft. Man drückt das auch sprachlich aus, indem man neutraler sagt, man *behalte* H_0 (vorläufig) bei, bzw. man *verwerfe* H_0 *nicht*.

Die Alternativhypothese H_1 beeinflusst zusammen mit H_0 den sog. Verwerfungsbereich, den wir weiter unten besprechen werden.

Aufgabe 5.2

Wir kommen auf das Max&Moritz-Problem zurück. Bitte nehmen Sie dieses ebenso einfache wie lehrreiche Beispiel ernst und vor allem: Nehmen sie falsche Antworten nicht auf die leichte Schulter.....

Max glaubt, wie gesagt, daß eine von Moritz verwendete Münze beim Werfen öfter „Zahl" zeigt als „Bild". Er beschließt, sich wie folgt „Klarheit" zu verschaffen: Zeigt die Münze in 20 Würfen mehr als 14-mal „Zahl", so wird er seinen Verdacht als erhärtet betrachten.

Wie lautet in diesem Beispiel die Alternativhypothese H_1?

5.3 Die Testgrösse

Unser Test ist ein Zufallsexperiment. Dabei achten wir nur auf die zufallsbedingte *Anzahl* der *defekten* Knallkörper in der Stichprobe. Diese Anzahl ist also eine sog. Zufallsgrösse, man nennt sie die *Testgrösse* (Symbol: Z). Aufgrund des Wertes von Z entscheiden wir, ob wir H_0 verwerfen oder beibehalten.

Merken wir uns:

Unter der ***Testgrösse Z*** versteht man die beim statistischen Test ermittelte Zahl, von deren Wert schliesslich abhängt, ob H_0 verworfen oder eben nicht verworfen wird.

Aufgabe 5.3

Welche Testgrösse Z verwendet Max? Bitte Z möglichst präzis definieren.

5.4 Der Verwerfungsbereich - der Annahmebereich

H_0 wird abgelehnt, wenn ein Ereignis eintritt, das eine *kleine* Wahrscheinlichkeit hat, falls H_0 gelten würde. Bei unserem Knallkörperbeispiel wollen wir H_0 verwerfen, falls wir mehr als 13 defekte Raketen in der Stichprobe finden, d.h. falls

$$\boxed{Z > 13}$$

ist oder m. a. W., falls die Testgrösse Z einen Wert aus dem Intervall in den ganzen Zahlen

$$\boxed{V = \{14, 15, \ldots, 199, 200\}}$$

annimmt (Abb. 5.1). Wir nennen dieses Intervall den Verwerfungsbereich V; üblich ist auch die Bezeichnung *kritischer Bereich K*.

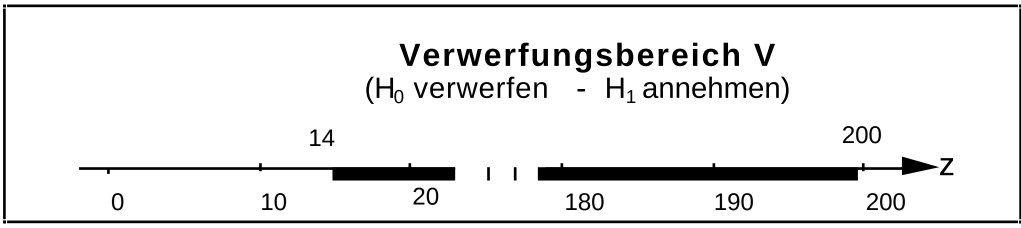

Fig. 5.1: Der Verwerfungsbereich beim Knallkörperbeispiel (es gehören nur die überstrichenen *ganzen* Zahlen dazu).

Merken wir uns:

Unter dem ***Verwerfungsbereich V*** versteht man bei einem statistischen Test die im *voraus* festgelegte Zahlenmenge mit der folgenden Eigenschaft:

Falls H_0 zutrifft, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Testgrösse Z in V liegt, klein. Wird der Test durchgeführt und kommt Z in V zu liegen (Z V), so wird H_0 zugunsten von H_1 verworfen.

Analog ist der Annahmebereich definiert: Wenn der Wert der Testgrösse nicht in V (Z V), sondern in das Intervall

$$\{0, 1, ..., 12, 13\}$$

fällt, wird H_0 nicht verworfen, sondern H_0 wird angenommen; besser ist, wie gesagt, das Wort „beibehalten“ (Fig. 5.2). Für den Annahmebereich führen wir *kein* eigenes Symbol ein.

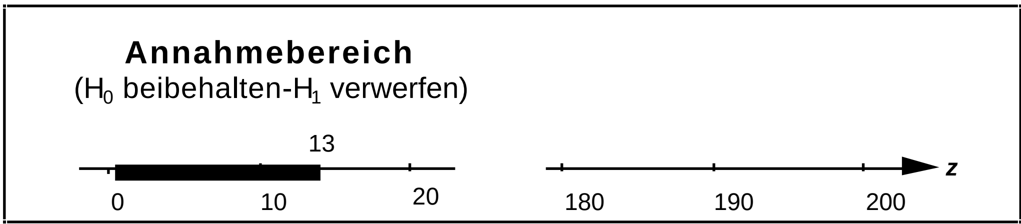

Fig. 5.2: Der Annahmebereich im Knallkörperbeispiel

Aufgabe 5.4

Max&Moritz-Probem: Welchen Verwerfungsbereich V wählt Max? Zeichnen Sie!

Versuchen Sie nun zum Schluss, die folgende Lernkontrolle vorerst ohne Zurückblättern zu lösen. Kontrollieren Sie so, wie zuverlässig Sie die neuen Begriffe und Zusammenhänge bereits intus haben.