Stochastik im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II

Autoren: Andreas Koch, Georg-Cantor-Gymnasium Halle
Willi Lichtenberg, LISA Halle
Hans-Peter Pommeranz, LISA Halle

Herausgeber: Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt (LISA)

Redaktion: Willi Lichtenberg, LISA Halle

Layout: Kathrin Seidel

ISSN: 1438-4787

LISA Halle (Saale), 2000 (0007) – 1. Auflage - 300

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Medikamente werden klinisch getestet, Meinungsforschungsinstitute können auf wenige Prozentpunkte genau den Ausgang von Wahlen vorhersagen, das Kaufverhalten von Kunden wird statistisch analysiert, Risiken in Lebensversicherungen werden statistisch berechnet, Aktienentwicklungen werden statistisch ausgewertet. Dies sind nur einige Beispiele dafür, welch herausragenden Platz, oft unbewusst wahrgenommen, statistische Verfahren und die Kenntnis von Wahrscheinlichkeiten im täglichen Leben haben. Der amerikanische Mathematiker Ian Hacking äußerte 1984 in einem Beitrag in der Zeitschrift Science hierzu: „Die ruhigen Statistiker haben unsere Welt verändert, durch Veränderung der Art, wie wir über sie argumentieren, experimentieren und unsere Meinung bilden – und nicht durch die Entdeckung neuer Fakten und technischer Entwicklungen".

In den mit dem Schuljahr 1999/2000 in Kraft getretenen Rahmenrichtlinien Mathematik Gymnasium und Fachgymnasium von Sachsen-Anhalt wurde der gewachsenen Bedeutung der Stochastik stärker Rechnung getragen. Der Lehrgang Stochastik in der Sekundarstufe II stellt mit seiner verbindlichen Anlage neue Anforderungen an die Unterrichtstätigkeit der Lehrkräfte.

Mit dem vorliegenden Heft 8 der Reihe „DIALOG" des LISA ist beabsichtigt, die vertiefende Beschäftigung mit stochastischen Themen im Unterricht der Sekundarstufe II des Gymnasiums zu unterstützen. Mit den vorliegenden Aufgaben und Hinweisen kann keine umfassende und erschöpfende Aufarbeitung der Themen der Stochastik gegeben werden. Die Absicht der Autoren ist es, für die zentralen Themen der Stochastik in den Schuljahrgängen 11 bis 13 gemäß Rahmenrichtlinien exemplarisch Aufgaben vorzustellen, die auch in Varianten dargestellt Anregungen für den Unterricht geben.

Auf umfangreiche fachliche oder didaktische Erläuterungen wurde im Interesse der Nachnutzbarkeit der Aufgabenbeispiele verzichtet. Lediglich einige kurze Bemerkungen zur didaktischen Einordnung bzw. zum fachlichen Hintergrund sind zu Beginn jeden Themas gegeben. Die Beispiele sind überwiegend im Unterricht erprobt.

Mit der Herausgabe des Heftes hoffen wir, Impulse für eine Diskussion im Lande zu stochastischen Themen zu geben, die durch das eingerichtete Diskussionsforum des LISA im Internet eine geeignete Plattform findet.

An dieser Stelle sei den Fachbetreuerinnen und Fachbetreuern für Mathematik und Physik unseres Landes gedankt, die anlässlich eines Fortbildungskurses im Dezember 1999 wertvolle, konstruktive Hinweise und Anregungen zur Gestaltung des Heftes gegeben haben.

Ich würde mich freuen, wenn über die Beschäftigung mit diesem Heft Ihr Bedürfnis geweckt wird, aktiv an der Diskussion um stochastische Inhalte im Unterricht der Sekundarstufe II teilzunehmen. Im Diskussionsforum Stochastik des LISA auf den Internetseiten http://server1.schule.uni-halle.de/~lisa/stochast finden Sie weitere Materialien, Hinweise und interessante Links zu weiteren Internetangeboten. Ich freue mich auf Ihren Besuch und möchte Sie ermuntern, die Möglichkeiten der Diskussion aktiv zu nutzen.

Dr. Eisenmann
Präsident

1 Stochastik als Gegenstand des Mathematikunterrichts

Die besondere Rolle, die stochastische Inhalte in der Allgemeinbildung der Heranwachsenden spielen sollte, schlägt sich in zahlreicher didaktischer Literatur (u. a. Kütting 1994) und bildungspolitischen Materialien der letzten Jahre nieder.
In diesem Sinne wird im Zusammenhang mit zu erwerbenden grundlegenden Kompetenzen der Heranwachsenden neben den Kulturtechniken Schreiben, Lesen und Rechnen von Datenkompetenz gesprochen. Die Fähigkeit, aus vorgegebenen Daten in unterschiedlichsten Darstellungen den Informationsgehalt ablesen und die Gültigkeit von Interpretationen einschätzen zu können, wird im Zeitalter der elektronischen Medien und der globalen Kommunikation immer wichtiger. So wird im internationalen Rahmenkonzept der PISA-Studie (PISA: Programme for International Student Assessment, Baumert u. a. 1999) von den Leitideen „Zufall“, „Veränderung und Wachstum“, „Abhängigkeit und Beziehungen“ gesprochen, die im Zusammenhang mit der Untersuchung der mathematischen Grundbildung neben anderen jahrgangsübergreifenden Konzepten („big ideas“) von Bedeutung sind.

Mit der Überarbeitung der Rahmenrichtlinien in Sachsen-Anhalt 1999 wurden diese Schwerpunkte in den Zielen und Inhalten deutlicher ausgewiesen (vgl. /1/,/2/). Neben den jahrgangsübergreifenden Schwerpunkten Arbeiten mit Zahlen und Größen, Gleichungen und Ungleichungen, Zuordnungen und Funktionen sowie Geometrie hat die Stochastik einen festen Platz in der Lehrgangsgestaltung des Mathematikunterrichts gefunden. Eine Beschreibung der Qualifikationen, die im schuljahrgangsübergreifenden Schwerpunkt Stochastik vermittelt werden sollen, findet man in den Rahmenrichtlinien (vgl. /1/, S. 11 ff.). Die Abfolge der Themen des Schwerpunktes Stochastik für das Gymnasium ist sowohl in der Sekundarstufe I als auch in der Sekundarstufe II von einem Wechsel und Zusammenspiel der beiden Säulen der Stochastik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik, geprägt. Die zu vermittelnden Qualifikationen und die in den Rahmenrichtlinien dargestellten Ziele und Inhalte stellen das Gerüst für die vorliegende Aufgabenauswahl dar.
In der Sekundarstufe I werden grundlegende Kenntnisse und Fähigkeiten zum Begriff Wahrscheinlichkeit und Zufall, zu einfachen Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten sowie zur Auswertung von Daten mit Hilfe einfacher statistischer Methoden vermittelt. Ein erster Einblick in Verteilungen von Häufigkeiten und Zufallsgrößen wird in den Schuljahrgängen 9/10 gegeben.
In der Sekundarstufe II wurden die Inhalte des Stoffgebietes Stochastik in ihrer Gliederung und Struktur neu gestaltet. Erstmals ist ein Lehrgang Stochastik in der Sekundarstufe II verbindlich zu unterrichten. Ausgehend vom Thema Wahrscheinlichkeit, Rechnen mit Wahr-

scheinlichkeiten im Schuljahrgang 11 werden im Kurs der Schuljahrgänge 12/13 die Themen Zufallsgrößen und Statistik behandelt. Hierbei wird der Schwerpunkt auf die Untersuchung von Daten mittels einfacher, grundlegender Verfahren der beurteilenden Statistik gelegt. Mit dieser Lehrgangskonzeption soll erreicht werden, dass die Schülerinnen und Schüler an ausgewählten Beispielen die Anwendung mathematischer Methoden und Verfahren zur Beschreibung und Analyse von Ausschnitten der Realität erfahren. Insbesondere Fragen der Modellbildung und der Interpretation der Ergebnisse nach Bearbeitung des Modells stehen im Mittelpunkt.

Die Gliederung des Heftes folgt im Wesentlichen den Themen der Rahmenrichtlinien der Schuljahrgänge 11 bis 13. Alle Aufgaben sind mit Lösungsvorschlägen, z. T. auch mit Varianten, aufbereitet. Die Hinweise zum methodischen Einsatz sind vor allem für Fachlehrkräfte gedacht, die erstmalig den Zugang zur Thematik suchen. An einigen Stellen sind Themen aufgegriffen, die Erweiterungen und Vertiefungen des verbindlichen Inhalts der Rahmenrichtlinien darstellen. Diese Beispiele sollen Mut machen, auch in projektorientierter Form mit den Schülerinnen und Schülern tiefer in die stochastischen Themen einzudringen.

2 Einblick in das Axiomensystem von Kolmogorov

Bei der Beschäftigung mit zufälligen Erscheinungen im Mathematikunterricht ist es für Schülerinnen und Schüler oftmals überraschend festzustellen, dass Aussagen über die Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten einer mathematischen Berechnung zugänglich sind. Mit den Axiomen von Kolmogorov (russ. Mathematiker 1903-1987) zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind Aussagen über die Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten und über Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten möglich, die reellen Werte von Wahrscheinlichkeiten bei verschiedenen zufälligen Vorgängen können jedoch hiermit nicht berechnet werden. Diese sind immer aus dem Kontext des Vorgangs abzuleiten, z. B. aus der Symmetrie eines Würfels, aus langzeitlichen Erfahrungen, aus experimentellen Ergebnissen. Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung muss die Axiome des Kolmogorovschen Systems erfüllen. Ebenso erfüllen die relativen Häufigkeiten eines zufälligen Vorgangs dieses Axiomensystem (AS). Das AS von Kolmogorov wird somit zu einem wichtigen Prüfmittel, ob der modellierte Vorgang einer Berechnung zugänglich ist oder nicht.
Obwohl die Schülerinnen und Schüler indirekt mit anderen AS in der Mathematik vertraut gemacht werden (AS von Peano - 1858-1932 - zu der Beschaffenheit von natürlichen Zahlen, AS von Euklid - 365-300 v.u.Z. - zur räumlichen Geometrie), bleiben doch Eigenschaften und Charakter von Axiomen weitestgehend unbekannt, erst recht werden die AS selbst nicht als solche thematisiert. Mit dem AS von Kolmogorov sind einfache Möglichkeiten gegeben, Axiome als sinnvolle Festlegungen zur Beschreibung von Sachverhalten zu begreifen. In den unten aufgenommenen Beispielen geht es um die Untersuchung der Gültigkeit dieser Axiome. Das erste Beispiel ist stärker aus theoretischer Sicht angelegt, wohingegen im zweiten Beispiel das AS nicht als solches explizit genannt werden muss, dennoch werden Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen als notwendige Voraussetzung zur möglichen Berechnung von verknüpften Wahrscheinlichkeiten herausgearbeitet. Mit diesem zweiten Beispiel wird besonders deutlich, dass meist unbewusst die Gültigkeit der Axiome Kolmogorovs vorausgesetzt wird.

Die Verwendung der Mengenalgebra ist nicht notwendig für den Unterricht, sie verkürzt jedoch die Schreibarbeit und hilft mit ihrer exakten Anwendung, Verständnis für die Verwendung von symbolischen Schreibweisen zu entwickeln.

Fachliche Hinweise

Axiom A I: $P(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)

Einem Ereignis A wird eine positive reelle Zahl zugeordnet.

Axiom A II: $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgend eines Ereignisses von allen möglichen Ereignissen ist 1. Dies ist das sichere Ereignis.

Axiom A III: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $A \cap B = \emptyset$ (Additivität)

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten sowohl eines Ereignisses A als auch eines Ereignisses B ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten beider Ereignisse unter der Bedingung, dass beide Ereignisse unvereinbar sind.

2.1 Eignungstest

Bei einem Eignungstest muss die Testperson aus sechs verschiedenen Fragen, die je zu einem Stoffgebiet gestellt werden, zufällig zwei Fragen ziehen. Die Testperson hat sich nur auf vier der in Frage kommenden sechs Stoffgebiete vorbereitet. Betrachtet werden die Ereignisse:

A_i: Testperson ist auf das Stoffgebiet der i-ten Frage vorbereitet.

$\overline{A_i}$: Testperson ist auf das Stoffgebiet der i-ten Frage **nicht** vorbereitet.

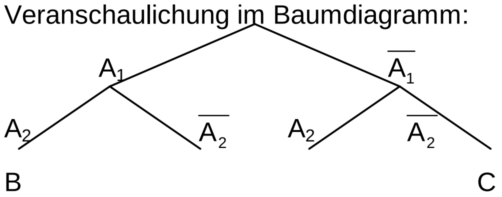
B: Testperson ist auf das Stoffgebiet beider Fragen vorbereitet.

C: Testperson ist auf kein Stoffgebiet der beiden Fragen vorbereitet.

Zeigen Sie, dass für folgenden zufälligen Vorgang die Axiome von Kolmogorov für die Wahrscheinlichkeitsverteilung gelten. Veranschaulichen Sie den Vorgang in einem Baumdiagramm und kennzeichnen Sie die Ereignisse A_i, B, C.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
		<u>Vorkenntnisse:</u> Begriff Definition Der Beginn der Analyse kann günstig mit der Darstellung des Vorganges im Baumdiagramm erfolgen.
<u>Prüfung Axiom AI:</u> $P(A_i) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (beim ersten Ziehen) $P(\overline{A_i}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (beim ersten Ziehen) $P(B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ $P(C) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ Axiom ist erfüllt, alle vorkommenden W. liegen zwischen 0 und 1	I	
<u>Prüfung Axiom AII:</u> Zum Ergebnisraum Ω gehören folgende Ergebnisse: $\Omega=\{A_1A_2;\ A_1\overline{A_2};\ \overline{A_1}A_2;\ \overline{A_1}\ \overline{A_2}\}$ $P(A_1A_2)=P(B)=\frac{6}{15}$ $P(A_1\overline{A_2})=\frac{4}{15}$ $P(\overline{A_1}A_2)=\frac{4}{15}$	II	Darstellung der Elementarereignisse auch z. B. - T. auf erste und zweite Frage vorbereitet - T. nur auf erste Frage vorbereitet, ... Plausibel machen, dass genau eines der Ergebnisse eintritt, damit stellt die Vereinigung der vier Ergebnisse das sichere Ereignis dar.

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
$P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}) = P(C) = \frac{1}{15}$ mit $P(\Omega) = 1$ w. A.		
<u>Prüfung Axiom AIII:</u> Als Beispiel für die Summe unvereinbarer Ereignisse wird ausgewählt: $P(B \cup C) = P(B) + P(C),\ B \cap C = \varnothing$ $= \frac{7}{15}$ w. A.	II/III	Plausibel machen der Bedingung der Unvereinbarkeit von B und C Eine Schwierigkeit liegt im Erkennen der möglichen Verknüpfung von B und C (auch andere Ereignisse möglich).
Veranschaulichung im Baumdiagramm:  	II	Zur Veranschaulichung von Axiom A III könnten im Baumdiagramm die W. eingetragen werden und die Summe P(B)+P(C) gebildet werden.
		<u>Möglichkeiten für Vertiefungen:</u> Anhand des obigen oder eines anderen Beispiels kann plausibel gemacht werden, dass ein Axiomen-system: - widerspruchsfrei, - in sich geschlossen und - vollständig sein muss.

2.2 Schach Matt

Benny und Claudia spielen in einem Schachverein regelmäßig Schach. Aus einer Vielzahl von Schachspielen lässt sich die Spielstärke einschätzen, indem Wahrscheinlichkeiten für Sieg, Niederlage und Remis aus den Häufigkeiten der bisherigen Spiele berechnet werden. Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für Sieg, Remis und Niederlage von Benny und Claudia:

	p für Sieg	p für Remis	p für Niederlage
Benny	40%	10%	50%
Claudia	60%	15%	25%

Benny und Claudia spielen eine Partie Schach gegeneinander. Es sei angenommen, dass jede Partie entsprechend der angegebenen Wahrscheinlichkeiten zufällig ausgeht.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
das Ereignis B_{S+R}: „Benny gewinnt oder spielt Remis“ eintritt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder das Ereignis
B_N: „Benny gewinnt“ oder das Ereignis
C_S: „Claudia gewinnt“, eintritt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis B_R: „Benny spielt Remis“ eintritt.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse in den Teilaufgaben b) und c) miteinander und formulieren Sie Schlussfolgerungen zum Sachverhalt.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
  Elementarereignisse bezeichnen: B_S: Benny gewinnt, B_R: Benny spielt Remis, B_N: Benny verliert (analog für Claudia) Teilaufgabe a) $P(B_{S+R}) = P(B_S)+ P(B_R)$ $= 40\%+10\%$ $= 50\%$	 I	Vorkenntnisse: Begriff Definition, Wahrscheinlichkeiten, Produktregel Es könnte ein einstufiges Baumdiagramm zur Veranschaulichung verwendet werden. Auf die Unvereinbarkeit von B_S und B_R sollte hingewiesen werden.
Teilaufgabe b) $P(B_S \cup C_S) = P(B_S) + P(C_S)$ $= 40\%+60\%$ $= 100\%$	II	Das Ergebnis scheint zunächst in Ordnung, bei der Bearbeitung von c) wird das Problem deutlicher.
Teilaufgabe c) $P(B_R) = 10\%$		

Lösungsschritte	AFB	Hinweise
Teilaufgabe d) Bei ein und demselben Vorgang (Partie Schach zwischen Benny und Claudia) ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse scheinbar größer als 100%. Dies ist ein logischer Widerspruch. *Schlussfolgerung:* Für diesen zufälligen Vorgang lassen sich die Regeln für das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten für verknüpfte Ereignisse nicht anwenden.		Ohne das Axiomensystem von Kolmogorov explizit zu nennen, wird ein Widerspruch zum Axiom A II deutlich, wonach die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse eines zufälligen Vorgangs gleich 1 (bzw. 100%) sein müssen. Dieser Widerspruch ergibt sich auch, wenn die jeweiligen Gegenereignisse betrachtet werden.

Hinweis:
Bei der Analyse der angegebenen Wahrscheinlichkeiten für Benny und Claudia sind offensichtliche Widersprüche zu finden: Die Ereignisse Benny gewinnt und Claudia verliert sind bei einer Partie gegeneinander identisch, haben aber unterschiedliche Werte für die Wahrscheinlichkeit. Ein möglicher Lösungsweg könnte sein, zur näherungsweisen Berechnung der Wahrscheinlichkeiten Mittelwerte heranzuziehen (z. B. $P(B_S)=P(C_V)=32,5\%$, ...). Deutlich werden muss allerdings, dass der angegebene Sachverhalt nicht exakt durch Wahrscheinlichkeitsberechnungen erschließbar ist, weil notwendige Bedingungen für einen zufälligen Vorgang nicht erfüllt sind (Axiom A II).

Eine zweite Variante könnte in ähnlicher Weise behandelt werden und führt zu analogen Erkenntnissen:

Anne und Benny spielen in einer Mannschaft in einem Schachturnier. Nach der Hälfte der Spiele des Turniers ermitteln sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für sich aus den Häufigkeiten der bisherigen Spiele. Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für Sieg, Remis und Niederlage jedes Schachspielers:

	p für Sieg	p für Remis	p für Niederlage
Anne	0,55	0,2	0,25
Benny	0,5	0,15	0,35

Es sei angenommen, dass jede weitere Partie entsprechend der angegebenen Wahrscheinlichkeiten zufällig ausgeht.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
das Ereignis A_{S+R}: „Anne gewinnt oder spielt Remis“ eintritt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Ereignisse A_S: „Anne gewinnt“ und B_S: „Benny gewinnt“ gleichzeitig eintreten. Formulieren Sie Schlussfolgerungen zum Sachverhalt.

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für den ersten Zugang zur Problematik sind einfach strukturierte Aufgaben zu empfehlen. Hier kann die Konzentration auf das Wesentliche erfolgen. Mit Hilfe des Baumdiagramms können zunächst Aufgaben bearbeitet werden, ohne dass die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit, der Multiplikationssatz, der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit sowie der Satz von Bayes bekannt sind. Auf diesem Wege kann das Verständnis für die später einzuführenden Formeln vorbereitet werden. Die Bearbeitung derartiger Aufgaben kann stets durch inhaltliche Überlegungen erfolgen. Die Schülerinnen und Schüler sollten dazu angehalten werden, Möglichkeiten der grafischen oder tabellarischen Darstellung einzusetzen.

Fachliche Hinweise

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ mit $P(A)>0$, $P(B)>0$

Es wird hiermit die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B eintritt, wobei sich beide Ereignisse ausschließen (1. Pfadregel).

