Windschiefe Geraden

$g_1 : \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot s \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $g_2 : \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot t \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\rightarrow k = \frac{7}{4}$ $\rightarrow k = \frac{8}{5}$ $\rightarrow k = \frac{5}{6}$	Die Geraden sind nicht kolinear, da die Stützvektoren kein Vielfaches von einander sind.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot s \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot t \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ I $-4\,s + 7\,t = -2 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = -\frac{2}{7} + \frac{4}{7}\,s\right]\right]$ II $-5\,s + 8\,t = -2$ III $-6\,s + 5\,t = -2$	Die zwei Geraden müssen nun gleichgesetzt werden und dann mit einem LGS aufgelöst werden.
II$-5\,s + 8\left(-\frac{2}{7} + \frac{4}{7}\,s\right) = -2 \xrightarrow{\text{solve for s}} \left[\left[s = -\frac{2}{3}\right]\right]$ III$-6\,s + 5\left(-\frac{2}{7} + \frac{4}{7}\right) = -2 \xrightarrow{\text{solve for s}} \left[\left[s = \frac{4}{7}\right]\right]$ $\rightarrow L = \{\ \}$	Da s zwei unterschiedliche Werte hat, ist die Gleichung nicht lösbar. Nicht kolinear und ein nicht lösbares LGS $\rightarrow$ Windschief

Parallel

$g_1 : \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $g_2 : \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow k = 2$	Die zwei Geraden sind kolinear, da sie das Vielfache von einander sind.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3 \end{bmatrix}$	Die zwei Geraden müssen nun gleichgesetzt werden und dann mit einem LGS aufgelöst werden.
I $-4\,s - 2\,t = -2 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 1 - 2\,s]]$ II $-5\,s + 2.5\,t = -2$ III $-6\,s + 3\,t = -2$ II $-5\,s + 2.5\,(1 - 2\,s) = -2 \xrightarrow{\text{solve for s}} [[s = 0.4500000000]]$ III $-6\,s + 3\,(1 - 2\,s) = -2 \xrightarrow{\text{solve for s}} \left[\left[s = \frac{5}{12}\right]\right]$ $\rightarrow L = \{\ \}$	Da s zwei unterschiedliche Werte hat, ist die Gleichung nicht lösbar. Kolinear und nicht lösbares LGS $\rightarrow$ Parallel

Identisch

$g_1 : \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $g_2 : \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} \rightarrow k = -0.5$	Die zwei Geraden sind kolinear, da sie das Vielfache von einander sind.
$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\text{I}\; 2\,r + 1 = -1 \xrightarrow{\text{solve for r}} [[r = -1]]$ $\text{II}\; r + 3 = 2 \xrightarrow{\text{solve for r}} [[r = -1]]$ $\text{III}\; 4\,r - 1 = -5 \xrightarrow{\text{solve for r}} [[r = -1]]$	Um festzustellen ob die Geraden identisch oder parallel sind, guckt man ob sie einen gemeinsamen Punkt haben. Falls ja, haben sie unendlich viele Punkte und sind identisch. Für den einen Punkt kann man den Stützvektor nehmen, da er azf der Geraden ist.
$\rightarrow L = \{-1\}$	Das LGS hat eine eindeutige Lösung. Somit ist der Punkt auf der Geraden und sie sind identisch.

Sich schneidend

$g_1 : \vec{x} = \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + r\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$ $g_2 : \vec{x} = \begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}6\\8\\20\end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix}6\\8\\20\end{bmatrix} = k\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$ $\rightarrow k = 3$ $\rightarrow k = 8$ $\rightarrow k = 5$	Die Vektoren sind nich koleniar.
$\begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}6\\8\\20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + r\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} = -t\cdot\begin{bmatrix}6\\8\\20\end{bmatrix} + r\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$	LGS aufstellen
I $-6\,t + 2\,r = 3 \xrightarrow{\text{solve for r}} \left[\left[r = \frac{3}{2} + 3\,t\right]\right]$ II $-8\,t + r = -1$ III $-20\,t + 4\,r = 2$ II $-8\,t + \frac{3}{2} + 3\,t = -1 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = \frac{1}{2}\right]\right]$ III $-20\,t + 4\left(\frac{3}{2} + 3\,t\right) = 2 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = \frac{1}{2}\right]\right]$ $\rightarrow L = \{3, 0.5\}$	LGS hat eine eindeutige Lösung → Vektoren schneiden sich t wird in die Gleichung eingesetzt um den Schnittpunkt auszurechnen.
$\vec{s} = \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\6\\11\end{bmatrix}$	Der Schnittpunkt liegt bei $\begin{bmatrix}7\\6\\11\end{bmatrix}$