Beispiel 1: (Nachweis eines Vektorraumes)

Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome maximal 2. Grades $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ mit der Addition $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$ und der Multiplikation $r \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1) = ra_1x^2 + rb_1x + rc_1$ ein Vektorraum ist.

Lösung:

Zuerst überprüft man, ob die Addition zweier Elemente aus P_2 sowie die Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Element aus P_2 jeweils wieder ein Element aus P_2 ergibt:

$$\text{Es ist } (a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\text{und } r \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1) = ra_1x^2 + rb_1x + rc_1;$$

hierbei sind $(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$ und $ra_1x^2 + rb_1x + rc_1$ ebenfalls Elemente von P_2 .

Zum Nachweis der restlichen Vektorraumeigenschaften nutzt man aus, dass für die Koeffizienten die Rechenregeln der reellen Zahlen gelten.

Beispiel 2: (Überprüfung, ob ein Vektorraum vorliegt)

$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Überprüfen Sie, ob V zusammen mit der für den

Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definierten Addition und Multiplikation ebenfalls ein Vektorraum ist.

Lösung:

Es liegt kein Vektorraum vor, denn addiert man zwei Elemente aus V , so erhält man nicht

wieder ein Element aus V , z. B.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ ist kein Element aus V .

Beispiel 3: (Beweis einer Vektorraumeigenschaft)

Zeigen Sie:

Ist $\vec{0}$ das Nullelement eines Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, so gilt für alle $\vec{a}$ aus V : $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Lösung:

Es gilt für alle $\vec{a}$ aus V : $(0 + 1) \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} + \vec{a}$, also ist $\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} + \vec{a}$.

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung $-\vec{a}$, so erhält man $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0 \cdot \vec{a} + \vec{a} + (-\vec{a})$, und somit gilt $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$.