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(A) = P(A \cap B_1) + ... + P(A \cap B_n)$, $n \in N$ mit $P(B)>0$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zum Ereignis A führen (2. Pfadregel).

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ mit $P(A) > 0$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B unter der Bedingung A ist gleich dem Quotienten aus der Wahrscheinlichkeit für den Pfad zum Ereignis B über das Ereignis A und der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A über alle Pfade.

Satz von Bayes: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))}$

Unabhängige Ereignisse A, B: $P(A)=P_B(A)$, $P(B)=P_A(B)$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

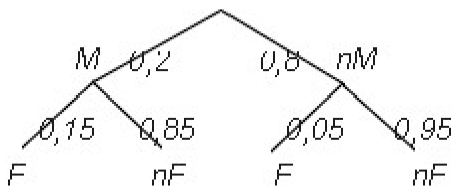
Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B sind unabhängig davon, dass das jeweils andere Ereignis B oder A eingetreten ist.

3.1.1 Montagsfahrrad

Die Firma Diamint stellt Fahrräder her. Untersuchungen in der Montageabteilung haben ergeben, dass an den Tagen Dienstag bis Freitag montierte Fahrräder mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 Montagefehler aufweisen, montags montierte mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15. Es wird nur an den Arbeitstagen Montag bis Freitag, an jedem Tag die gleiche Stückzahl, montiert.

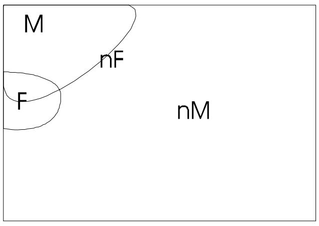
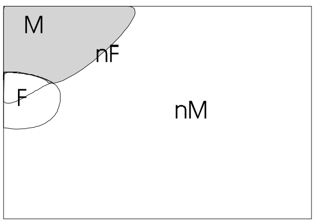
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zufälliger Auswahl eines Fahrrades aus der Gesamtproduktion ein am Montag produziertes Fahrrad gezogen wird, welches keinen Montagefehler aufweist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Kauf eines Fahrrades (zufällige Auswahl) ein Montagefehler auftritt?
c) An einem aus dieser Produktion stammenden Fahrrad ist eine fehlerhafte Montage festgestellt worden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Fahrrad montags montiert wurde?
d) Auf welche Wahrscheinlichkeit müsste das Auftreten von Montagefehlern am Montag gesenkt werden, damit die Wahrscheinlichkeit bei zufälliger Auswahl eines Fahrrades (Kauf) aus der Gesamtproduktion für einen Montagefehler nicht größer als 0,06 ist?

Variante 1: Lösungsvorschlag mit Baumdiagramm

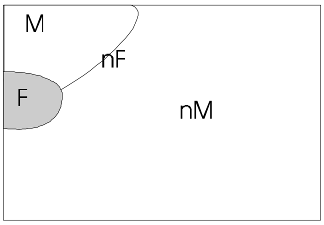
Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
		Vorkenntnisse: - Anwendung 1. und 2. Pfadregel - Verwendung von Baumdiagrammen
1. Ereignisse festlegen: M: Fahrrad montags montiert nM: Fahrrad nicht montags montiert F: Fahrrad mit Montagefehler nF: Fahrrad ohne Montagefehler	I	Zu Beginn könnte bewusst gemacht werden, dass die Ereignisse M und nM (F und nF) unvereinbar sind.
2. Erstellen eines Baumdiagramms mit Antragen der Wahrscheinlichkeiten (W.):  (W. für montags montierte Räder: $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$)	II	Auf die Darstellung der Ereignisgleichungen wird vollständig verzichtet.
Teilaufgabe a) Pfad markieren und Aufstellen der Gleichung für die W. unter Verwendung von Formulierungen wie: „Unter den montags montierten Fahrrädern (Pfad M) interessiert der Anteil, der keine Montagefehler aufweist (also von 0,2 der 0,85-te Anteil).“ interessierender Pfad: M - nF $p = 0{,}2 \cdot 0{,}85 = 0{,}17$ Ergebnis: Die W. für den Pfad, der unter der Bedingung M auf nF führt, ist 0,17.	I	Verbindung zwischen grafischer Anschauung und verbalen Formulierungen entspricht der Anwendung der 1. Pfadregel

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
<u>Teilaufgabe b)</u> Aufstellen der Gleichung für die Pfad - W.: interessierende Pfade: M - F und nM - F $p = 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}8 \cdot 0{,}05$ $= 0{,}07$ <u>Ergebnis:</u> Die Summe der W. der Pfade, die zum Ereignis F (fehlerhafte Montage) führen, ist 0,07.	II	Die Herleitung kann direkt am Baumdiagramm als Verknüpfung der 1. und 2. Pfadregel verstanden werden.
<u>Teilaufgabe c)</u> Aufstellen der Gleichung für die W.: Die gesuchte W. wird als *„Verhältnis der W. für den Pfad entlang M nach F zur W. aller Pfade nach F“* im Baumdiagramm interpretiert. interessierender Pfad: M - F $p = \frac{P(\text{Pfad M}-\text{F})}{P(\text{Pfad M}-\text{F}) + P(\text{Pfad nM}-\text{F})}$ $p = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}15}{0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}8 \cdot 0{,}05} \approx 0{,}43$ <u>Ergebnis:</u> Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Fahrrad montags montiert wurde, ist 0,43.	II	
<u>Teilaufgabe d)</u> $0{,}06 \geq 0{,}2 \cdot x + 0{,}8 \cdot 0{,}05$ $0{,}02 \geq 0{,}2 \cdot x$ $x \leq 0{,}1$ <u>Ergebnis:</u> Die W. für das Auftreten von Montagefehlern am Montag müsste auf 0,1 gesenkt werden.	III	Eine Ableitung am Baumdiagramm ist schwierig, hier kann durch Überlegung die Ungleichung $P(F) \leq 0{,}6$ gewonnen werden und dann x isoliert werden.

Variante 2: Lösungsvorschlag mit Anwenden von Formeln

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
		<u>Vorkenntnisse:</u> - Anwendung 1. und 2. Pfadregel - Verwendung von Baumdiagrammen
1. Ereignisse festlegen: M: Fahrrad montags montiert nM: Fahrrad nicht montags montiert F: Fahrrad mit Montagefehler nF: keine Montagefehler	I	
Mengendiagramm:  	I / II	
<u>Teilaufgabe a)</u> Aufstellen der Gleichung für die W.: $P(nF \cap M) = P(M) \cdot P_M(nF)$ (Multiplikationsregel) $P(nF \cap M) = 0{,}2 \cdot 0{,}85 = 0{,}17$ <u>Ergebnis:</u> Die W. des Pfades, der unter der Bedingung M auf nF führt, beträgt 0,17. Veranschaulichung im Mengendiagramm:  		<u>Allgemeiner Multiplikationssatz:</u> $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ mit $P(A) > 0$, wobei $P_A(B)$ die W. von B unter der Bedingung A bedeutet <u>Durchschnitt</u> von $nF \cap M$ als Ereignis, bei dem sowohl nF als auch M eintritt.

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>
<u>Teilaufgabe b)</u>
Aufstellen der Gleichung für die Pfad-W.:
$P(F) = P(F \cap M) + P(F \cap nM)$ (Satz v. totale W.)
$\quad = P(M)\ P_M(F) + P(nM)\ P_{nM}(F)$
$P(F) = 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}8 \cdot 0{,}05$
$\quad = 0{,}07$
<u>Ergebnis:</u>
Die Summe der W. der Pfade, die zum Ereignis F (fehlerhafte Montage) führen, beträgt 0,07.

Veranschaulichung im Mengendiagramm:


</td><td>II</td><td>
Satz von der totalen W.:
$P(A) = P(A \cap B_1) + ... + P(A \cap B_n)$
mit $P(B)>0$
</td></tr>
<tr><td>
<u>Teilaufgabe c)</u>
Aufstellen der Gleichung für die W.:
$$P_F(M) = \frac{P(M \cap F)}{P((M \cap F) \cup (nM \cap F))} \text{ (Satz v. Bayes)}$$
$$= \frac{P(M) \cdot P_M(F)}{P(M) \cdot P_M(F) + P(nM) \cdot P_{nM}(F)}$$
$$P_F(M) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}15}{0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}8 \cdot 0{,}05} \approx 0{,}43$$
<u>Ergebnis:</u>
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Fahrrad montags montiert wurde, ist 0,43.

Veranschaulichung in einer Vierfeldertafel:
Aufgabenstellung:
<table>
<tr><th></th><th>F</th><th>nF</th><th></th></tr>
<tr><td>M</td><td></td><td></td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>nM</td><td></td><td></td><td>0,8</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Vollständige Erarbeitung aller auftretenden W.:
<table>
<tr><th></th><th>F</th><th>nF</th><th></th></tr>
<tr><td>M</td><td>0,03</td><td>0,17</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>nM</td><td>0,04</td><td>0,76</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td></td><td>0,07</td><td>0,93</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>II</td><td>
Die gesuchte W. kann im Baumdiagramm als „Verhältnis der W. für den Pfad entlang M nach F zur W. aller Pfade nach F“ interpretiert werden.

Die besondere Stärke einer solchen tabellarischen Anordnung besteht in der Möglichkeit, die Richtigkeit der auftretenden W. spaltenweise oder zeilenweise zu kontrollieren, indem die Summen kontrolliert werden, z. B.:
$P(M) = P(F \cap M) + P(nF \cap M)$
$0{,}2 = 0{,}03 + 0{,}17$
</td></tr>
</table>

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
Teilaufgabe d) $0{,}06 \geq P(F)$ $0{,}06 \geq P(F \cap M) + P(F \cap nM)$ $0{,}06 \geq P(M)\ P_M(F) + P(nM)\ P_{nM}(F)$ $P_M(F) \leq \frac{0{,}06 - P(nM) \cdot P_{nM}(F)}{P(M)}$ $P_M(F) \leq \frac{0{,}06 - 0{,}8 \cdot 0{,}05}{0{,}2} \leq 0{,}1$ oder: $0{,}06 \geq 0{,}2 \cdot x + 0{,}8 \cdot 0{,}05$ $0{,}02 \geq 0{,}2 \cdot x$ $x \leq 0{,}1$ Ergebnis: Die W. für das Auftreten von Montagefehlern am Montag müsste auf 0,1 gesenkt werden.	III	Formale Umformungen führen zum Ergebnis: aus der Ungleichung $P(F) \leq 0{,}6$ wird $P(F/M)$ isoliert.
		Mögliche Vertiefungen: Diskussion der Formel von Bayes, z. B. Probleme aus der Praxis bei der Zuverlässigkeit der Schätzwerte für P(F)

3.1.2. Mikroprozessoren

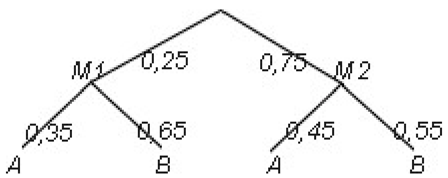
Die Elektronikfirma Bytist produziert Mikroprozessoren zum Einsatz in Personalcomputern in den Güteklassen A und B. Prozessoren der Klasse A können mit einer höheren Taktfrequenz betrieben werden. In der älteren Anlage M1 werden die produzierten Prozessoren mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% zur Klasse A gerechnet. Die neuere Anlage M2 produziert dreimal so viel wie die Anlage M1 und liefert 45% aller Prozessoren in der Klasse A.

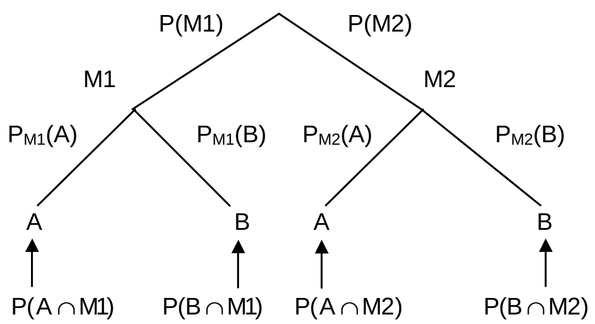
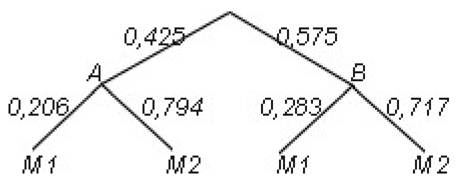
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Gesamtproduktion beider Anlagen bei zufälliger Auswahl ein Prozessor der Klasse A gezogen wird?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Prozessor aus der Gesamtproduktion der Güteklasse A beider Anlagen von der Anlage M1 produziert wurde?

c) Stellen Sie die Zusammenhänge zwischen den auftretenden Ereignissen in verschiedenen Baumdiagrammen und verschiedenen Mengendiagrammen dar.

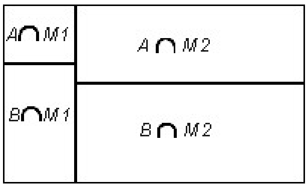
Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
Ereignisse festlegen: Mn: Prozessor auf Anlage Mn produziert A: Prozessor der Klasse A B: Prozessor der Klasse B	I	Vorkenntnisse: - Anwendung 1. und 2. Pfadregel - Verwendung von Baumdiagrammen Zu Beginn könnte bewusst gemacht werden, dass die Ereignisse M1 und M2 (A und B) unvereinbar sind.
Zuordnen der Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten an einem Baumdiagramm: 	II	
Teilaufgabe a) Pfad im Baumdiagramm bestimmen, Wahrscheinlichkeiten ablesen; Berechnen von P(A) $P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}35 + 0{,}75 \cdot 0{,}45 = 0{,}425$		

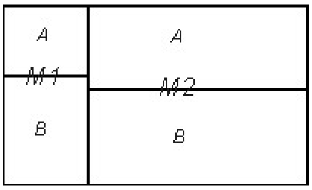
Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
<u>Teilaufgabe b)</u> Die gesuchte W. wird als „Verhältnis der W. für den Pfad entlang M1 nach A zur W. aller Pfade nach A" im Baumdiagramm berechnet. $P_A(M1) = \frac{P(M1)\cdot P_{M1}(A)}{P(A)}$ $P_A(M1) \approx 0{,}206$		
<u>Variante:</u> <u>Weiterführung der Aufgabe</u> Vollständige Berechnung aller auftretenden bedingten Wahrscheinlichkeiten analog zu $P_A(M1)$: $P_B(M1) \approx 0{,}283$ $P_A(M2) \approx 0{,}794$ $P_B(M1) \approx 0{,}717$	II	Ziel bei der weiteren Bearbeitung des Sachverhaltes ist es, Klarheit in die verschiedenen Zuordnungen der Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen.
<u>1. Darstellung der Zusammenhänge im Baumdiagramm</u> 	III	Diese Übung dient der logischen Denkschulung. Die angegebenen Darstellungsformen sollen die möglichen unterschiedlichen Zugänge verdeutlichen.
<u>2. Umkehrung der Zuordnungsreihenfolge im Baumdiagramm</u> 	II	Mit dieser umgekehrten Anordnung der zwei Stufen können Ergebnisse von Fragen wie in a) und b) unmittelbar abgelesen werden. Mit Hilfe der Summenregel können die berechneten Wahrscheinlichkeiten überprüft werden (z. B. 0,206+0,794=1).

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>

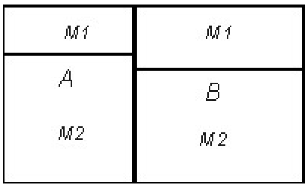
<u>3. Veranschaulichung der Beziehungen zwischen den Ereignissen im Mengendiagramm</u>



Bild



Bild



Bild

</td><td>II</td><td>

Die drei Diagramme zeigen verschiedene Möglichkeiten, die Mengenbeziehungen in geometrische Flächenbeziehungen umzusetzen.

Mit diesen Flächendarstellungen können die Zusammenhänge zwischen der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und der Größe des jeweiligen Flächenstückes veranschaulicht werden.

</td></tr>
</table>

3.1.3 Genetische Voraussetzungen

Etwa 5% der Bevölkerung besitzen die genetischen Voraussetzungen für eine bestimmte Erbkrankheit. Damit möglichst frühzeitig die Personen mit genetischen Voraussetzungen erkannt werden, wurde ein medizinisches Testverfahren entwickelt. Dieses Testverfahren ist nicht völlig zuverlässig: Liegen die genetischen Voraussetzungen vor, so wird dies mit 98% Wahrscheinlichkeit erkannt. Liegen die genetischen Voraussetzungen nicht vor, so kann das nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% festgestellt werden.

a) Ermitteln Sie die zu erwartenden Häufigkeiten von 5000 zufällig aus der Bevölkerung ausgewählten Personen, denen durch den Test fälschlicherweise die genetischen Voraussetzungen zugesprochen werden bzw. die fälschlicherweise keine genetischen Voraussetzungen für die Erbkrankheit haben.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Wahl einer Person aus der Bevölkerung und bei positivem Ergebnis des Tests die Person tatsächlich die genetischen Voraussetzungen für die Erbkrankheit besitzt?

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>Festlegen der Ereignisse:
T: Testergebnis positiv
nT: Testergebnis negativ
V: genetische Voraussetzungen vorhanden
nV: genetische Voraussetzungen nicht vorhanden</td><td></td><td>Vorkenntnisse:
- Berechnen von Laplace-Wahrscheinlichkeiten
- Verwendung von Vierfeldertafeln

Bei ausreichenden Erfahrungen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten kann auf die vorherige schriftliche Festlegung der Ereignisse verzichtet werden.</td></tr>
<tr><td>a) Vierfeldertafel:
aus den Bevölkerungsangaben werden die unteren Werte berechnet, z. B.
$H(V)=5\% \cdot 5000 = 250$
<table>
<tr><td></td><td>V</td><td>nV</td><td></td></tr>
<tr><td>T</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>nT</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>250</td><td>4750</td><td>5000</td></tr>
</table>
</td><td></td><td>Die Verwendung eines Baumdiagramms wäre ebenso möglich.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>Berechnung der Einzelhäufigkeiten in der Tabelle, z. B.
für $H(V \cap T) = 0{,}98 \cdot 250 = 245$
<table>
<tr><th></th><th>V</th><th>nV</th><th></th></tr>
<tr><td>T</td><td>245</td><td>475</td><td>720</td></tr>
<tr><td>nT</td><td>5</td><td>4275</td><td>4280</td></tr>
<tr><td></td><td>250</td><td>4750</td><td>5000</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>b) Berechnung der Wahrscheinlichkeit</u>
$P_T(V) = 245/720 \approx 0{,}34$

auch:
$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(V \cap T) + P(nV \cap T)}$$
$$= \frac{245}{245 + 475} \approx 0{,}34$$
Die Wahrscheinlichkeit ist etwa ein Drittel, dass die tatsächlichen Voraussetzungen für die Erbkrankheit vorliegen.</td><td></td><td>Obwohl das positive Ergebnis den Betroffenen zunächst beunruhigen wird, ist die Wahrscheinlichkeit für das tatsächliche Vorhandensein der Voraussetzungen für die Erbkrankheit relativ gering.
Dieses Phänomen tritt bei ähnlichen Problemstellungen häufig auf und resultiert daraus, dass kleine Wahrscheinlichkeiten (hier p für positiven Test ohne tatsächliche Voraussetzungen für die Erbkrankheit) mit großen Anzahlen (hier die Anzahl der Personen aus der Bevölkerung, die keine Voraussetzungen für die Erbkrankheit besitzen) in die Rechnung einfließen.</td></tr>
</table>

3.1.4 Einschulungstest

Etwa 5% der Schulkinder eines Jahrganges sind lernbehindert und müssten auf einer Sonderschule beschult werden, um ihre körperliche und geistige Entwicklung optimal zu fördern. Damit möglichst frühzeitig eine Zuordnung dieser Schulkinder erfolgen kann, wird vor der Einschulung ein psychologischer Test durchgeführt. Dieser Test ist leider nicht völlig zuverlässig: Liegt eine Lernbehinderung vor, so wird dies mit 95% Wahrscheinlichkeit erkannt. Liegt keine Lernbehinderung vor, so wird dies mit 90% Wahrscheinlichkeit festgestellt.
Ist dieser Test zur frühzeitigen Auswahl der lernbehinderten Schülerinnen und Schüler eher geeignet oder eher ungeeignet?

