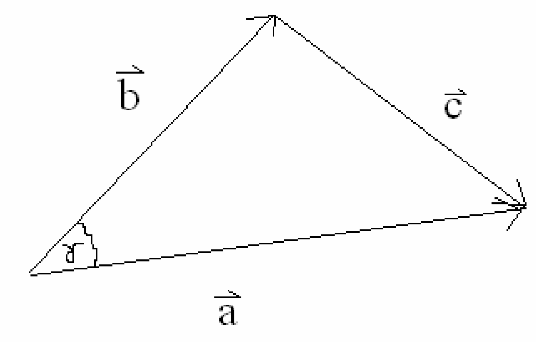
Herleitung des Skalarprodukts

Wie berechnet man den Winkel zwischen 2 Vektoren (etwa den Winkel unter dem sich 2 Geraden schneiden)? Dazu verwendet man das sog. „Skalarprodukt“. Die folgende kleine Rechnung leitet es her!

Zunächst: Es gilt der sog. „Kosinussatz“ – eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Die Bezeichnungen sind im Dreieck rechts erläutert. Hier sind die Seiten jedoch Vektoren! Die Seitenlänge c bezeichnet also den Betrag des Vektors: $c = |\vec{c}\,|$ etc…

Klar: Der Vektor $\vec{c}$ kann durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgedrückt werden: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.
Außerdem können wir die Vektoren durch ihre Komponenten ausdrücken:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

Damit kann der Kosinussatz umgeschrieben werden:

$$(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - 2\,|\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,| \cos\gamma$$

...

$$-2a_x b_x - 2a_y b_y = -2\,|\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,| \cos\gamma$$

$$a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,| \cos\gamma$$

In der Zeile „…“ wurden die Klammern der linken Gleichungsseite ausmultipliziert und die Gleichung vereinfacht. Am Ende steht ein ganz einfacher Ausdruck. Man definiert:

$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}\,| \cdot |\vec{b}\,| \cos\gamma}$ “*Skalarprodukt* der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ “

Unsere Rechnung hat ebenfalls gezeigt, wie man $\vec{a} \circ \vec{b}$ ausrechnet, wenn die Komponenten der Vektoren bekannt sind: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Anmerkungen:

- Es gilt das Kommutativ- und Distributivgesetz für diese „Multiplikation“.
- Das Ergebnis dieses Produktes ist kein Vektor!
- Weil der Kosinus von 90^o Null ist, gilt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$