Aufgaben zum Thema „Vektorräume“:

Vektorräume

2 Überprüfen Sie, ob die Menge V zusammen mit der für den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definierten Addition und Multiplikation ein Vektorraum ist.

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$ b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$ c) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$

3 Welche dieser Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ ist zusammen mit der für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definierten Addition und Multiplikation jeweils ein Vektorraum

$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 + x_2 = 0 \right\}$; $B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 + x_2 = 1 \right\}$; $C = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 + x_2 > 0 \right\}$;

$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \cdot x_2 = 0 \right\}$; $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 = x_2 \right\}$; $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, |x_1| = |x_2| \right\}$?

4 Zeigen Sie, dass die Menge aller 4×4-Matrizen ($n \times n$-Matrizen, $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt) zusammen mit der Addition und Multiplikation von Fig. 1 der vorherigen Seite ein Vektorraum ist.

5 Es ist n eine fest gewählte natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome höchstens n-ten Grades $P_n = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ zusammen mit der Addition $(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0) = (a_n + b_n) x^n + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$ und der Multiplikation $r \cdot (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = r a_n x^n + \ldots + r a_1 x + r a_0$ ein Vektorraum ist.

6 Begründen Sie:

a) Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein Vektorraum.
Geben Sie zuerst die Verknüpfungen + und · an (vergleiche Seite 14).

b) Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS ist im Allgemeinen kein Vektorraum.
Geben Sie zuerst die Verknüpfungen + und · an (vergleiche Seite 15).

7 Zeigen Sie:
Die Menge aller reellen Zahlenfolgen bildet zusammen mit der Addition $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ und der Multiplikation $r \cdot (a_n) = (r \cdot a_n)$ einen Vektorraum.

8 a) Zeigen Sie: Die Menge aller Pfeile mit gemeinsamem Anfangspunkt bildet zusammen mit der bekannten Pfeiladdition und Multiplikation eines Pfeiles mit einer reellen Zahl einen Vektorraum.

b) Begründen Sie: Alle möglichen Kräfte, die an einem festen Punkt angreifen können, bilden einen Vektorraum (Fig. 1).

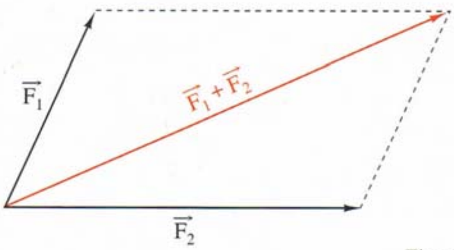

Fig. 1

9 a) Erläutern Sie: Ist n eine fest gewählte natürliche Zahl, so ist $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ zusammen mit der vom $\mathbb{R}^3$ übertragenen Addition und Multiplikation ein Vektorraum.

b) Begründen Sie: $\mathbb{R}$ ist zusammen mit + und · ein Vektorraum.

10 Gegeben ist die Menge $V = \mathbb{R}^2$ mit der bekannten Addition sowie der Multiplikation $r \cdot \vec{a} = \vec{o}$ für alle $\vec{a} \in V$ und alle $r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
V ist zusammen mit dieser Addition und Multiplikation kein Vektorraum.

Eigenschaften von Vektorräumen

11 $(V, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum mit dem Nullelement $\vec{o}$.
Zeigen Sie:
a) Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $r \cdot \vec{o} = \vec{o}$.
b) Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in V$ gilt: Aus $r \cdot \vec{a} = \vec{o}$ folgt $r = 0$ oder $\vec{a} = \vec{o}$.
c) Für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

12 $(V, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum. Beweisen Sie:
Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:
a) Aus $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ folgt $\vec{b} = \vec{c}$.
b) Aus $r \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{b}$ mit $r \neq 0$ folgt $\vec{a} = \vec{b}$.
c) Aus $r \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a}$ mit $\vec{a} \neq \vec{o}$ folgt $r = s$.

13 $(V, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ die Gleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung besitzt.