3.2 Unabhängigkeit von Ereignissen

Die Unabhängigkeit von Ereignissen lässt sich durch Quotientenbildung von entsprechenden Wahrscheinlichkeiten rechnerisch ermitteln. Ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gleich groß der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung B, so spricht man von der Unabhängigkeit der Ereignisse A und B. Dieser Zusammenhang kann in jedem Falle durch Überlegung begründet werden: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ändert sich durch Auftreten eines anderen Ereignisses nicht. Die Vierfeldertafel kann ein gutes Hilfsmittel sein, um die Beziehungen zwischen den einzelnen Wahrscheinlichkeiten herauszuarbeiten. In der Aufgabe 3.2.1 liegen Häufigkeiten einer Grundgesamtheit vor. Diese sind der Untersuchung nach Unabhängigkeit im unten beschriebenen Weg zugänglich.
Auf Grund der Aufgabenstellung ist es jedoch oft nicht möglich, Wahrscheinlichkeiten einer Grundgesamtheit anzugeben. Da die relativen Häufigkeiten einer Stichprobe nur ein Schätzwert für die zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten der Grundgesamtheit sind, kann die Frage der Unabhängigkeit in diesem Falle auch nur als Vermutung bzw. als eine Schätzung beantwortet werden. Zur exakten Untersuchung der Unabhängigkeit von Häufigkeiten einer Grundgesamtheit mit Hilfe einer Stichprobe wäre ein Testverfahren (χ^2-Test, siehe nachfolgender Abschnitt) notwendig.

3.2.1 Rauchen und Sportverein

In einer aktuellen Umfrage an einer Schule ist erfasst worden, wie viele Schülerinnen und Schüler der 10. bis 12. Klassen regelmäßig rauchen und Mitglied in Sportvereinen sind. Die Häufigkeiten sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	Mitglied Sportverein H(S)	nicht Mitglied Sportverein H(nS)
Raucher H(R)	40	62
Nichtraucher H(nR)	74	64

Gibt es eine Abhängigkeit zwischen einer Mitgliedschaft im Sportverein und dem Rauchen?

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>Kennzeichnung der Merkmale:
R- Raucher
nR- Nichtraucher
S- Mitglied im Sportverein
nS- nicht Mitglied im Sportverein
n- Anzahl aller Schüler

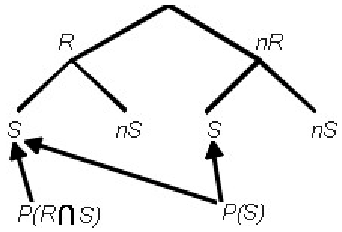
Wenn Unabhängigkeit vorliegt, muss der Anteil für Rauchen bei den Mitgliedern im Sportverein und bei allen Befragten annähernd gleich sein:

$\frac{H(R)}{n} = \frac{H(R \cap S)}{H(S)}$
Zur Berechnung der obigen Gleichung sind in der Vierfeldertafel die Zeilen- und Spaltensummen zu ergänzen.</td><td>II</td><td>Vorkenntnisse:
- absolute und relative Häufigkeiten

Im Schnittpunkt einer bestimmten Zeile und Spalte steht die Häufigkeit, die für beide Merkmale zutrifft: z. B. 40 für Mitglied im Sportverein und Rauchen.

Weitere Formulierung: „Das Auftreten der Merkmale Rauchen und Mitglied im Sportverein ist unabhängig voneinander, wenn der Anteil der Raucher unter den Mitgliedern im Sportverein gleich dem Anteil aller Raucher unter allen Befragten ist.“</td></tr>
<tr><td>Vierfeldertafel:

Mitglied Sportverein
<table>
<tr><td></td><td>S</td><td>nS</td><td></td></tr>
<tr><td>R</td><td>40</td><td>62</td><td>102</td></tr>
<tr><td>nR</td><td>74</td><td>64</td><td>138</td></tr>
<tr><td></td><td>114</td><td>126</td><td>240</td></tr>
</table></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Berechnung:
1. Zeilensumme für Merkmal Rauchen
H(R) = 40+62 = 102
2. Spaltensumme für Merkmal Mitglied im Sportverein
H(S) = 40+74 = 114
3. Erwartete Häufigkeit und Vergleich
$\frac{102}{240} \stackrel{?}{=} \frac{40}{114} \rightarrow 0{,}425 \stackrel{?}{=} 0{,}35$</td><td></td><td>Die Berechnung kann auch ohne Anwenden der Formel durch Lokalisieren der Häufigkeiten in der Vierfeldertafel ausgeführt werden.</td></tr>
</table>

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
Da die beiden Werte für die Häufigkeiten voneinander abweichen, ist eine Abhängigkeit der beiden Merkmale Rauchen und Mitglied in der Sportgemeinschaft zu vermuten.		Geringe Abweichungen der beiden Werte können auf schwache Abhängigkeiten schließen lassen, es muss jedoch keine Abhängigkeit vorliegen.
Baumdiagramm zum Sachverhalt:  $P_S(R) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = P(R)$		Zur erweiterten Betrachtung kann das Baumdiagramm für den allgemeinen Fall oder für das vorher behandelte Beispiel verwendet werden. $P_s(R) = P(R)$ gilt nur für unvollständige Ereignisse.
		<u>Mögliche Vertiefungen:</u> χ^2-Test zur Untersuchung der Unabhängigkeit zweier Merkmale

3.2.2 Sport und Rauchen in einer kleinen Stadt

Zur Vorbereitung einer Werbekampagne gegen das Rauchen ist in einer Stadt ermittelt worden, dass unter den Mitgliedern von Sportvereinen im Alter von 15 bis 65 Jahren 40% rauchen. Von allen Einwohnern im Alter von 15 bis 65 Jahren, die nicht in einem Sportverein sind, wurden 48% Raucher bzw. Raucherinnen festgestellt. Bekannt ist, dass jeder vierte Bewohner der Stadt Mitglied in einem Sportverein ist.
Wirkt sich die Mitgliedschaft in einem Sportverein günstig auf das Nichtrauchen der Mitglieder von Sportvereinen aus?

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td><u>Kennzeichnung der Merkmale:</u>
R- Raucher
nR- Nichtraucher
S- Mitglied im Sportverein
nS- nicht Mitglied im Sportverein

Zur Berechnung der obigen Gleichung sind in der Vierfeldertafel die Zeilen- und Spaltensummen zu ergänzen.</td><td>II</td><td><u>Vorkenntnisse:</u>
- absolute und relative Häufigkeiten

Im Schnittpunkt einer bestimmten Zeile und Spalte steht die relative Häufigkeit, die für beide Merkmale zutrifft: z. B. 0,1 für Mitglied im Sportverein und Rauchen.</td></tr>
<tr><td><u>Vierfeldertafel:</u>
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Mitglied Sportverein</td><td></td></tr>
<tr><td>Rauchen</td><td>S</td><td>nS</td><td></td></tr>
<tr><td>R</td><td>0,10</td><td>0,36</td><td>0,46</td></tr>
<tr><td>nR</td><td>0,15</td><td>0,39</td><td>0,54</td></tr>
<tr><td></td><td>0,25</td><td>0,75</td><td>1,00</td></tr>
</table></td><td></td><td>Beim Vervollständigen der Vierfeldertafel ist schrittweise vorzugehen, z. B. unter Verwendung der Tabellenkalkulation:
- unterste Zeile für S und nS mit 0,25 und 0,75 festlegen,
- im Schnittpunkt der Zeile und Spalte nach Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeit errechnen,
z. B. für R und S: $0,1 = 40\% \cdot 0,25$.</td></tr>
</table>

Lösungsschritte	AFB	Hinweise
<u>Berechnung der Quotienten:</u> $\frac{0,1}{0,25} \stackrel{?}{=} \frac{0,46}{1,0}$ $\rightarrow\ 0,4 \neq 0,46$ Die beiden Merkmale Rauchen und Mitglied in einem Sportverein sind für die Bewohner der Stadt nicht unabhängig voneinander.		Die Größe der Abweichung beider Quotienten voneinander gibt möglicherweise einen Hinweis auf die Stärke der Abhängigkeit an. (Aus einer Überprüfung mit dem χ^2-Test ergibt sich hier kein signifikanter Unterschied.)

χ^2-Test bei Häufigkeitsangaben (mögliche Vertiefung)

Der χ^2 (Chi Quadrat) -Test eignet sich dazu, Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Verteilungen von Häufigkeiten zu untersuchen.

Anders ausgedrückt, mit dem χ^2-Test ist es möglich, zwei Stichproben auf Zugehörigkeit zur gleichen Grundgesamtheit zu prüfen bzw. zu prüfen, ob Abhängigkeiten zwischen zwei oder mehr Merkmalen einer Stichprobe bestehen. Folgende Bedingungen sind für die Häufigkeiten zu beachten:

1. Die Werte sind nominalskaliert, d.h. die Häufigkeiten sind Merkmalsklassen zugeordnet.
2. Der Stichprobenumfang (Anzahl aller Objekte) muss mindestens 40 sein.
3. 80% aller Häufigkeiten müssen mindestens 5 sein.

Bei der Durchführung des χ^2-Tests werden die Quadrate der Abweichungen der zu erwartenden Häufigkeiten von den in der Stichprobe bestimmten Häufigkeiten ermittelt, mit der jeweiligen erwarteten Häufigkeit ins Verhältnis gesetzt und hieraus die Summe gebildet (siehe (2)). Die erwartete Häufigkeit für eine Merkmalsverknüpfung wird aus dem Quotienten des Produkts der Zeilen- und Spaltensumme und der Gesamtzahl der Objekte gebildet (siehe (1)). Diese Formel kann anschaulich aus dem Verhältnis der Häufigkeit im Kreuzungspunkt der jeweiligen Spalte und Zeile zur Spaltensumme gegenüber der Häufigkeit der Zeilensumme zur Gesamtzahl der Objekte abgeleitet werden.

$$\mu = \frac{x_Z \cdot x_S}{N} \qquad (1)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \mu)^2}{\mu} \qquad (2)$$

N- Gesamtzahl der Objekte

x_i- in der Erhebung bestimmte Häufigkeit, x_s, x_z- Zeilen- bzw. Spaltensumme

μ- erwartete Häufigkeit

Anschließend erfolgt ein Vergleich des Zahlenwertes mit einem Tabellenwert, der die χ^2-Verteilung bei Festlegung einer Irrtumswahrscheinlichkeit (üblich sind $\alpha = 5\%$ oder $\alpha = 10\%$) wiedergibt. Die Berechnung des Wertes für χ^2 kann sehr einfach durch Verwendung einer Tabellenkalkulation erledigt werden (siehe Berechnungstabelle unten). Ein großer χ^2-Wert resultiert aus großen Unterschieden zwischen den erwarteten und den in der Erhebung bestimmten Häufigkeiten und spricht damit für die gegenseitige Beeinflussung der Merkmalsausprägungen, also für die Abhängigkeit der Häufigkeiten. Ein kleiner χ^2-Wert spricht für eine vorliegende Unabhängigkeit.

3.2.3 Internetnutzung

Der Computer ist in heutiger Zeit ein Massenartikel, der in vielen Bereichen Einzug gehalten hat. Kann die Nutzung eines PC und des Internets ein Grund dafür sein, Auffassungen über die Bedeutung der Computertechnologie und deren mögliche missbräuchliche Verwendung unterschiedlich zu bewerten? Untersucht werden soll diese Frage anhand einer Erhebung, in der Befragte eine Wertung der Meinung „Die Computertechnologie schafft den Überwachungsstaat“ vornehmen sollten.
Aus den Daten der Befragung[1] wurde folgende Vierfeldertafel zur Untersuchung der Unabhängigkeit der beiden Merkmale Internetnutzung und Zustimmung zur Aussage „Computertechnologie schafft Überwachungsstaat“ der 1215 befragten Personen aufgebaut. Hierbei wurde die in eine 5-er Skala eingeteilte Merkmalszuordnung „Zustimmung“ zusammengefasst zu:
- nicht negative Bewertung der Aussage (Zustimmung) und
- negative Bewertung der Aussage (keine Zustimmung).

	„Computertechnologie schafft Überwachungsstaat“		
	Zustimmung	**keine Zustimmung**	Zeilensummen
Internetnutzung	**667**	**367**	1034
keine Internetnutzung	**140**	**41**	181
Spaltensummen	807	408	1215

Vierfeldertafel

Aus der Vierfeldertafel wird die Tabelle zur Berechnung des Wertes für χ^2 entwickelt:

[1] (Untersuchung in 90-er Jahren durch das Institut für Soziologie der Philipps-Universität Marburg über „Computer im Alltag“ entnommen aus: SPSS 8 Einführung in die moderne Datenanalyse unter Windows, Achim Bühl, Peter Zöfel, Addison-Wesley Verlag, München 1999, S. 544)

	A	B	C	D
1		Z	kZ	
2	I	**I&Z**	I&kZ	**Sum I**
3	kI	kI&Z	kI&kZ	Sum kI
4		**Sum Z**	Sum kZ	N
5				
6		x	µ	$(x-\mu)^2/\mu$
7	I&Z	667	686,780247	0,56969922
8	I&kZ	367	347,219753	1,12683154
9	kI&Z	140	120,219753	3,2545248
10	kI&kZ	41	60,7802469	6,43725861
11			**X^2=**	**11,3883142**
12				
13	=(B7*B8)*(B7+B9)/SUMME(B7:B10) oder			
14	=(Sum I)*(Sum Z) / N			
15				
16	=(B7-C)^2 / C7			
17				

Berechnungstabelle

$\chi^2_{f=1;\,\alpha=0,05} = 3,84$ (Tafel) (3)

Das Ergebnis $\chi^2 = 11,39$ wird mit einem Tabellenwert $\chi^2_{f=1;\,\alpha=0,05} = 3,84$ (siehe (3)) verglichen. Dabei bedeuten f der Freiheitsgrad, der in diesem Beispiel 1 ist (da nur eine Messgröße frei gewählt werden kann und die anderen sich aus den Randbedingungen errechnen lassen), und $\alpha = 0,05$ die Größe des gewählten Fehlers 1. Art.

Aus dem Vergleich kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Häufigkeiten voneinander abhängig sind. Die Analyse der Summanden des berechneten χ^2-Wertes zeigt, dass die Personen ohne Interneterfahrung signifikant weniger häufig die Behauptung „Computertechnologie schafft Überwachungsstaat" ablehnen. Häufiger als erwartet wird von diesen Personen der Behauptung zugestimmt. Dieses Ergebnis kann Anlass sein, über die damit zusammen hängenden inhaltlichen Fragen mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren.

4 Zufallsgrößen und Verteilungen

4.1 Zufallsgrößen, Bernoulli-Experimente

Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen sollten den Schülerinnen und Schülern als ein wesentliches Mittel zur Bildung eines mathematischen Modells für zufällige Erscheinungen bewusst werden. Dazu ist es angebracht, den Modellbildungsprozess den Schülerinnen und Schülern zunächst an einfachen Sachverhalten nahe zu bringen und die Vorgehensweise auch später beizubehalten. Um die Begriffe Zufallsgröße und Verteilungsfunktion mit der bisherigen „mathematischen Erfahrung“ in Verbindung zu bringen, können diese als Funktionen charakterisiert werden. Damit lassen sich die Binomialverteilung oder die Normalverteilung als spezielle Verteilungen einordnen, bei denen für die Verteilungsfunktion eine „Formel“ existiert.

Für die praktische Anwendung von Binomial- und Normalverteilungen ist der Einsatz von Tabellen der zugehörigen Summenfunktionen unerlässlich. Voraussetzung sollte ein inhaltliches Verständnis der Summenfunktion einer Zufallsgröße sein. Dabei erweist es sich als nutzbringend, wenn im vorangegangenen Unterricht eine Treppenfunktion untersucht wurde.

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung als Kenngrößen einer Zufallsgröße können in Analogie zu Mittelwert, mittlerer quadratischer Abweichung und empirischer Standardabweichung als Kenngrößen einer Stichprobe in der beschreibenden Statistik gewonnen werden. Dabei sollten die verschiedenen Betrachtungsebenen deutlich gemacht werden: Auf der einen Seite der reale Sachverhalt (Mittelwert, ...), auf der anderen Seite das stochastische Modell (Erwartungswert, ...).

Da es bei den angesprochenen Begriffen keine einheitliche Bezeichnungsweise gibt, seien im folgenden die wichtigsten Begriffe, synonyme Bezeichnungen und Definitionen zusammengestellt:

<u>Zufallsgröße:</u>

Eine Zufallsgröße X ist eine Funktion mit dem Definitionsbereich Ω (Ergebnismenge) und dem Wertebereich IR bzw. einer Teilmenge von IR. Synonym: Zufallsvariable

Interpretation: Jedem Element der Ergebnismenge wird eine Zahl zugeordnet.

<u>Verteilungsfunktion</u>:

Die Funktion W: $x \rightarrow P(X = x)$ mit $D_W = IR$ ist eine Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

Synonym: Wahrscheinlichkeitsfunktion, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Dichtefunktion

Interpretation: Den Werten der Zufallsgröße werden die Wahrscheinlichkeiten der zu Grunde liegenden Ergebnisse zu geordnet.

<u>Summenfunktion:</u>

Die Funktion F_X: $x \rightarrow P(X \leq x)$ heißt Summenfunktion der Zufallsgröße X.

Synonym: (kumulative) Verteilungsfunktion.

Erwartungswert:

Die Zahl $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$ heißt Erwartungswert der (diskreten) Zufallsgröße X. Synonym: $E(X) = \mu$

Interpretation: Der Erwartungswert gibt an, welchen Wert die Zufallsgröße bei hinreichend großer Wiederholung des Zufallsexperimentes im Mittel annimmt.

Varianz:

Die Zahl $V(X) = E[(X - E(X))^2]$ heißt Varianz der Zufallsgröße X.

Interpretation: Die Varianz liefert ein Maß für die mittlere quadratische Abweichung der Werte der Zufallsgröße vom Erwartungswert.

Standardabweichung:

Die Zahl $\sigma = \sqrt{V(X)}$ heißt Standardabweichung der Zufallsgröße X.

Interpretation: Die Standardabweichung bietet ein Maß für die Streuung der Werte einer Zufallsgröße um deren Erwartungswert.

An den Anfang sowohl des Grund- als auch des Leistungskurses stellen die Rahmenrichtlinien eine Wiederholung zu den Begriffen diskrete Zufallsgröße, Bernoulli-Versuche, Bernoulli-Ketten und Bernoulli-Formel. In dieser Wiederholung wird damit Unterrichtsstoff aus der Klasse 10 reaktiviert und vertieft. Dabei sollte das inhaltliche Verständnis für diesen Themenkreis im Mittelpunkt stehen.

Für das Grundverständnis der Bernoulli-Versuche sind Aufgaben dienlich, bei denen ein geschilderter Sachverhalt interpretiert werden muss, um dann zu entscheiden, ob ein Bernoulli-Versuch vorliegt oder nicht. Den Schülerinnen und Schülern sollte bewusst werden, dass bei einer solchen Klassifizierung stets Idealisierungen vorgenommen werden.

4.1.1 Bernoulli-Versuche entscheiden

Beurteilen Sie, ob der im folgenden beschriebene Sachverhalt als Bernoulli-Versuch bzw. Bernoulli-Kette interpretiert werden kann. Nennen Sie gegebenenfalls idealisierende Annahmen und kennzeichnen Sie jeweils „Erfolg“ oder „Misserfolg“.

a) Ein Biathlet absolviert achtmal einen Rundkurs und schießt bei jedem Durchlauf auf vier Scheiben.

b) In einer Getränkeabfüllanlage wird der laufenden Produktion alle fünf Minuten eine Flasche entnommen und es wird geprüft, ob diese Flasche normgerecht gefüllt ist.

c) In einer Umfrage werden die Schülerinnen und Schüler der Oberstufe eines Gymnasiums gefragt, ob sie Raucher sind.

Erfahrungsgemäß haben viele Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten, wenn Quantifizierungen mit „wenigstens“, „höchstens“, „mehr als“ usw. in Ungleichungen zu „übersetzen“ sind. Auch formale Aufgaben wie die folgende sind dazu geeignet, diesen Sprachgebrauch zu üben. Gleichzeitig werden grundlegende Begriffe zum Themenkreis Bernoulli-Ketten wiederholt.

4.1.2 Quantifizierungen

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der „Erfolge“ in einer Bernoulli-Kette der Länge 20. Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei p=0,3. Stellen Sie die im folgenden gesuchten Wahrscheinlichkeiten durch eine Gleichung dar. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der oben beschriebenen Bernoulli-Kette

a) genau fünf „Erfolge“ auftreten,
b) mindestens drei „Erfolge“ auftreten,
c) höchstens sieben „Erfolge“ auftreten,
d) weniger als zehn „Erfolge“ auftreten,
e) mehr als sechs „Misserfolge“ auftreten,
f) mindestens vier, aber weniger als acht „Erfolge“ auftreten.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
a) $P(X=5)=\binom{20}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{15}$	I	Unterrichtliche Voraussetzungen: B.-Kette und die B.-Formel sind aus Sjg. 10 bekannt.
b) $P(X\geq 3)=\sum_{k=3}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$ bzw. $=1-\sum_{k=0}^{2}\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$	II	Die Verwendung des Summenzeichens ist anzustreben, um somit auch eine Niveauerhöhung gegenüber Sjg. 10 bewusst zu machen.
c) $P(X\leq 7)=\sum_{k=0}^{7}\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$	II	
d) $P(X<10)=\sum_{k=0}^{9}\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$	II	
e) mehr als 6 Misserfolge $\Leftrightarrow$ höchstens 13 Erfolge $P(X\leq 13)=\sum_{k=0}^{13}\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$ bzw. $=1-\sum_{k=14}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$	II	
f) $P(4\leq X<8)=\sum_{k=4}^{7}\binom{20}{k}\cdot 0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}$	III	

Erarbeitung der Bernoulli-Formel

Die schrittweise Erarbeitung der Bernoulli-Formel kann aus anschaulichen Überlegungen heraus an einem Beispiel erfolgen. Es ist leicht einsichtig, dass bei größeren Anzahlen n die Berechnung sehr aufwendig wird. Damit ist das Finden einer Formel motiviert.

Die Kenntnis der Zählregeln (Kombinationen ohne Wiederholung) ist nicht notwendig, könnte allerdings im Falle einer Behandlung zum effektiveren Vorgehen beitragen. Mit der folgenden Aufgabe ist eine gute Möglichkeit gegeben, die Permutation und Kombination ohne Wiederholung verständlich zu machen.

4.1.3 Quedlinburger Saatgut I

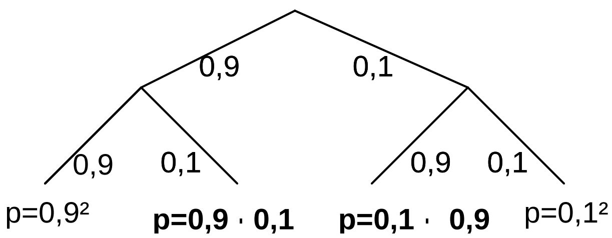
Die Quedlinburger Saatgut GmbH verwendet Samenkörner einer Pflanzenart, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% keimen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei (vier, sechs, 200) ausgesäten Samenkörnern

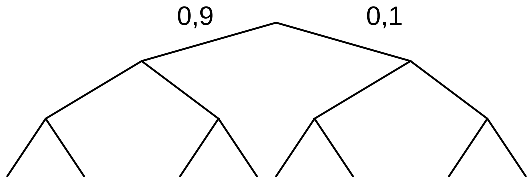
a) genau die Hälfte keimt;

b) weniger als die Hälfte keimt?

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>Schrittweises Vorgehen beim Lösen der Aufgabe:
1. Schritt: Keimen bei 2 Körnern:
P(X)- x Pflanzen keimen
P(0)- keine Pflanze keimt

<u>Ergebnis:</u>
a) $P(X=1)=0{,}9 \cdot 0{,}1+0{,}9 \cdot 0{,}1=0{,}18$
b) $P(X<1)=0{,}1 \cdot 0{,}1=0{,}01$</td><td>I</td><td>Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten:


(zur Kontrolle: Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten:
$P(X\leq 2)=0{,}9^2+\mathbf{2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}+0{,}1^2=1$)</td></tr>
<tr><td>2. Schritt: Keimen bei 3 Körnern, Ableiten der Bernoulli-Formel:
n = 3, k = 2:
Körner A, B, C, z. B.:
Möglichkeiten: AB, AC, BA, BC, CA, CB : $3 \cdot 2=6$
Reihenfolge unberücksichtigt:
AB und BA gleich: $3 \cdot \frac{2}{2}=3$
<u>Binomialkoeffizient:</u> $b=\binom{3}{2}=\frac{3 \cdot 2}{2!}=3$
(im Zähler 2 Faktoren)
allgemein: $\boxed{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$
(im Zähler k Faktoren)</td><td></td><td>Struktur des Baumdiagramms bei n=3


Evtl. können weitere Auswahlen (z. B. zwei aus vier) diskutiert werden, bevor die Vermutung für die Formel festgehalten wird.

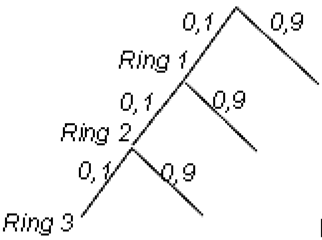
Veranschaulichen der Bestandteile der Formel:
$\binom{n}{k}$: Anzahl der Möglichkeiten für bestimmtes k;
$0{,}9^k$: mit k Anzahl der Erfolgszweige;
$0{,}1^{n-k}$: mit n-k Anzahl der Misserfolgszweige</td></tr>
</table>

Lösungsschritte	AFB	Hinweise
Bernoulli-Formel: $\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ 0\le k\le n}$ Ergebnis: a) – b) $P(X\le 1)=\binom{3}{0}0{,}9^0\cdot 0{,}1^3+\binom{3}{1}0{,}9^1\cdot 0{,}1^2$ $= 0{,}001+3\cdot 0{,}009 = 0{,}028$		$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}0{,}9^k0{,}1^{n-k},\ 0\le k\le n}$ Die Glieder der Formel können aus dem Baumdiagramm abgelesen werden.
3. Schritt: Anwenden der Bernoulli-Formel auf eine große Anzahl Körner (4, 6, 200) n = 4 Ergebnis: a) $P(X=2)=\binom{4}{2}0{,}9^2 0{,}1^2=6\cdot 0{,}0081$ $=0{,}0486$ b) $P(X<2) = 1\cdot 0{,}9^0\, 0{,}1^4+4\cdot 0{,}9^1\cdot 0{,}1^3$ $= 0{,}0037$ n = 6 Ergebnis: a) $P(X=3)=\binom{6}{3}0{,}9^3 0{,}1^3=20\cdot 7{,}29\cdot 10^{-4}$ $=0{,}01458$ b) $P(X\le 2)=\binom{6}{0}\cdot 0{,}9^0\cdot 0{,}1^6+\binom{6}{1}\cdot 0{,}9^1\cdot 0{,}1^5+\binom{6}{2}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^4$ $P(X\le 2) = 0{,}1^6+6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1^5+ 15\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^4 = 0{,}00127$ n = 200 Ergebnis: a) $P(X=100)=\binom{200}{100}0{,}9^{100}0{,}1^{100}$ $=2{,}6\cdot 10^{-46}\approx 0$ b) $P(X\le 99) = 3\cdot 10^{-47}\approx 0$	I, II	Die Berechnung der Körneranzahl größer als 10 wird manuell nicht mehr sinnvoll. Hier muss auf die Tafel für Binomialverteilungen zurückgegriffen werden. Je größer die Körnerzahl ist, desto unwahrscheinlicher wird es, dass nur die Hälfte oder weniger als die Hälfte der Körner keimen. Bei Körnerzahlen ab 100 ist diese Wahrscheinlichkeit praktisch gleich 0.

4.1.4 Fahrraddieb

Ein Fahrradschloss mit 3 Ziffernringen mit jeweils 10 Ziffern soll geknackt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Dieb mit ein (bzw. zwei)* Versuchen das Fahrradschloss öffnet?

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
Analyse der Aufgabe / Modell: 3 Ziffernringe einstellen $\Rightarrow$ dreistufiger ZV mit zufälliger Wahl einer Ziffer aus 10 möglichen	II	Unterrichtliche Voraussetzungen: je nach Variante Bernoulli-Formel, Umgang mit Baumdiagrammen
1. Variante: Vergleich der Möglichkeiten Ermitteln der Gesamtzahl der Möglichkeiten: 1. Ring: 1 aus 10 $\Rightarrow$ 10 Möglichkeiten 2. Ring: 1 aus 10 $\Rightarrow$ 10 Möglichkeiten 3. Ring: 1 aus 10 $\Rightarrow$ 10 Möglichkeiten Gesamtzahl: n= $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ erwünschte Möglichkeiten: eine Möglichkeit des Zahlencodes $p = \frac{\text{eine Möglichkeit für Code}}{\text{1000 Möglichkeiten}} = 0{,}001$	II	
2. Variante: Baumdiagramm verkürztes Baumdiagramm:  Bild $p = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$		

Lösungsschritte	AFB	Hinweise
<u>3. Variante: Bernoulli-Formel</u> $P(X=1)=\binom{3}{3}0{,}1^3\cdot 0{,}9^0=0{,}001$		Analog zu Aufgabe 4.1.3 wird die Bernoulli-Formel schrittweise durch inhaltliches Schließen entwickelt: bei n = 3 Versuchen genau k = 3 Erfolge (drei mal richtige Ziffer). Die Anwendung der Bernoulli-Formel ist für diese Aufgabe nicht notwendig, bietet jedoch durch die verschiedenen Wege zur Lösung gute Kontrollmöglichkeiten.
<u>4. Variante: Analogiebetrachtung</u> Mögliche Zahlenkombination der drei Ziffernringe kann als dreistellige natürliche Zahl, einschl. Zahlen mit führenden Ziffern 0, angesehen werden: Zahlen von 000 bis 999 $\Rightarrow$ n = 1000 eine gesuchte Kombination $\Rightarrow$ p = 0,001		

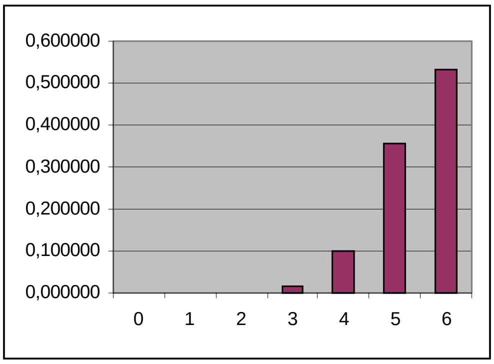
* Für einen zweiten Versuch, die Zahlenkombination zu finden, ergeben sich einige Komplikationen: Die Bernoulli-Formel ist nicht anwendbar, da die Wahrscheinlichkeit für das Einstellen der richtigen Ziffer von den vorher eingestellten Ziffern abhängig ist. Auch mit dem Baumdiagramm gibt es kaum eine Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ringe einzutragen. Die Variante über den Vergleich der Anzahl der Möglichkeiten führt zur Lösung. Von den 1000 Möglichkeiten ist eine bereits geprüft, es sind somit 1 aus 999 Möglichkeiten zu berechnen und damit ist $p=\frac{1}{999}$.

4.1.5 Quedlinburger Saatgut II

Eine mögliche Vertiefung zur Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung ist in der folgenden Aufgabe dargestellt.

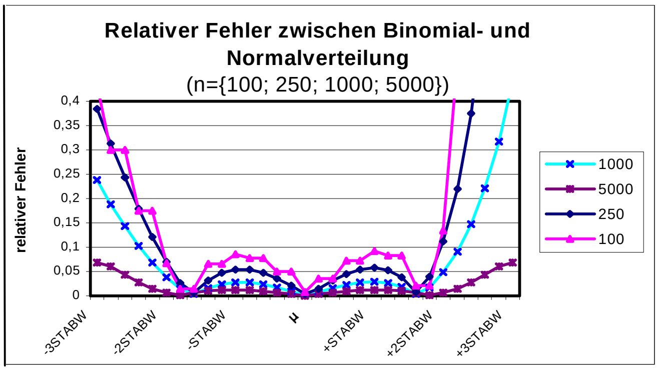
Die Quedlinburger Saatgut GmbH ist daran interessiert, die Ausfallraten für das Keimen der Samenkörner (s. Aufgabe 4.1.3) bei sehr großen Körnerzahlen rechnerisch exakt zu erfassen, um werbewirksame Argumente für die Qualität der Samenkörner zu finden. Hierfür sollen zunächst die Verteilungen der keimenden Samenkörner durch geeignete Verteilungstypen beschrieben werden. Es interessiert die Anzahl keimender Körner für eine Körnerzahl von n =1000.

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Unterrichtliche Voraussetzungen:
Bernoulli-Versuch, Binomialverteilung, Umgang mit der Tabellenkalkulation</td></tr>
<tr><td>1. Schritt: Verteilung der Anzahl keimender Samenkörner als Binomialverteilung
n = 6

</td><td>I</td><td>Die Verteilung ist eine Binomialverteilung (zwei mögliche Versuchsausgänge, n Versuche mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit p und (1-p)).

Mit einer Tabellenkalkulation lässt sich einfach die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten für die jeweilige Anzahl keimender Körner (k) für verschiedene n ermitteln. Die Berechnung der Werte in der Spalte E kann über eine Formel erfolgen. Zum Beispiel lautet diese in MS-EXCEL: BINOMVERT(k; n; p; 0). Falls an letzter Stelle eine 1 steht, wird der Wert der Summenfunktion $F_{n;p}(k)$ berechnet.

Eine mögliche Form der Tabelle ist hier dargestellt:
<table>
<tr><th></th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Binomialverteilung</td><td>mit Funktion BINOMVERT()</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>p=</td><td>0,9</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>0</td><td>0,000001</td><td>=BINOMVERT(C3;6;C2;0)</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>1</td><td>0,000054</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>2</td><td>0,001215</td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td><u>2. Schritt:</u> Verteilung der Anzahl keimender Samenkörner bei größeren Körnerzahlen, Vergleich von Binomial- und Normalverteilung</td><td>II</td><td>Chancen bestehen mit der Tabellenkalkulation, die Güte der Ergebnisse der Normalverteilung mit denen der Binomialverteilung für große Körnerzahlen zu vergleichen und damit Bedingungen für die Approximation mit der Normalverteilung plausibel zu machen.[2]</td></tr>
<tr><td>Ausschnitt aus den Tabellen zum Vergleich der Binomial- mit der Normalverteilung mit n=1000, p=0,9
<table>
<tr><th>k</th><th>Binovert()</th><th>Normvert()</th><th>rel. Fehler</th></tr>
<tr><td>890</td><td>0,023481</td><td>0,0241276</td><td>0,0275353</td></tr>
<tr><td>892</td><td>0,0286932</td><td>0,0294695</td><td>0,0270557</td></tr>
<tr><td>894</td><td>0,0336421</td><td>0,0344294</td><td>0,0234045</td></tr>
<tr><td>896</td><td>0,0378209</td><td>0,0384756</td><td>0,0173096</td></tr>
<tr><td>898</td><td>0,0407398</td><td>0,041128</td><td>0,0095302</td></tr>
<tr><td>900</td><td>0,0420168</td><td>0,0420522</td><td>0,0008429</td></tr>
<tr><td>902</td><td>0,0414583</td><td>0,041128</td><td>0,0079671</td></tr>
<tr><td>904</td><td>0,0391056</td><td>0,0384756</td><td>0,0161102</td></tr>
<tr><td>906</td><td>0,0352323</td><td>0,0344294</td><td>0,0227888</td></tr>
<tr><td>908</td><td>0,0302931</td><td>0,0294695</td><td>0,0271882</td></tr>
<tr><td>910</td><td>0,0248344</td><td>0,0241276</td><td>0,0284594</td></tr>
</table></td><td>II</td><td>Zur grafischen Veranschaulichung könnten die relativen Fehler zwischen den Verteilungen in einem Diagramm gegenübergestellt werden:

</td></tr>
<tr><td>n = 5000
$B(5000; 0{,}9; k) \approx N(4500; 21, 21)$
3-σ-Umgebung:
$P(4436 \le k \le 4564)=0{,}99738.. \approx 99{,}7\%$</td><td></td><td>Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass der relative Fehler zwischen den Werten der Binomialverteilung und der Normalverteilung mit zunehmenden Körnerzahlen kleiner wird und die Genauigkeit der Approximation ab n = 100 gerechtfertigt ist, wenn Körnerzahlen um etwa eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen.</td></tr>
<tr><td><u>Ergebnis:</u>
Mit 99,7% Wahrscheinlichkeit keimen von 1000 Samenkörnern zwischen 870 und 930.</td><td></td><td>Für n = 1000 bzw. n = 5000 ist die Differenz zwischen den beiden Verteilungen entsprechend kleiner, bei diesen Körnerzahlen können mit kleinem relativen Fehler die Anzahl keimender Körner um etwa die dreifache Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen.</td></tr>
</table>

[2] Mit der Tabellenkalkulation Excel 2000 können die Werte für die Binomialverteilung nur bis zu einer Anzahl n = 2100 berechnet werden, größere Anzahlen müssen durch ein professionelles Mathematikprogramm oder mit einem eigenen Algorithmus zur rekursiven Berechnung ermittelt werden.

4.2 Verteilungen

4.2.1 Verteilungen erkennen

Im Folgenden werden Situationen beschrieben.

Ordnen Sie jeder dieser Situationen eine mathematische Verteilung (diskret oder stetig, binomial, hypergeometrisch-, geometrisch-, normal- oder anders verteilt) zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung und skizzieren Sie eine mögliche Dichtefunktion:

a) Ein Schüler fährt jeden Tag in der Woche mit der Straßenbahn zur Schule. Im Durchschnitt wird jede zehnte Straßenbahnfahrt kontrolliert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dieser Schüler durchschnittlich pro Woche nicht, genau einmal, genau zweimal, ... kontrolliert?

b) In einem Lostopf befinden sich unter einhundert Losen 20 Gewinne. Jemand kauft zehn Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er keinen, genau einen, ..., genau zehn Gewinne?

c) Welche Körpergröße haben 14-jährige Mädchen in Deutschland?

d) In Schokoladenverpackungen einer bestimmten Firma werden 10 verschiedene Sammelbilder einer Serie beigelegt. Jemand hat schon neun und möchte auch das zehnte erwerben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss er noch eine, zwei, ... Tafeln kaufen?

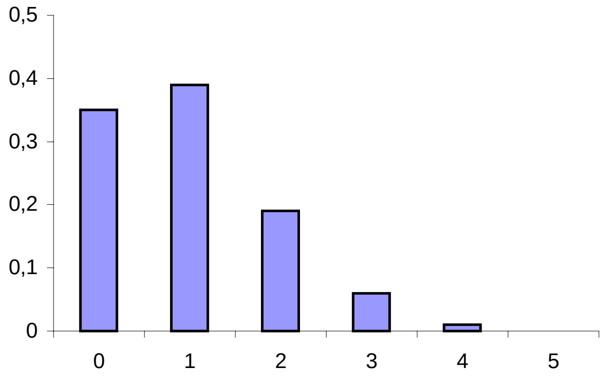
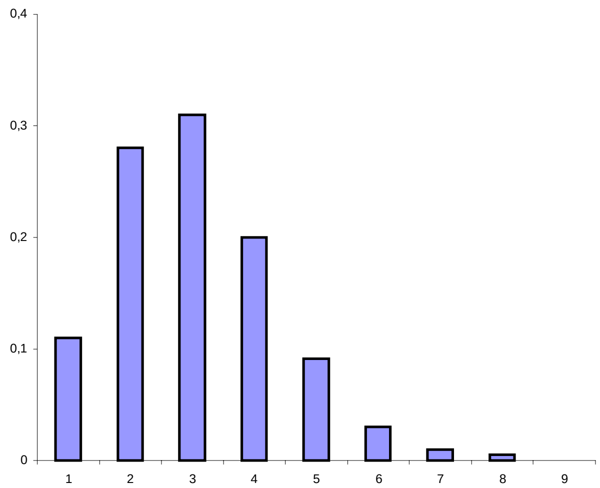
e) An einer Straßenbahnhaltestelle werden jede Minute die wartenden Menschen gezählt, die auf eine Bahn warten, die regelmäßig alle 10 Minuten fährt.

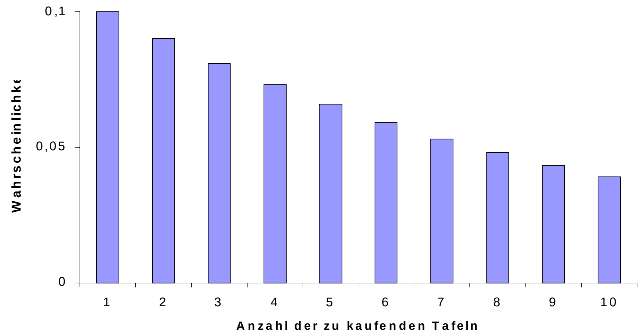
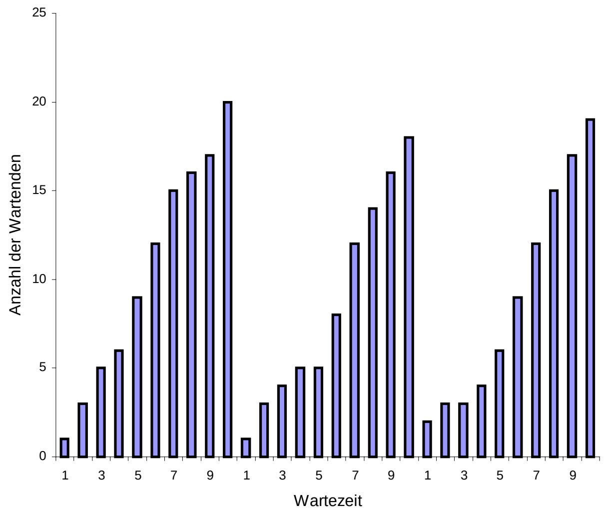
f) In einer Umfrage soll ermittelt werden, welche Beliebtheit einem Politiker auf einer Skala von 1 bis 6 zugeordnet wird.

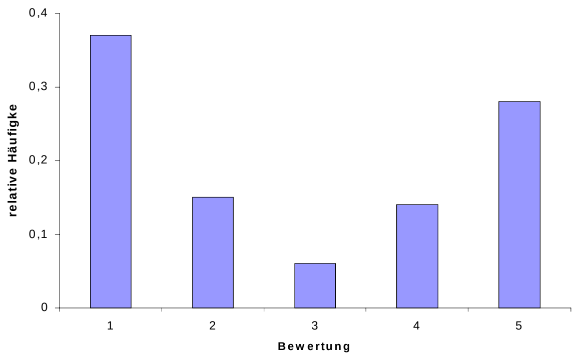
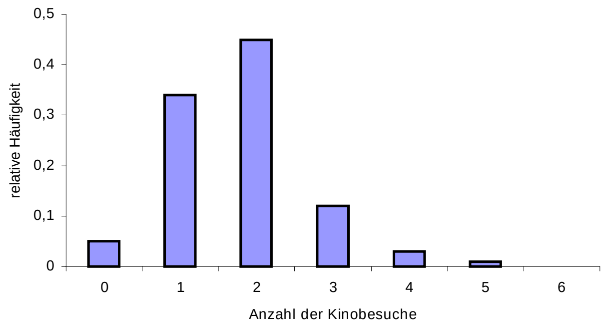
g) In einer Schule wird ermittelt, wie oft die Schülerinnen und Schüler im Monat ins Kino gehen.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
Teil a: Das Kontrollieren kann als Bernoulli-Experiment aufgefasst werden, da nur zwei Ausgänge möglich sind – man wird kontrolliert ($p = 0{,}1$) oder nicht ($q = 0{,}9$). Für die Binomialverteilung wird angenommen $n = 10$ (jeden Tag zur Schule und wieder zurück).		

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Dichtefunktion:  	**II**	Zur Wiederholung oder Übung können die einzelnen Werte der Verteilungen auch berechnet oder einer Tafel entnommen werden.
Teil b: Hier liegt eine hypergeometrische Verteilung vor: Da diese zehn Lose einzeln dem Lostopf entnommen werden, ändert sich bei jedem Los die Chance zu gewinnen.  	**II**	Diese Aufgabe kann auch diskutiert werden unter dem Gesichtspunkt: Man kauft so lange Lose, bis ein Gewinn dabei ist. Dann ergibt sich eine geometrische Verteilung.
Teil c: Da eine große Population untersucht wird, kann man annehmen, die Körpergröße ist (wie jede biologische Größe) normalverteilt. Auf die graphische Darstellung wird hier verzichtet.	**I**	Es sollte besprochen werden, dass kleine Stichproben durchaus eine Abweichung von der Normalverteilung zeigen können, vor allem, wenn sie nicht repräsentativ zusammen gesetzt sind.

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
Teil d: Das Warten auf den Erfolg (auch das letzte Bild zu erlangen) wird mit einer geometrischen Wahrscheinlichkeit gut beschrieben. Dabei ist p = 0,1. 	**II**	Zum besseren Verständnis der Aussage dieser Verteilung (und des dazugehörigen Diagramms) sollte auf den Unterschied der folgenden Aussagen hingewiesen werden: - Ich erhalte das fehlende Sammelbild genau bei der n-ten Tafel (Dichtefunktion). - Ich erhalte das Sammelbild spätestens bei der n-ten Tafel (Summenfunktion).
Teil e: Mit einigen zusätzlichen Bedingungen kann angenommen werden, die Verteilung hat folgende Eigenschaften: - diskret (da ganzzahlige Anzahl von Personen), - periodisch (die Menschenansammlung wird sich in jeder Wartezeit wiederholen), - kein Maximum im Innern des Periodenintervalls, sondern am rechten Rand. 	**III**	Diese zusätzlichen Annahmen müssen mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam gefunden bzw. festgelegt werden. Solche könnten z. B. sein: - an dieser Haltestelle fährt nur eine Linie, - die Untersuchung erfolgt im Berufsverkehr.

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Bemerkungen</th></tr>
<tr><td>Teil f:
Wenn der Politiker sich einer politischen Richtung besonders verpflichtet fühlt, so wird sich das auch bei der Umfrage in einer Polarisierung widerspiegeln. Viele werden dem Politiker zustimmen und darum gute Noten geben, andere werden dessen Haltung und damit seine Person negativ beurteilen. Die Verteilung muss diskret sein (Skala war vorgegeben) und wird links und rechts zwei Hochpunkte haben.

</td><td>III</td><td>Diese Verteilungsform wird in der Literatur nach ihrem Erscheinungsbild U-Verteilung genannt und ist relativ häufig bei politischen Umfragen anzutreffen.</td></tr>
<tr><td>Teil g:
Die Verteilung ist diskret, da ja nur ganzzahlige Kinobesuche möglich sind. Ihr Verlauf wird einen Hochpunkt aufweisen. Die „Steilheit“ der Kurve und die Lage des Hochpunktes wird sich aber nach den örtlichen Möglichkeiten eines Kinobesuches richten. Eine denkbare Verteilung in einer Großstadt wäre folgende:

</td><td>III</td><td></td></tr>
</table>

4.2.2 Schützenfest

Bei einem Schützenfest wird nach folgender Regel auf eine Scheibe geschossen: Der Schütze schießt bis zum ersten Treffer, höchstens aber bis zum vierten Schuss. Ein Schütze habe 80% Treffwahrscheinlichkeit.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel von einem Schützen getroffen?

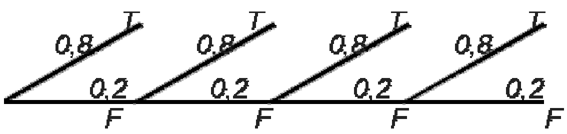
b) Geben Sie die Verteilungsfunktion für die zufällige Anzahl X der abgegebenen Schüsse an (Tabelle und Histogramm).

c) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse verbal und ermitteln Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

(1) $X > 0$ (2) $X \leq 2$ (3) $X \leq 4$ (4) $X > 4$.

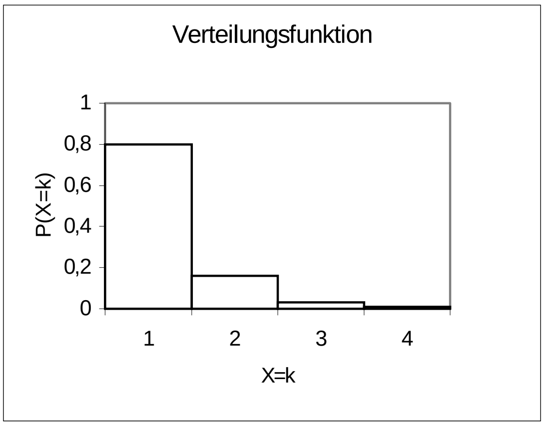
d) 20 „gleichstarke" Schützen (Treffwahrscheinlichkeit 80%) tragen nach der oben beschriebenen Regel einen Wettbewerb aus. Ermitteln Sie, mit wie vielen Schüssen in diesem Wettbewerb im Mittel zu rechnen ist.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
		<u>UnterrichtlicheVoraussetzungen:</u> Zufallsgröße, Verteilungsfunktion und deren Darstellung, Erwartungswert
a) Baumdiagramm:  T: Treffer; F: Fehlschuss Z: Ziel getroffen $P(Z) = 1 - P(\overline{Z}) = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984$	II	Die Aufgabe kann auf Bernoulli-Ketten zurückgeführt werden, auch eine Lösung über Baumdiagramme ist möglich. Die zwei Möglichkeiten „Treffer" und „Fehlschuss" weisen auf ein Bernoulli-Experiment hin. Die Frage könnte von Schülerinnen und Schülern mit dem Hinweis auf die Trefferwahrscheinlichkeit von 80% abgetan werden. Das entspricht aber nicht dem beschriebenen Zufallsexperiment.

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>b) Verteilungsfunktion:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,8	0,16	0,032	0,008



</td><td>II</td><td>Es ist zu beachten, dass bei X = 4 die Wahrscheinlichkeiten für „Treffer“ und für „Fehlschuss“ addiert werden.</td></tr>
<tr><td>c)
$X > 0$: (mindestens) ein Schuss
$P(X>0) = 1$ (siehe a)
$X \leq 2$: höchstens zwei Schüsse
$P(X \leq 2) = 0,96$
$X \leq 4$: höchstens vier abgegebene Schüsse
$P(X \leq 4) = 1$
$X > 4$: mehr als vier abgegebene Schüsse
$P(X>4) = 0$</td><td>I</td><td>Die verbale Interpretation von Ereignissen, die als Ungleichungen der Zufallsgröße X vorliegen, ist eine Umkehrung des Modellbildungsprozesses, der beim Lösen von Anwendungsaufgaben abläuft.
Sicheres Ereignis
Unmögliches Ereignis</td></tr>
<tr><td>d)
$E(X) = 1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,032 + 4 \cdot 0,008$
$= 1,248$
Im Mittel wird ein Schütze das Ziel mit 1,25 Schüssen treffen. Damit sind im Mittel 25 Schüsse zu erwarten.</td><td>II</td><td></td></tr>
</table>

4.2.3 Elektronisches Gerät

Ein elektronisches Gerät bestehe aus n Bauteilen, von denen jedes mit der Wahrscheinlichkeit p ($0<p<1$) in einem Zeitraum T ausfällt. Das Ausfallen oder störungsfreie Arbeiten der Bauteile geschehe unabhängig voneinander. Das Gerät ist funktionsuntüchtig, wenn mindestens ein Bauteil innerhalb T ausfällt.

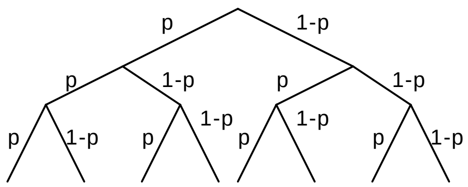
a) Stellen Sie den Sachverhalt für drei Bauteile in einem Baumdiagramm dar und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von drei Bauteilen genau eines ausfällt.

b) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der während des Zeitraumes T ausfallenden Bauteile.
Stellen Sie für $n = 4$ und $p = 0{,}1$ eine Tabelle der Verteilungsfunktion für die Zufallsgröße X auf.
Geben Sie eine Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X an (n beliebig) und begründen Sie Ihre Wahl.

c) Einer Firma liegen zwei Angebote für ein elektronisches Gerät vor. Das Gerät A ist in Modulbauweise gefertigt und besteht aus fünf Modulen mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}05$. Das Gerät B ist in herkömmlicher Bauweise gefertigt und besteht aus 40 Bauteilen, wobei jedes eine Ausfallwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}02$ hat.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Gerät vom Typ A oder B funktionsuntüchtig ist.

d) Ein Gerät aus 50 Bauteilen soll zu mindestens 95% verfügbar sein.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit p ein Bauteil dann höchstens ausfallen darf.

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Hinweise</th></tr>
<tr><td>a)


A: Genau eines von drei Bauteilen fällt aus.
$P(A) = 3p(1-p)^2$</td><td>I
(GK)</td><td><u>Unterrichtliche Voraussetzung:</u>
- Binomialverteilung

Die Aufgabe lässt sich gleichermaßen für Grund- oder Leistungskurs einsetzen und stellt eine Standardsituation für die Anwendung der Binomialverteilung dar.
Die Teile a) und b) dienen dem Heranführen an die Problemstellung und können für einen Einsatz im Leistungskurs wegfallen.</td></tr>
<tr><td>b)
X: Anzahl der ausfallenden Teile
X ~ B(n;p), denn es interessieren nur die Ereignisse „Ausfallen“ oder „Nicht ausfallen“
<table><tr><td>X=k</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>P(X=k)</td><td>0,6561</td><td>0,2916</td><td>0,0486</td><td>0,0036</td><td>0,0001</td></tr></table>
$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$</td><td>II
(GK)</td><td></td></tr>
<tr><td>c)
Angebot A:
$P(X_A \geq 1) = 1 - P(X_A < 1)$
$= 1 - \binom{5}{0}0{,}05^0 0{,}95^5 = 0{,}2262$
Analog für Angebot B:
$P(X_B \geq 1) = 0{,}5543$</td><td>

II
(LK)
II
(GK)</td><td>Durch die Signalgebung „ausfallen“/“nicht ausfallen“ und „unabhängig“ sollte für einen Schülerinnen und Schüler im Leistungskurs der Schluss auf eine binomialverteilte Zufallsgröße möglich sein.
Für den Leistungskurs kommt hier Teil a) hinzu!
Umsetzen des Aufgabentextes „mindestens ein Teil fällt aus“ in das mathematische Modell</td></tr>
<tr><td>d)
Y ~ B(50;p)
$P(Y \geq 1) < 0{,}05$
$1 - (1-p)^{50} < 0{,}05$
$p < 1 - 0{,}95^{\frac{1}{50}} \approx 0{,}001$</td><td>III
(GK)
II
(LK)</td><td>Typische „Mindestens“-Aufgabe, bei der nach der Wahrscheinlichkeit für „Treffer“ gefragt wird.</td></tr>
</table>

4.2.4 Brauerei

Eine regionale Brauerei veranstaltet eine Bierverkostung. Dabei werden jeder Versuchsperson vier äußerlich nicht unterscheidbare Kostproben Bier vorgesetzt, wovon eine von besagter Brauerei stammt. Von 20 Versuchspersonen geben 13 vor, das Bier der Brauerei am Geschmack erkannt zu haben.
Beurteilen Sie, ob dieses Ergebnis durch Erraten erzielt worden sein kann.

Lösungsvorschlag/ Hinweise:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
Bei der zufälligen Auswahl einer Kostprobe beträgt die „Trefferwahrscheinlichkeit” $p = 0{,}25$. Unter der Annahme, dass alle Versuchspersonen unabhängig voneinander zufällig eine Kostprobe wählen, ist die Zufallsgröße X: „Anzahl der richtig zugeordneten Kostproben” binomialverteilt. $X \sim B(20;\, 0{,}25)$ 1. Variante: Ermitteln des Erwartungswertes: $E(X) = 5 \Rightarrow$ Im Mittel sind fünf korrekte Zuordnungen zu erwarten, wenn die Zuordnung geraten wird. Bei 13 Übereinstimmungen ist das wohl nicht der Fall. 2. Variante: Berechnen einer Wahrscheinlichkeit: Mit $X \sim B(20;0{,}25)$ ist $P(X=13) = \binom{20}{13} 0{,}25^{13} 0{,}75^{7} \approx 0{,}00015.$ $\Rightarrow$ Es ist eher unwahrscheinlich, dass 13 Personen richtig raten.	II	Die Aufgabe kann als „offen“ angesehen werden. Die wesentliche Arbeit besteht für die Schülerinnen und Schüler im Auffinden eines geeigneten stochastischen Modells.

4.2.5 Tombola

Bei einer Tombola wird aus einem Gefäß mit 45 schwarzen und fünf weißen Kugeln eine Kugel gezogen und anschließend wieder zurückgelegt. Falls die Kugel weiß ist, bekommt der Spieler einen Preis. Es gibt 12 Preise.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Preise für 50 Spieler ausreichen.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
Durch das „Ziehen mit Zurücklegen“ bleibt die Trefferwahrscheinlichkeit konstant bei $p = 0,1$. Damit kann die Zufallsgröße X: „Anzahl der Gewinne bei 50 Ziehungen“ als binomialverteilt mit $X \sim B(50; 0,1)$ betrachtet werden. Zu untersuchen ist nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens 12 Gewinne bei 50 Ziehungen auftreten.		Auch bei dieser Aufgabe ist das Erkennen der Bernoulli-Kette der Schlüssel zur Lösung.
$P(X \leq 12) = F_{50;0,1}(12) = 0,999$ Mit 99,9%iger Wahrscheinlichkeit reichen 12 Preise aus.		Um eine 100%ige Sicherheit dafür zu erhalten, dass die Preise bei 50 Ziehungen ausreichen, wären 50 Preise notwendig.

4.2.6 Werkstücke (Normalverteilung)

Auf einer automatischen Fertigungsanlage wird ein Werkstück mit einer Bohrung versehen. Der Durchmesser der Bohrung kann als normalverteilte Zufallsgröße aufgefasst werden. Im Mittel ist der Durchmesser der Bohrungen 30,0 mm groß bei einer Standardabweichung von 0,2 mm.

a) Das Werkstück gilt als Ausschuss, wenn die Bohrung kleiner als 29,7 mm ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Werkstück Ausschuss ist.
b) Die nachfolgenden Produktionsgänge erlauben eine Toleranz von $\pm 0,2$ mm. Ermitteln Sie, welcher Anteil der Werkstücke im Toleranzbereich liegt.
c) Der Anteil von Werkstücken im Toleranzbereich soll durch eine Umrüstung der Maschine erhöht werden. Berechnen Sie die Standardabweichung, mit der mindestens 90% der Werkstücke im Toleranzbereich liegen.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Hinweise**
a) ZG X: „Durchmesser der Bohrung“ X ~ N(30,0; 0,2) P(X<29,7) = $\Phi\left(\frac{29{,}7-30}{0{,}2}\right) = \Phi(-1{,}5)$ = 1 - 0,9332 = 0,0668	I	Unterrichtliche Voraussetzungen: - Normalverteilung - Tabelle der Summenfunktion
b) P(29,8 ≤ X ≤ 30,2) = $\Phi\left(\frac{30{,}2-30}{0{,}2}\right) - \Phi\left(\frac{29{,}8-30}{0{,}2}\right)$ = 2Φ(1) - 1 = 0,6826	II	Falls im Unterricht die Wahrscheinlichkeiten P(μ - kσ ≤ X ≤ μ + kσ) für X ~ N(μ; σ) erörtert wurden, kann deren Kenntnis sofort auf die Aufgabe b) angewandt werden und die Lösung folgt sofort.
c) Standardabweichung s ist so gesucht, dass P(30,0-s ≤ X ≤ 30,0+s) ≥ 0,9 P(30,0-s ≤ X ≤ 30,0+s) = $2\,\Phi\left(\frac{0{,}2}{s}\right) - 1 \geq 0{,}9$ und $\frac{0{,}2}{s} \geq 1{,}65$, womit nun s ≤ 0,12 folgt.	II	„Umkehrung“ der gewöhnlichen Fragestellung

4.2.7 Chipsätze (Näherung der Binomial- durch die Normalverteilung)

Ein Hersteller von Mainboards benötigt 200 Stück eines bestimmten Chipsatzes. Erfahrungsgemäß ist bei diesem Chipsatz mit 10% Ausschuss zu rechnen.

a) Es werden vorsichtshalber 220 Chipsätze geordert.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der diese Anzahl nicht ausreicht.

b) Die Anzahl der Chipsätze soll mit mindestens 99%iger Sicherheit ausreichen. Ermitteln Sie die Anzahl der Chipsätze, die unter dieser Bedingung zu ordern ist.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	AFB	Hinweise
		<u>Unterrichtliche Voraussetzungen:</u> Binomialverteilung, Näherung durch Normalverteilung
a) Modellbildung: X: „Anzahl defekter Chipsätze in der Lieferung“ n = 220, E(X) = 22 Var(X) = 19,8 > 9; also Näherung zulässig $P(X > 20) \approx 1 - \Phi\left(\frac{20-22+0,5}{\sqrt{19,8}}\right)$ $\approx 1 - \Phi(-0,337) \approx \Phi(0,34)$ $\approx 63,4\%$ (Tabellenwert)	II	Zunächst kann das Problem als Bernoulli-Kette interpretiert werden. Anschließend ist die Näherung über die Normalverteilung vorzunehmen. Die Stetigkeitskorrektur +0,5 gleicht einen Fehler aus, der durch das Approximieren der diskreten Zufallsgröße X mit einer stetigen Zufallsgröße entsteht.
b) Modellbildung: n unbekannt, X wie in a), $E(X) = n \cdot 0,1$, $\sigma = \sqrt{n \cdot 0,09}$ Ansatz: $P(n - X \geq 200) \geq 0,99$ $\Leftrightarrow \quad P(X \leq n - 200) \geq 0,99$ Näherung: $\Phi\left(\frac{n-200-n \cdot 0,1+0,5}{\sqrt{n \cdot 0,09}}\right) \geq 0,99$ $\Leftrightarrow \frac{n-200-n \cdot 0,1+0,5}{\sqrt{n \cdot 0,09}} \geq 2,33$ $\Leftrightarrow 0,9n - 0,699 \cdot \sqrt{n} - 199,5 \geq 0$ $\Leftrightarrow n - 0,776 \cdot \sqrt{n} - 221,6 \geq 0$ Die Lösung der zugehörigen Gleichung ist $\sqrt{n_1} = 15,27$ $\Rightarrow n \geq 233,3$ Also sind mindestens 234 Chipsätze zu bestellen	III	Dieser Aufgabenteil erfordert deutlich mehr Rechenaufwand als a), obwohl die Fragestellungen ähnlich erscheinen. Eine Lösung ist nur über eine Näherung möglich. Hier liegt für die Schülerinnen und Schüler die Schwierigkeit in der Erkenntnis, dass die Variable n auch im Erwartungswert und der Standardabweichung auftritt. weiterführend: mit entsprechenden Hilfsmitteln (CAS, Tabellenkalkulation) die Werte in a) exakt berechnen

4.2.8 Schuhgrößen

Die Länge der Füße von männlichen Erwachsenen in Deutschland sei normalverteilt mit μ = 28 cm und σ = 1,5 cm. Da nicht für jede Fußgröße bei industrieller Schuhherstellung ein genau passender Schuh produziert werden kann, wurde in Frankreich folgende Regelung aufgestellt, die auch für Deutschland übernommen wurde:

Man teilt zwei Zentimeter in drei gleiche Teile und nennt die so entstehende Länge den „Pariser Stich", 1 st = 2/3 cm = 6,6667 mm.

Damit kann man aus der Fußlänge l in cm die Schuhgröße S in Stich errechnen:

S = 1,5 l

Beispiel: l = 28 cm S = 42 st

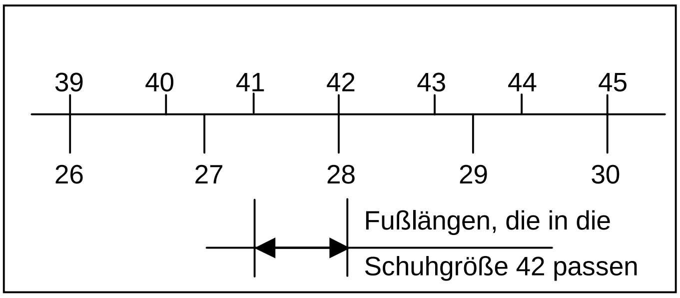
a) Berechnen Sie, wie viel Prozent der erwachsenen männlichen Bevölkerung in Deutschland die Schuhgröße 42 bzw. 45 haben. (Der Einfachheit halber werde angenommen, es gäbe keine halben Größen.)

b) Ein Schuhgeschäft wird täglich von 200 (2000) Kunden frequentiert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde mit Übergröße (Schuhe mit der Schuhgröße 48 und größer) im Laufe eines Tages dieses Geschäft aufsucht?

Lösungsvorschlag:

<table>
<tr><th>Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Bemerkungen</th></tr>
<tr><td>

Teil a:



Wenn jemandem Schuhe der Größe 42 (45) passen sollen, so muss die Länge seiner Füße im Intervall 27,33 cm $\leq$ l $\leq$ 28 cm (29,33 cm $\leq$ l $\leq$ 30 cm) liegen. Dann aber gilt:

P (27,33 < l $\leq$ 28)

$$= \Phi\left(\frac{28-28}{1{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{27{,}33-28}{1{,}5}\right)$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-0{,}45)$$

$$= 0{,}174$$

</td><td>II</td><td>Diese besondere Klasseneinteilung ist mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren, da sie z. B. bei Konfektionsgrößen anders vorgenommen wird (die Größe ist dort die Klassenmitte).</td></tr>
</table>

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
Damit haben 17,4% der erwachsenen Männer die Schuhgröße 42. Analog folgt für die Schuhgröße 45: $P(29{,}33 < l \le 30) = 0{,}095$ Damit haben 9,5% der Männer diese Schuhgröße.	II	
Teil b: Zuerst muss die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt werden, dass ein Kunde eine Übergröße trägt: $P(x \ge 31{,}66) = 1 - P(x < 31{,}66)$ $= 1 - \Phi\left(\frac{31{,}66 - 28}{1{,}5}\right)$ $= 1 - \Phi(2{,}44)$ $= 0{,}0073$ Der Besuch der 200 (2000) männlichen Kunden wird als zweihundertfache Wiederholung eines Bernoulli-Experiments aufgefasst. Dann tritt das gefragte Ereignis genau dann ein, wenn mindestens ein Kunde mit Übergröße im Laufe eines Tages das Geschäft betritt. Also: $P(x \ge 1; 200; 0{,}0073) = 1 - P(x = 0)$ $= 1 - \binom{200}{0} \cdot 0{,}0073^0 \cdot 0{,}9927^{200}$ $= 0{,}77$ Analog folgt für 2000 Kunden: $P(x \ge 1; 2000; 0{,}0073) = 1 - P(x = 0)$ $= 1 - \binom{2000}{0} \cdot 0{,}0073^0 \cdot 0{,}9927^{2000}$ $= 1$	II II	Dieser mathematische Ansatz setzt voraus, dass in der Stichprobe (Kunden, die das Geschäft aufsuchen) prozentual genauso viele Menschen mit Übergrößen sind, wie in der Gesamtbevölkerung. Erfahrene Kunden mit Übergrößen werden aber normale Schuhgeschäfte nicht mehr aufsuchen – entgegen der berechneten Wahrscheinlichkeit. Trotzdem ergibt sich, zumindest für das größere der beiden Schuhgeschäfte, die Frage nach dem wirtschaftlichen Sinn des Führens von Übergrößen (Marktlücke).

5 Beurteilende Statistik

5.1 Der „Blaue Engel“

Das Bundesumweltministerium führte 1996 eine Umfrage zum Bekanntheitsgrad des 1978 eingeführten deutschen Umweltzeichens „Blauer Engel“ durch. Dabei wurde festgestellt, dass nur 33% der Bevölkerung der neuen Bundesländer die Bedeutung dieses Zeichens kennen.

Variante 1 (Orientierung auf einseitigen Test)

Mit einer Umfrage soll stichprobenartig geprüft werden, ob der Bekanntheitsgrad dieses Zeichens in Ihrer Gemeinde größer ist.

a) Entwickeln Sie einen Entscheidungstest für eine Stichprobengröße von $n = 50$ (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$).

   Bereiten Sie für diesen Test einen geeigneten Fragebogen vor, führen Sie diesen Test durch und werten Sie ihn aus.

b) Bestimmen Sie die Größe der Stichprobe, wenn mit der Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ das Stichprobenergebnis nicht mehr als 5% (2%) von der Grundgesamtheit abweichen darf.

c) Vergleichen Sie die Vor- und Nachteile, die sich aus der unterschiedlichen Stichprobengröße bei a) und b) für die Durchführung des Tests ergeben.

Variante 2 (Lösungsverfahren frei wählbar)

Es soll geprüft werden, ob der Bekanntheitsgrad dieses Umweltzeichens Ihrer Gemeinde größer ist.

Beschreiben und begründen Sie ein geeignetes Verfahren.

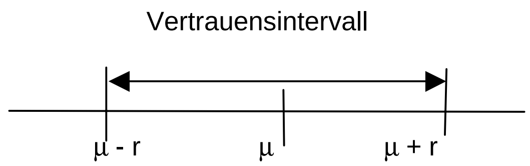
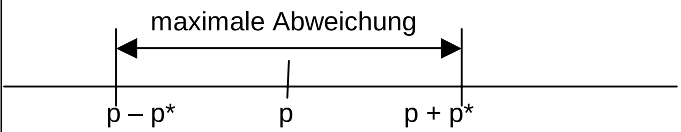
Hinweis zum Umweltzeichen „Blauer Engel“

Das Umweltzeichen wurde 1977 von den für Umweltschutz zuständigen Ministerien des Bundes und der Länder geschaffen. Mit dem „Blauen Engel“ können solche Produkte gekennzeichnet werden, die im Vergleich zu anderen Produkten mit demselben Gebrauchszweck – also relativ gesehen – als besonders umweltfreundlich bezeichnet werden können. Die besondere Umweltfreundlichkeit eines Produktes kann verschiedene Gründe haben.

Es kann z. B. besonders lärm- oder emissionsarm sein, es kann Abfall vermindern oder Abwasser entlasten, schädliche Inhaltsstoffe reduzieren oder ganz vermeiden oder das Recycling fördern. Das Umweltzeichen soll eine Einkaufshilfe für den Verbraucher sein. Der Käufer kann die Umweltfreundlichkeit bei der Fülle von Produkten nur sehr schwer oder gar nicht beurteilen. Hier dient der „Blaue Engel“ als eine Art Umwelt-Wegweiser.

Lösungsvorschlag (Variante 1):

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Teil a: In einem einseitigen Entscheidungstest soll die Nullhypothese H_0: p = 1/3 geprüft werden. Die Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art) von $\alpha = 0{,}05$ bedeutet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% der Mittelwert der Stichprobe x in der 1,96-σ-Umgebung um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ liegen muss, wenn H_0 bestätigt werden soll: $\mu = 50 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}67$ $\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{50 \cdot 1/3 \cdot 2/3} = 3{,}33$ $r = 1{,}96 \cdot \sigma = 6{,}53$ Damit folgt für das Vertrauensintervall $10{,}13 \le x \le 23{,}20.$ Daraus kann der kritische Wert für die Umfrage zu k = 24 festgelegt werden. Nur wenn mindestens 24 der 50 Befragten die Bedeutung des Umweltzeichens „Blauer Engel“ kennen, kann mit 95% Sicherheit davon ausgegangen werden, dass der Bekanntheitsgrad größer als 33% ist.	II	Komplexaufgabe für einen handlungsorientiert gestalteten Mathematikunterricht Vor der Erarbeitung des Fragebogens ist zu klären, was heißt „bekannt“ bez. dieses Umweltzeichens und durch welche Fragen könnte das erfasst werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich dazu genauer über die Vergabe/ Verwendung dieses Zeichens informieren.

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
Teil b: Zur Bestimmung der Größe einer Stichprobe, die mit einer gewissen Zuverlässigkeit (1 - p*) eine Aussage über die Grundgesamtheit zulässt, ist z. B. folgende Herleitung möglich: 		Dieser Teil sollte im Unterricht mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeitet werden. Ist die Formel zur Berechnung der Größe einer Stichprobe bekannt, so entspricht dieser Aufgabenteil dem Anforderungsniveau I.
Die Mittelwerte von Stichproben sind normalverteilt (auch, wenn das für die Variable nicht zutreffen sollte), wobei in der r–Umgebung um den Erwartungswert μ folgende Anteile liegen: r = σ 68,27% r = 1,96 σ 95,00% r = 2,58 σ 99,00% Der Übergang von den absoluten zu den relativen Häufigkeiten und zu den Wahrscheinlichkeiten ergibt folgendes Bild:  Dabei ist p = μ/n und p* die zulässige (vorgegebene) Abweichung des Ergebnisses der Stichprobe von der Grundgesamtheit. Also gilt $P^* \le \frac{r}{n}$	III	
$P^* \le \frac{1{,}96 \cdot \sqrt{npq}}{n}$ $n \ge \frac{1{,}96^2 \cdot p \cdot q}{p^{*2}}$	I	
Auf das Beispiel bezogen folgt für P* = 5% n ≥ 342 und für P* = 2% n ≥ 2135.	II	Die Schülerinnen und Schüler sollten kritisch Meinungsumfragen in der Presse bez. der Genauigkeit der Aussage und des Stichprobenumfangs prüfen.

<table>
<tr><th colspan="3">Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Bemerkungen</th></tr>
<tr><td colspan="3">Teil c:</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">In der Diskussion sollte deutlich werden, dass ein Kompromiss zwischen der angestrebten Genauigkeit und dem dafür notwendigen Aufwand gefunden werden muss.</td></tr>
<tr><td></td><td>Stichprobengröße 50</td><td>Stichprobengröße 342 (2134)</td></tr>
<tr><td>Vorteil</td><td>- Durchführung leicht und billig
- Auswertung schnell</td><td>- Durchführung aufwendig und teuer
- Auswertung aufwendig</td></tr>
<tr><td>Nachteil</td><td>- Aussage ungenau (47% müssen Zeichen kennen, damit H_0 widerlegt werden kann)</td><td>- Aussage genauer (nur 39% bzw. 36% müssen Zeichen kennen, damit H_0 widerlegt werden kann)</td></tr>
</table>

Lösungsvorschlag (Variante 2):

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
Variante 2 lässt zwei prinzipielle Vorgehensweisen zu: 1. die Befragung aller Einwohner der Gemeinde, 2. die Befragung einer Stichprobe. Wenn die Gemeinde relativ klein ist (z. B. Dorf mit 100 Einwohnern), ist die 1. Vorgehensweise vom Aufwand vertretbar. Das Befragungsergebnis muss nur mit 33% verglichen werden. Stochastische Untersuchungen erübrigen sich bei diesem Verfahren. Wenn die Einwohnerzahl aber eine Größe erreicht, die vom Aufwand und den Kosten nicht mehr eine Befragung aller Einwohner ab einem gewissen Alter zulässt, dann muss es zur Befragung einer Stichprobe kommen. Dazu ist es im Vorfeld notwendig, Daten über die Zusammensetzung der Gemeinde (z. B. Altersstruktur, Beschäftigungsstruktur) in Erfahrung zu bringen und danach eine repräsentative Stichprobe zusammenzustellen. Da mit der Befragung nur festgestellt werden soll, ob eine Person die Bedeutung des Umweltzeichens kennt, und nicht, wie gut sie die Bedeutung kennt, ist die Auswahl für geeignete statistischen Verfahren eingeschränkt. Neben dem einseitigen Test (Variante 1) käme der χ^2 - Test in Frage. Auf die Anwendung dieses Tests soll näher eingegangen werden.	I I II II	Es sollten Beispiele für beide Vorgehensweisen aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler besprochen werden, z. B. - Befragung an der Schule zur Veränderung der Pausenzeiten, - Befragung in einer Stadt zur Veränderung der Linienführung des ÖPNV. Die Festlegung der Kriterien für die Zusammensetzung der Stichprobe sollte an verschiedenen Beispielen diskutiert werden. Die Auswahl ist für die Schülerinnen und Schüler sowieso nur auf die im Unterricht behandelten Verfahren begrenzt. Die hier gewählten Tests sind hinsichtlich des Aufwands, der mathematischen Schwierigkeit und der Aussagekraft gleichwertig.
Für die Anwendung des χ^2-Tests gibt es zwei Möglichkeiten a) es wird eine Befragung durchgeführt und dann mit dem Test auf Signifikanz geprüft, b) es wird anhand des Tabellenwertes theoretisch für eine Anzahl von Probanden eine kritische Zahl bestimmt (analog der Variante 1, Frage a).		Die Variante a ist aufwendiger, aber mathematisch relativ einfach. Besonderer Aufwand wird für die Erarbeitung eines geeigneten Fragebogens notwendig.

<table>
<tr><th colspan="4">Lösungsschritte</th><th>AFB</th><th>Bemerkungen</th></tr>
<tr><td colspan="4">Variante 2a:
Für die Befragung des Jahres 1999 wird angenommen, dass von 120 Befragten 40 (33%) die Bedeutung des Umweltzeichens kannten und 80 nicht. Zum Vergleich könnten im Jahr 2000 ebenfalls 120 Personen befragt werden. Angenommen von denen kennen 55 die Bedeutung des Umweltzeichens. Ist dieser Unterschied signifikant oder zufällig?</td><td>II

I</td><td>Natürlich könnte auch eine andere Stichprobengröße gewählt werden. Durch diese Größe wird aber der Vergleich übersichtlicher.</td></tr>
<tr><td></td><td>Bedeutung bekannt</td><td>Bedeutung nicht bekannt</td><td></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">Diese Irrtumswahrscheinlichkeit ist für solche Untersuchungen üblich. Eine kleinere Irrtumswahrscheinlichkeit würde das Vertrauensintervall sehr vergrößern.</td></tr>
<tr><td>1996</td><td>40 (47,5)</td><td>80 (82,5)</td><td>120</td></tr>
<tr><td>2000</td><td>55 (47,5)</td><td>65 (82,5)</td><td>120</td></tr>
<tr><td></td><td>95</td><td>145</td><td>240</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\chi^2 = (47,5 - 40)^2/47,5 + (82,5 - 80)^2/82,5$
$+ (47,5 - 55)^2/47,5 + (82,5 - 65^2/82,5$
$= 6,154$
Wenn von einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ ausgegangen wird, ergibt der Tabellenwert $\chi^2_{f=1;0,05} = 3,84$. Damit ist die Abweichung signifikant. Das Umweltzeichen ist also in der befragten Gemeinde zu mehr als 33% bekannt.</td><td>I</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Variante 2b:
Um berechnen zu können, wie viel der 120 Befragten das Umweltzeichen bekannt sein müssten, damit mit einer gewissen Sicherheit (95%) behauptet werden kann, es sind mehr als 33% der Bewohner der Gemeinde, müssen in die Vier-Felder-Tafel Variable aufgenommen werden.</td><td>III</td><td>Dieser Ansatz stellt hohe Anforderungen an das abstrakte Denken.</td></tr>
<tr><td></td><td>Bedeutung bekannt</td><td>Bedeutung nicht bekannt</td><td></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">Die Berechnung der Lösungen ist nicht schwierig, erfordert aber große Sorgfalt bei den Termumformungen.</td></tr>
<tr><td>1996</td><td>40 (20 + a/2)</td><td>80 (40 + b/2)</td><td>120</td></tr>
<tr><td>2000</td><td>a (20 + a/2)</td><td>b (40 + b/2)</td><td>120</td></tr>
<tr><td></td><td>40 + a</td><td>80 + b</td><td>240</td></tr>
</table>

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
$\chi^2 = (20-a/2)^2/(20+a/2)+(40-b/2)^2/(40+b/2)$ $+(a/2-20)^2/(20+a/2)+(b/2-40)^2/(40+b/2)$ Wird für diese Untersuchung auch eine Irrtums-wahrscheinlichkeit von 5% angenommen, so muss bei einer signifikanten Abweichung $\chi^2 > 3,84$ sein. Wenn in die obige Gleichung dieser Wert und für b = 120 - a eingesetzt wird, erhält man eine Gleichung zweiten Grades, deren Lösungen $a_1 = 54,83$ und $a_2 = 26,42$ sind. Also müssen mindestens 55 der 120 Befragten die Bedeutung des Umweltzeichens kennen, damit mit 95%-iger Sicherheit behauptet werden kann, der Bekanntheitsgrad ist größer als 33%.		Wenn der kritische Wert a = 55 (Stichprobenumfang 120) auf einen Stichprobenumfang von 50 umgerechnet wird, erhält man $a_{50} = 23$ (22,85). Beim einseitigen Test war der kritische Wert 24 (23,2). Damit wird auch Gleichwertigkeit dieser beiden Tests deutlich.

5.2 Reklame

Ein Unternehmen möchte ein neues Produkt auf den Markt bringen und hat dazu einen Fernsehwerbespot erstellen lassen, der (des besseren Rechnens wegen) einmal täglich gesendet wird.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Person im Laufe eines Tages den Inhalt dieses Spots wahrnimmt, sei p = 0,05.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 20 Tagen jemand
   - noch nie,
   - genau einmal,
   - genau zweimal,
   - genau dreimal,
   - mindestens viermal

   diese Werbung gesehen hat?

b) Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeiten näherungsweise mit Hilfe der Poisson-Verteilung. Geben Sie jeweils den relativen Fehler an.

c) Nach wie viel Tagen haben mindestes 95% der Bevölkerung diese Werbung gesehen?

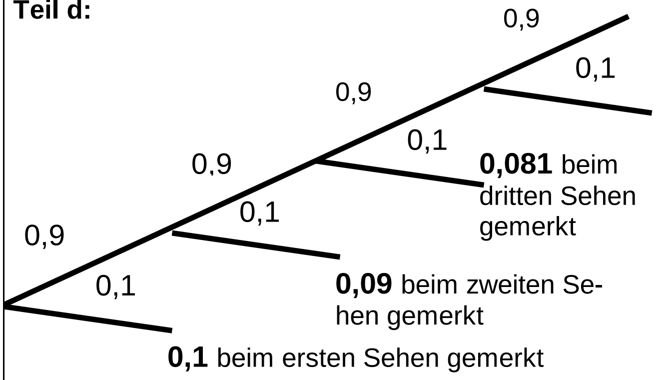
d) Nur solche Personen, die den Inhalt des Werbespots nicht vergessen, kommen als potentielle Kunden in Frage.

   Wie viel von 100 Personen beträfe das nach 20 Tagen, wenn nach jedem Sehen es sich 10% derjenigen Personen merken, die sich den Spot bisher nicht gemerkt hatten?

e) Entwickeln Sie einen geeigneten Test auf einem Signifikanzniveau von 95% mit dem der in Teilaufgabe d) theoretisch bestimmte Wert überprüft werden kann.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Teil a: Das Wahrnehmen (Sehen) des Werbespots kann als Bernoulli-Experiment aufgefasst werden. Dann gilt $P(X = k) = B(k; 20; 0{,}05) = \binom{20}{k} 0{,}05^k \, 0{,}95^{20-k}$. Bezogen auf $B(0; 20; 0{,}05) = 0{,}358$ $B(1; 20; 0{,}05) = 0{,}377$ $B(2; 20; 0{,}05) = 0{,}189$ $B(3; 20; 0{,}05) = 0{,}060$ $B(X \geq 4; 20; 0{,}05) = 1- B(x \leq 3) = 0{,}016$	I	Diese Aufgabe ist relativ komplex, da Verteilungen, Baumdiagramme und Testverfahren von den Schülerinnen und Schülern beherrscht werden müssen. Deshalb ist diese Aufgabe als komplexe Übung oder als Klausuraufgabe geeignet.

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
Teil b: Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Poisson-Verteilung verwendet man $P(k) = \frac{(n\,p)^k}{k!} \cdot e^{-np}$ Damit folgt $P(k = 0) = 0{,}368$ $F_{rel} = 2{,}8\%$ $P(x = 1) = 0{,}368$ $F_{rel} = 2{,}4\%$ $P(x = 2) = 0{,}184$ $F_{rel} = 2{,}6\%$ $P(x = 3) = 0{,}061$ $F_{rel} = 1{,}7\%$ $P(x \geq 4) = 0{,}019$	II	Zur Anwendung der Poisson-Verteilung als Näherung für die Binomial-Verteilung sind zwei Voraussetzungen zu prüfen: - Umfang n groß und - Wahrscheinlichkeit p klein. Durch den nicht sehr großen Umfang von n = 20 ist die Näherung relativ ungenau.
Teil c: Die Feststellung, dass es mindestens 95% gesehen haben sollen, ist gleichwertig mit der Feststellung, dass es höchstens 5% noch nicht gesehen haben. Daraus folgt: $B(0; n; 0{,}05) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n \leq 0{,}05$ $0{,}95^{\,n} \leq 0{,}05$ $n \geq \ln 0{,}05/\ln 0{,}95$ $n \geq 58{,}4$ Das heißt, dass man fast zwei Monate diesen Werbespot senden muss, um 95% der Bevölkerung zu erreichen.	II	
Teil d:  	II	

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Von den 100 Personen haben nach 20 Tagen - 36 den Werbespot noch nie gesehen (vgl. a), - 38 genau einmal gesehen, davon aber nur 4 sich den Inhalt gemerkt ($0{,}1 \cdot 38 \approx 4$), - 19 genau zweimal, davon aber haben sich ebenfalls nur 4 ($(0{,}1+0{,}09) \cdot 19 \approx 4$) den Inhalt gemerkt, - 6 genau dreimal gesehen, davon haben sich aber nur 2 ($(0{,}1+0{,}09+0{,}081) \cdot 6 \approx 2$) der Inhalt gemerkt, - 1 mindestens viermal gesehen und dabei auch den Inhalt gemerkt. Insgesamt haben von den 100 Personen also 64 den Werbespot gesehen, aber nur 11 können sich an den Inhalt erinnern	III	
Teil e: Zur Entwicklung des Tests wird vorausgesetzt, dass ein solcher Werbespot zum Zeitpunkt der Befragung (des Tests) seit genau 20 Tagen mehrmals im Fernsehen gesendet wird. Um den bei d ermittelten Wert theoretisch zu stützen, wird der Test so konstruiert, dass die gegenteilige Hypothese H_0: „Es haben weniger oder mehr als 11% aller Fernsehzuschauer den Spot innerhalb von 20 Tagen gesehen und sich seinen Inhalt gemerkt.“, widerlegt werden soll. Dazu wird ein zweiseitiger Test bezogen auf 100 Probanden konstruiert. Um den Erwartungswert $\mu = 11$ wird ein Vertrauensintervall (entsprechend dem Signifikanzniveau von 95%) von $1{,}96 \cdot \sigma$ gezogen, wobei $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}89} =$ 3,13 beträgt. Schlussfolgerung: Wenn der Mittelwert einer Stichprobe mit einem Umfang von 100 Personen im Intervall $4{,}87 \leq x \leq 17{,}13$ liegt, stammt diese Stichprobe mit einer Gewissheit von 95% aus der Grundgesamtheit mit p 11%. Anders ausgedrückt, nur wenn bei der Befragung weniger als 5 oder mehr als 17 Personen den Inhalt des Werbespots richtig angeben können, wird die Hypothese H_0 angenommen.	II	Der theoretische Wert von p = 0,11 lässt sich natürlich viel glaubhafter stützen, wenn er sich direkt aus einer Umfrage ergeben würde. Es ist dann aber die Frage, wie groß eine Stichprobe sein muss, die im Ergebnis nicht mehr als 0,5% von der Grundgesamtheit abweichen würde. Die Nachrechnung ergibt: $N \geq \frac{1{,}96^2\ 0{,}11 \cdot 0{,}89}{0{,}005^2}$ $N \geq 15.048$ Dieser Aufwand ist wohl nicht gerechtfertigt. Will man es nur auf 5% genau wissen, reicht die Befragung von 150 Personen.

5.3 Mendelsche Gesetze

Gregor Mendel untersuchte bei seinen Kreuzungsversuchen mit Erbsen (um 1860), wie oft verschiedene Merkmalsausprägungen nach der Kreuzung auftraten. Die ersten Versuchsreihen lieferten folgende Ergebnisse:

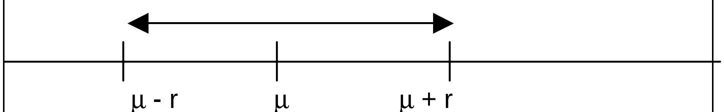
Von 7324 Samen waren 5474 rundlich und 1850 kantig.

Daraus schlussfolgerte er folgende Hypothese H_0:
Bei dominanter Vererbung haben in der F_2-Generation ¼ aller Nachkommen das eine und ¾ das andere Merkmal (2. Mendelsche Regel).

a) Weisen Sie nach, dass die experimentellen Befunde auf einem Signifikanzniveau von 99% mit dieser Hypothese übereinstimmen.

b) Untersuchen Sie, ob die Befunde auch mit folgenden Hypothesen verträglich sind.
H_1: 1/5 aller Merkmalsträger haben das eine und 4/5 das andere Merkmal,
H_2: 1/3 aller Merkmalsträger haben das eine und 2/3 das andere Merkmal.

Lösungsvorschlag:

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Teil a: Zum Nachweis wird ein zweiseitiger Test durchgeführt, bei dem die Nullhypothese H_0 : $p \neq 0{,}25$ widerlegt werden soll. Zur Überprüfung dieser Nullhypothese bildet man das Vertrauensintervall auf dem Signifikanzniveau von 99%: Vertrauensintervall für 95%  $\mu = n \cdot p$ $\mu = 7324 \cdot 0{,}25$ $\mu = 1831$ $\sigma = \sqrt{n\ p\ q}$ $\sigma = \sqrt{7324 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}$ $\sigma = 37$ $r = 2{,}58 \cdot \sigma$ $r = 95{,}6$ $1831 - 95{,}6 \leq x \leq 1831 + 95{,}6$ $1735{,}4 \leq x \leq 1926{,}6$	II	<u>Unterrichtliche Voraussetzungen:</u> Zweiseitiger Signifikanztest Der Erwartungswert μ ergibt sich aus der hypothetischen Wahrscheinlichkeit und der Stichprobengröße. Der Faktor 2,58 ergibt sich aus dem Signifikanzniveau von 95%.

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Zur Annahme von H_0 hätten in der Stichprobe höchstes 1735 bzw. mindestens 1927 kantige Samen sein müssen. Da das nicht der Fall war, wird H_0 abgelehnt.	**II**	Durch diese Rechnung wird das Mendelsche Gesetz nicht bewiesen, sie gibt diesem aber eine große Wahrscheinlichkeit. Durch umfangreichere Stichproben nach Mendel wurde dieses Gesetz weiter gestützt.
Teil b: Analog folgt für $H_0 = 0{,}2$: $\mu = 1464{,}8$ $\sigma = 34{,}2$ $r = 88{,}3$ $1376{,}5 \leq x \leq 1553{,}1$ und für $H_0 = 0{,}33$: $\mu = 2441{,}3$ $\sigma = 40{,}3$ $r = 104{,}1$ $2337{,}2 \leq x \leq 2545{,}4$ Die Anzahl der kantigen Samen lag aber bei 1850 und damit nicht in diesen Intervallen. Dadurch müssen beide Hypothesen verworfen werden, d. h. die experimentellen Befunde sind nicht verträglich mit p = 1/3 bzw. p = 1/5.		An dieser Stelle könnte auf die Größe einer Stichprobe und die daraus folgende Genauigkeit der Aussage über die Grundgesamtheit eingegangen werden. Die hier vorliegende umfangreiche Stichprobe gestattet eine Aussage für die Grundgesamtheit auf 1% genau, auch wenn die Wahrscheinlichkeit nicht bekannt ist.

5.4 Toleranzen im Maschinenbau

Ein Zulieferbetrieb stellt für den Maschinenbau Wellen mit einer Länge von l = 1000 mm her. Dabei ist die Länge normalverteilt mit der Standardabweichung von $\sigma = 0{,}3$ mm.
Für den Maschinenbau gelten nach DIN ISO 2768 T1 folgende Allgemeintoleranzen:

Toleranzklasse	Grenzabmaße für Längenmaße im Nennbereich von 400 bis 1000 mm
fein (f)	$\pm$ 0,3 mm
mittel (m)	$\pm$ 0,8 mm
grob (g)	$\pm$ 2,0 mm
sehr grob (sg)	$\pm$ 4,0 mm

a) Der wahrscheinliche Anteil der Wellen in der Toleranzklasse „f“ lässt sich mit Hilfe folgender Gleichung ermitteln:

$$P(|x - \mu| \le c) = 2\,\Phi(c / \sigma) - 1.$$

Begründen Sie diesen Ansatz.

b) Berechnen Sie die Anteile der Wellen in den einzelnen Toleranzbereichen an der Gesamtproduktion.

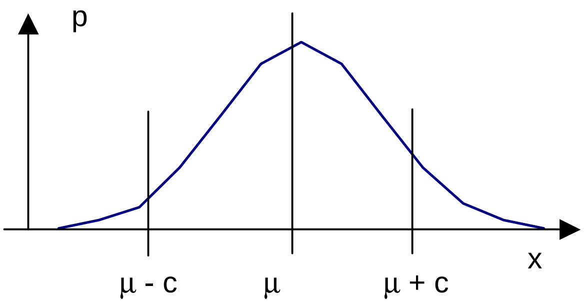
c) Die Wellen werden in Transportkisten zu je 10 Stück verpackt. Der Hersteller wirbt mit der Aufschrift „Mindestens 6 Wellen entsprechen der Toleranzklasse „f“. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Aussage nicht zutrifft.

d) Das Unternehmen will seine Marktfähigkeit dadurch erhöhen, dass es die Wellen der Toleranzklasse „f“ gesondert verpackt und verkauft. Dazu werden alle Wellen mit einem Prüfgerät vermessen, welches die Länge normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}05$ mm bestimmt.

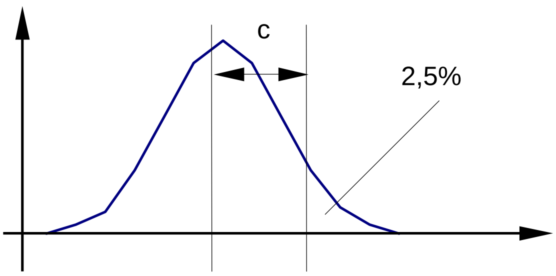
- Beschreiben Sie, worin bei diesem Prüfverfahren die Fehler 1. und 2. Art bestehen und welche Folgen die jeweiligen Fehler für das Unternehmen haben.
- Entwickeln Sie ein Prüfverfahren auf einem Signifikanzniveau von 95%.
- Bestimmen Sie die Größe der Fehler 1. und 2. Art für dieses Prüfverfahren.
- Erörtern Sie, wie durch Abwandlung des Prüfverfahrens die Fehler 1. und 2. Art beeinflusst werden können.

Lösungsvorschlag:

Diese Aufgabe kann am Ende des Stochastiklehrgangs im Schuljahrgang 13 (z. B. in einer Klausur) eingesetzt werden. Die Schüler benötigen zur Bearbeitung der gesamten Aufgabe 90 Minuten. Der Aufgabenteil d ist nur im Leistungskurs zu bearbeiten.

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Teil a: Für die Herleitung gilt $\mu = 1000$, $c = 0{,}3$ mm und $\sigma = 0{,}3$ mm.  $P(\mu - c \leq x \leq \mu - c) =$ $\Phi((\mu+c-\mu)/\sigma) - \Phi((\mu-c-\mu)/\sigma)$ $P(\lvert x-\mu \rvert \leq c) = \Phi(c/\sigma) - \Phi(-c/\sigma)$ $= \Phi(c/\sigma) - (1 - \Phi(c/\sigma))$ $= 2\,\Phi(c/\sigma) - 1$	II	<u>Unterrichtliche Voraussetzungen</u>: Normalverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung Diese Gleichung lässt sich auch an Hand der Kurve begründen, wenn eine Transformation der Symmetrieachse von μ zu $x-\mu$ vorgenommen wird.
Teil b: $P(\lvert x-1000 \rvert \leq 0{,}3) = 2\,\Phi(0{,}3/0{,}3) - 1$ $= 0{,}683$ $P(\lvert x-1000 \rvert \leq 0{,}8) = 0{,}993$ $P(\lvert x-1000 \rvert \leq 2{,}0) = 1$ Das bedeutet, dass Wellen in der Toleranzklasse f zu 68,3%, m zu 31,0%, g zu 0,7% und sg zu 0% hergestellt werden.	I II	<u>Unterrichtliche Voraussetzungen:</u> Normalverteilung, Erwartungswert, Standardabweichung, Arbeit mit Tafeln Es ist zu beachten, dass in der Wahrscheinlichkeit $P(\lvert x-1000 \rvert \leq 0{,}8)$ die Wellen der Toleranzklassen „f“ und „m“ enthalten sind.

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
Teil c: Aufschrift trifft genau dann nicht zu, wenn weniger als 6 Wellen zur Toleranzklasse „f“ gehören. Damit ist gesucht P (x $\leq$ 5) mit n = 10, p = 0,683 und q = 0,317 P (x=0) = $\binom{10}{0} \cdot 0{,}683^{0} \cdot 0{,}317^{10} = 0{,}0000$ P (x=1) = $\binom{9}{1} \cdot 0{,}683^{1} \cdot 0{,}317^{9} = 0{,}0002$ P (x=2) = $\binom{8}{2} \cdot 0{,}683^{2} \cdot 0{,}317^{8} = 0{,}0021$ P (x=3) = $\binom{7}{3} \cdot 0{,}683^{3} \cdot 0{,}317^{7} = 0{,}0123$ P (x=4) = $\binom{6}{4} \cdot 0{,}683^{4} \cdot 0{,}317^{6} = 0{,}0464$ P (x=5) = $\binom{5}{5} \cdot 0{,}683^{5} \cdot 0{,}317^{5} = 0{,}1199$ Damit folgt P (x $\leq$ 5) = 0,18.	II	<u>Unterrichtliche Voraussetzungen:</u> Binomialverteilung Schülerinnen und Schüler haben oft große Schwierigkeiten zu erkennen, dass das Gegenteil von mindestens 6 höchstens 5 ist. Diskussion: Wenn Aufschrift bleibt 18% Reklamationen, wenn Aufschrift in „Mindestens 5...“ geändert wird, nur 6% Reklamationen.
Teil d: Für die Hypothese H_0: „Die Länge der Welle weicht um mehr als 0,3 mm von der Normlänge 1000 mm ab.“ gilt Fehler 1. Art: Länge wurde fälschlicher Weise im Toleranzbereich „f“ gemessen und für gut befunden. H_0 wird abgelehnt. Konsequenz – Reklamationen	II	<u>Unterrichtliche Voraussetzungen:</u> Fehler 1 und 2. Art Was Fehler 1. und was Fehler 2. Art ist, hängt von der Formulierung der Hypothese H_0 ab.

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Fehler 2. Art: Welle liegt im Toleranzbereich, sie wird aber durch Messung ausgesondert. H_0 wird angenommen. Konsequenz - Einnahmeverlust		
Das Signifikanzniveau von 95% bedeutet, dass nur 5% der Wellen, die für die Toleranzklasse „f“ vermessen wurden, außerhalb des zulässigen Bereiches liegen (Fehler 1. Art).  Die Größe K_0 ist so festzulegen, dass 97,5% aller geprüften Wellen links des Wertes 1000,3 mm liegen. $P(\lvert x-K_0 \rvert \leq c) = 0{,}95$ $2\,\Phi(c/\,0{,}05\text{ mm}) = 0{,}95$ $c = 0{,}098\text{ mm}$ $K_0 = 1000{,}3\text{ mm} - 0{,}098\text{ mm}$ $K_0 = 1000{,}202\text{ mm}$ Analog folgt für $K_u = 999{,}7\text{ mm} + 0{,}098\text{ mm}$ $K_u = 999{,}798\text{ mm}$ Damit werden alle Wellen, die beim Messen der Forderung $K_u \leq l \leq K_0$ genügen, in den Toleranzbereich „f“ eingeordnet.	III	<u>Unterrichtliche Voraussetzungen:</u> Fehler 1. und 2. Art, einseitiger und zweiseitiger Test Die anderen 2,5% bilden die Wellen, die kürzer als 999,7 mm sind, aber als korrekt vermessen wurden. Auf Grund der Kurvensymmetrie liegen in der c-Umgebung um K_0 95% aller Messwerte.

Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Alle Wellen, die größer als K_0 und kleiner als 1000,3 mm bzw. die kleiner als K_u und größer als 999,7 mm sind, werden nach diesem Verfahren nicht in den Toleranzbereich „f“ eingeordnet (Fehler 2. Art). $P(\lvert x - \mu \rvert \leq 0{,}202 = 2\,\Phi\,(0{,}202/0{,}3) - 1$ $= 0{,}5$ Damit liegen 18,3% aller Wellen in diesem kritischen Bereich.		
Beeinflussung der Fehler 1. und 2. Art ist möglich durch: - eine Verschiebung des kritischen Wertes K_0 nach links bzw. K_u nach rechts mit den Folgen - Verringerung des Fehlers 1. Art - Vergrößerung des Fehlers 2. Art - eine Verkleinerung der Standardabweichung des Messinstruments mit den Folgen - Verringerung beider Fehler - Erhöhung der Kosten und des Zeitaufwandes für die Prüfung	II	Diskussion: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Genauigkeit eines Messinstruments und der damit zu messenden Größe?

5.5 Natürliche Radioaktivität

Zur Bestimmung der natürlichen Radioaktivität in einem Ort (Nullrate) wurden im Rahmen eines Experiments im Physikunterricht folgende Messwerte ermittelt:

Nr. der Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Impulse pro Minute	19	25	22	24	21	20	17	22	25	23
Nr. der Messung	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl der Impulse pro Minute	18	21	23	19	24	16	22	23	18	19
Nr. der Messung	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Anzahl der Impulse pro Minute	24	20	19	25	16	22	18	23	19	20
Nr. der Messung	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Anzahl der Impulse pro Minute	24	22	19	23	21	18	24	19	21	20

a) Die Anzahl radioaktiver Zerfälle pro Zeiteinheit ist normalverteilt.
Berechnen Sie für diese Stichprobe den Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung s .

b) Aus einem Physiklehrbuch erfahren die Schüler, dass in Mitteldeutschland von 20 Zerfällen pro Minute (mit einer Standardabweichung von σ = 2/min) ausgegangen werden kann. Bestimmen Sie auf einem Signifikanzniveau von 99%, ob die Messungen mit dieser Aussage verträglich sind.

c) Verallgemeinern Sie die Fragestellung unter b) zu einem statistischen Aufgabentyp. Geben Sie für diesen Typ zwei weitere Fragestellungen an, die für die Praxis von Bedeutung sein können.

Lösungsvorschlag:

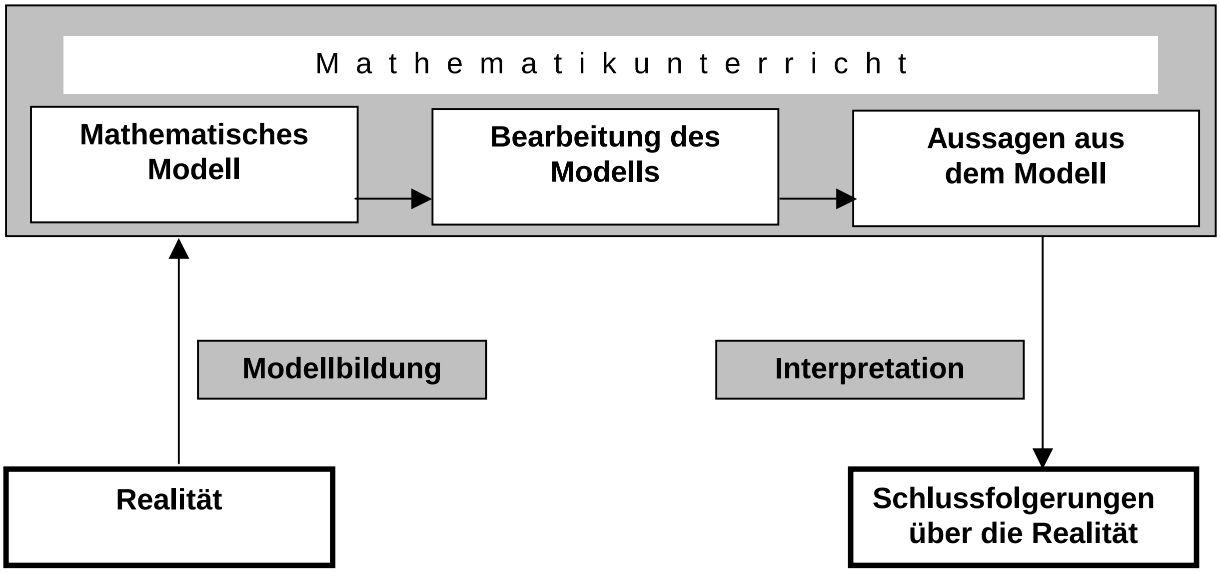
Lösungsschritte	**AFB**	**Bemerkungen**
Teil a: $x = \frac{1}{n}\sum_{i}^{40} x_i = 20{,}95$ $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i}^{40} f_i\ (x_i - x)^2 = 7{,}5$ s = 2,54	I	Zur Berechnung dieser Werte sollten die Vorteile der Taschenrechner mit Statistikfunktionen oder die Tabellenkalkulation genutzt werden.
Teil b: Der Mittelwert der Stichprobe wird nicht immer mit dem Mittelwert der Grundgesamtheit übereinstimmen, sondern normalverteilt um diesen schwanken. Deshalb gilt:	II	

Lösungsschritte	AFB	Bemerkungen
$\sigma_s = 2{,}58\ \sigma / \sqrt{n}$ Das heißt, der Mittelwert der Stichprobe vom Umfang n weicht in 99% aller Fälle nicht mehr als σ_s vom Mittelwert μ der Grundgesamtheit ab, also $\mu - \sigma_s \leq \bar{x} \leq \mu + \sigma_s$. Da für die aufgenommene Stichprobe aber $\sigma_s = 0{,}82$ ist, folgt, dass $\bar{x}$ nicht im zulässigen Intervall (19,18; 20,82) liegt. Daraus kann entweder geschlussfolgert werden, dass es sich hier um einen ganz seltenen Ausnahmefall (1 von 100) handelt oder die natürliche Radioaktivität an diesem Ort und zu der Messzeit leicht erhöht war.		Diese Formel findet man auch in speziellen Lehrbüchern der Stochastik ohne Herleitung. Die natürliche Radioaktivität ist örtlich und jahreszeitlich nicht konstant. Deshalb sind Abweichungen in dieser Größenordnung normal.
Teil c: Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass bei diesem Aufgabentyp an Hand der Kenngrößen geprüft wird, ob eine Stichprobe aus einer vorgegebenen Grundgesamtheit stammt. Beispiele für weitere Fragestellungen: • Erfassen der Häufigkeit des Auftretens einer Erkrankung in einer Region und Frage nach den Ursachen, falls diese signifikant vom Normalwert abweicht • Erfassen der Körpergröße erwachsener Personen und Frage nach der tendenziellen Erhöhung der Körpergröße • Erfassen der schulischen Leistungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern einer Altersgruppe und Vergleich mit internationalem Niveau (TIMSS); Frage nach den möglichen Ursachen für die Abweichung von Ländern mit Spitzenwerten	II	Zum Finden geeigneter Beispiele könnten die Schülerinnen und Schüler als Hausaufgabe aktuelle Pressemitteilungen auswerten.

6 Beispiel für eine projektorientierte Behandlung des Themas „Einführung in die beurteilende Statistik“ im Leistungskurs

Der Mathematikunterricht, insbesondere der in der Sekundarstufe II, hat u. a. die Aufgabe, bei den Schülerinnen und Schülern ein Verständnis für die Rolle und die Grenzen der Mathematik zur Beschreibung von Ausschnitten der Realität und zum Finden von Prognosen herauszubilden.

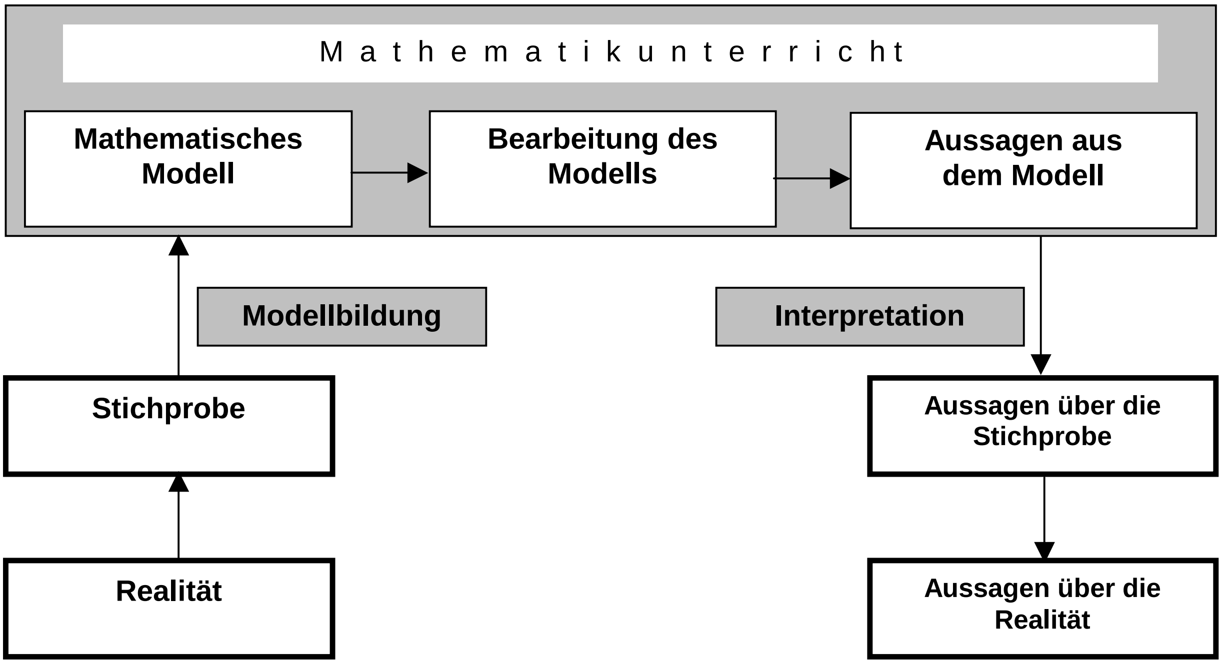
Um die Schwierigkeiten zu verdeutlichen, soll der damit verbundene Erkenntnisprozess vereinfacht in einem Schema dargestellt werden:



Im Mathematikunterricht wird bei der Lösung von Anwendungsaufgaben oft das mathematische Modell als gegeben vorausgesetzt. Die Bedeutung der Mathematik, also die Aussagefähigkeit des mathematischen Modells sowie seine Grenzen werden aber nur dann deutlich, wenn im Unterricht auch darüber gesprochen wird, wie die Daten gewonnen oder ausgewählt und welche Bedingungen (z. B. Vereinfachungen) dabei gesetzt wurden. Des Weiteren ist es für das Verstehen der Rolle der Mathematik aber auch notwendig, die Aussagen, die aus dem mathematischen Modell gewonnen wurden, wieder mit der Realität in Beziehung zu setzen. Deshalb gehören die Prozesse der Modellbildung und der Interpretation genau so selbstverständlich zum Mathematikunterricht der Sekundarstufe II wie das formale Lösen von Aufgaben.

In den Stoffgebieten Analysis und Algebra stößt das Finden mathematischer Modelle mit „echten“ Zahlen sehr schnell an die Grenzen der Schulmathematik. Da diese Probleme in der Stochastik nicht in diesem Maße zu befürchten sind, ist sie besonders gut geeignet, zielgerichtet die beschriebene Einsicht heraus zu arbeiten.

Allerdings ist der Erkenntnisprozess insbesondere dann etwas komplizierter, wenn mit Stichproben gearbeitet wird:



Im Unterricht sollte deshalb auch das Finden einer geeigneten Stichprobe thematisiert werden.

Zeitplan für die Behandlung des Themas bei der Erprobung

Für die Realisierung der oben beschriebenen Zielvorstellungen wurde nach folgendem Zeitplan für das Thema „Einführung in die beurteilende Statistik" gearbeitet. Die grau unterlegten Abschnitte wurden dabei projektartig gestaltet.

Stunde	Inhalte/Bemerkungen
1. bis 4.	Erarbeitung der theoretischen Grundlagen am Beispiel der Binomialverteilung
5. bis 7.	Einführung weiterer Methoden (Tests) der beurteilenden Statistik - Regressionsanalyse - χ^2- Test - Smirnow-Kolmogorow-Test

Stunde	Inhalte/Bemerkungen
8.	**Projektinitiative** - Finden von geeigneten Problemstellungen - Festlegen der Vorgehensweise und der Anforderungen - Bildung von Arbeitsgruppen
9. bis 11.	**Projektplanung** - Erarbeitung von Konzeptionen durch die Gruppen (Methodenwahl, Arbeitsschritte, Zeiteinteilung, Arbeitsteilung) - Vorstellung und Diskussion der Konzeptionen
Hausarbeit	**Projektbearbeitung** - Erfassung der Daten (z. B. Durchführung und Auswertung einer Befragung) - Bearbeitung der Daten - Interpretation der Ergebnisse - Erstellung der Dokumentation und der Präsentation (Kurzfassung, Poster, Referat)
12. bis 14.	**Abschluss des Projektes** - Verteidigung der Vorgehensweise und der Projektergebnisse vor dem Kurs
15.	Kontrollarbeit zum Thema

Wenn man die aufwendige Arbeit der Schülerinnen und Schüler außerhalb des Mathematikunterrichts nicht berücksichtigt, dann umfasste die eigentliche Projektbearbeitung lediglich 7 von 15 Unterrichtsstunden.

Im Vorfeld des Projektes wurden notwendige fachliche Grundlagen vermitteln. Das waren zum einen die Erarbeitung von mathematischen Begriffen (z. B. Hypothese, Fehler 1. und 2. Art) und Verfahren (z. B. einseitige und zweiseitige Entscheidungsregel) am Beispiel der Binomialverteilung. Zum anderen war aber auch die Einführung in die Arbeit mit weiteren Testverfahren notwendig, da praxisnahe Problemstellungen bearbeitet werden sollen. Es war dabei ausreichend, die theoretische Begründung kurz darzustellen und die Anwendung der Verfahren an einigen Beispielen zu erläutern und zu üben. Der Schwerpunkt lag insbesondere auf den Bedingungen, unter denen das eine oder andere Verfahren sinnvoll angewendet werden kann.

Ausgewählte mathematische Testverfahren

Die Auswahl der weiteren Verfahren erfolgte so, dass insbesondere solche berücksichtigt wurden, die häufig in verschiedenen Wissenschaften (wie Soziologie, Pädagogik, Medizin oder den Naturwissenschaften) Anwendung finden und nur geringe Anforderungen an die Stichproben stellen.

Da in den vielen Lehrbüchern auf folgende Methoden nicht eingegangen wird, sollen sie kurz erläutert werden. Genaueres kann in den angegebenen Quellen nachgelesen werden.

Korrelationsanalyse

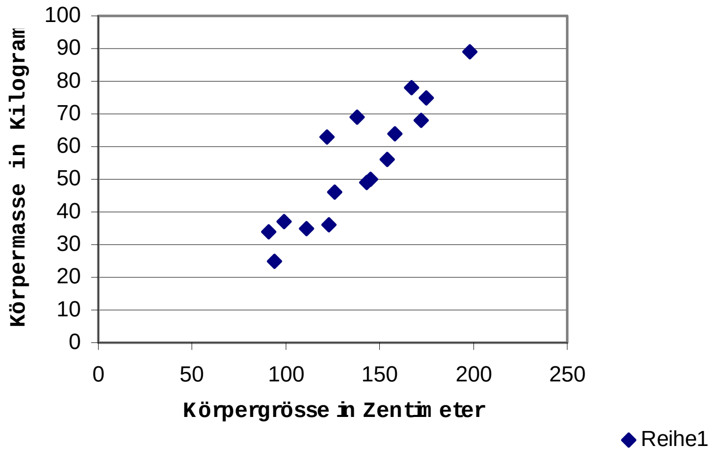
Die Korrelationsanalyse verwendet man, um den Zusammenhang der Ausprägung zweier Merkmale in einer Stichprobe zu ermitteln. Wobei die Abstufung der Ausprägung relativ fein sein soll.

An die Stichprobe werden folgende Bedingungen gestellt:

- beide Variablen liegen in metrisch skalierten Daten vor,
- für die Verteilung der Variablen kann eine Normalverteilung angenommen werden,
- es wird zwischen den Variablen ein linearer Zusammenhang vermutet,
- der Stichprobenumfang kann auch klein sein (n < 30).

Beispiel:

Die Variable x symbolisiert die Größe eines Schülers und die Variable y seine Masse. Hier können die Bedingungen als erfüllt angesehen werden.



Der Korrelationskoeffizient r kann als Anstieg derjenigen Geraden aufgefasst werden, von der alle Punkte den geringsten Abstand haben. Bei r = 0 besteht kein Zusammenhang zwischen den Merkmalen (Variablen).

Wenn von einer Stichprobe n = 16 ausgegangen wird (siehe Grafik), dann muss bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% der Korrelationskoeffizient r größer als 0,48 sein, damit der Zusammenhang Körpergröße und Masse als signifikant angesehen werden kann.

χ^2-Test[3]

Beim χ^2-Test wird der Zusammenhang zwischen der Ausprägung zweier oder mehrerer Merkmale einer Stichprobe ermittelt. Die Ausprägung der einzelnen Merkmale ist dabei recht grob. Dieser Test erfordert die Erfüllung folgender Bedingungen:

- die Variablen liegen in nominalskalierten Daten vor,
- höchstens ein Fünftel der zu erwarteten Häufigkeiten darf kleiner als 5 sein,
- der Stichprobenumfang bei nur einem Freiheitsgrad muss mindestens 40 sein.

Beispiel:
Es soll untersucht werden, ob Jungen häufiger rauchen als Mädchen. Dazu wurden 40 Schülerinnen und Schüler eines 10. Schuljahrganges zufällig ausgewählt und befragt. Da gleich viele Jungen wie Mädchen befragt wurden, ergeben sich die in Klammern gesetzten Erwartungswerte. Die Umfrageergebnisse stehen davor.

	Raucher	Nichtraucher	
Jungen	14 (11)	6 (9)	20
Mädchen	8 (11)	12 (9)	20
	22	18	40

Die Abweichungen der Umfrageergebnisse von den Erwartungswerten werden quadriert, durch die Division durch den jeweiligen Erwartungswert gewichtet und summiert. Das Ergebnis χ^2 = 3,64 wird mit einem Tabellenwert $\chi^2_{0,05,\ f=1}$ = 3,84 verglichen. Dabei bedeuten f der Freiheitsgrad, der in diesem Beispiel 1 ist (da nur eine Messgröße frei gewählt werden kann und die anderen sich aus den Randbedingungen errechnen lassen), und 0,05 die Größe des gewählten Fehlers 1. Art.

---

[3] Vgl. Abschnitt 3.2 Unabhängigkeit von Ereignissen

Die deutliche Abweichung der Umfrageergebnisse von den Erwartungswerten ist aber noch nicht signifikant, da der ermittelte χ^2-Wert kleiner als der Tabellenwert ist.

Smirnow-Kolmogorow-Test

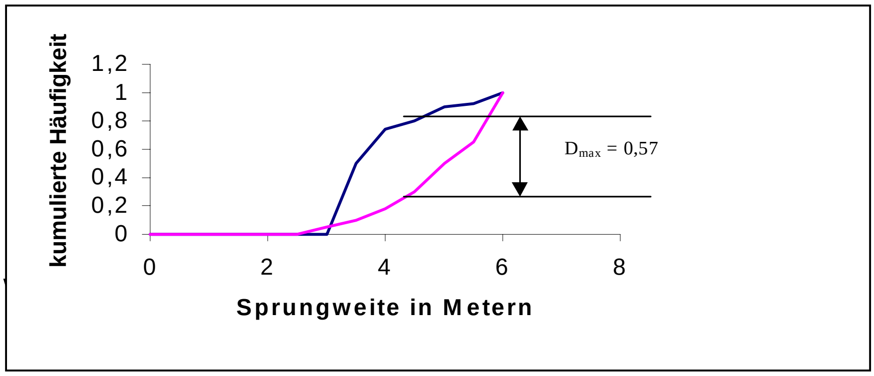
Der Test ist geeignet zu prüfen, ob die Verteilung zweier Stichproben hinsichtlich eines Merkmals übereinstimmen. Folgende Bedingungen sind dabei einzuhalten:

- die gemessene Größe ist stetig,
- es liegt eine relativ große Stichprobe vor.

Beispiel:

Es soll untersucht werden, ob eine bestimmte Trainingsmethode des Weitsprungs wirklich zu weiteren Sprüngen führt. Es wurden die Sprungweiten von 20 Schülerinnen und Schülern vor und nach dem Training gemessen, zu Gruppen zusammengefasst und die kumulierte Häufigkeit grafisch dargestellt.

Die obere Kurve stellt die Sprungweiten vor und die untere nach dem Training dar. Der Unterschied ist deutlich und auch signifikant, da die maximale Differenz größer ist als das Entscheidungskriterium $D_{20;20;0,05} = 0,35$. Dieses kann man einer Tabelle entnehmen. Dabei geben die ersten beiden Zahlen (20; 20) den Umfang der Stichproben und die dritte Zahl die gewählte Größe des Fehlers 1. Art (hier 5%) an.



Projektinitiative

Nach dem Erläutern des Anliegens der folgenden Stunden wurden von den Schülerinnen und Schüler Problemstellungen vorgeschlagen, die mit Mitteln der Stochastik untersucht werden sollten. Die Schülerinnen und Schüler des Leistungskurses entschieden sich jeweils für eine der folgenden Problemstellungen, die dann in Gruppen bearbeitet wurden:

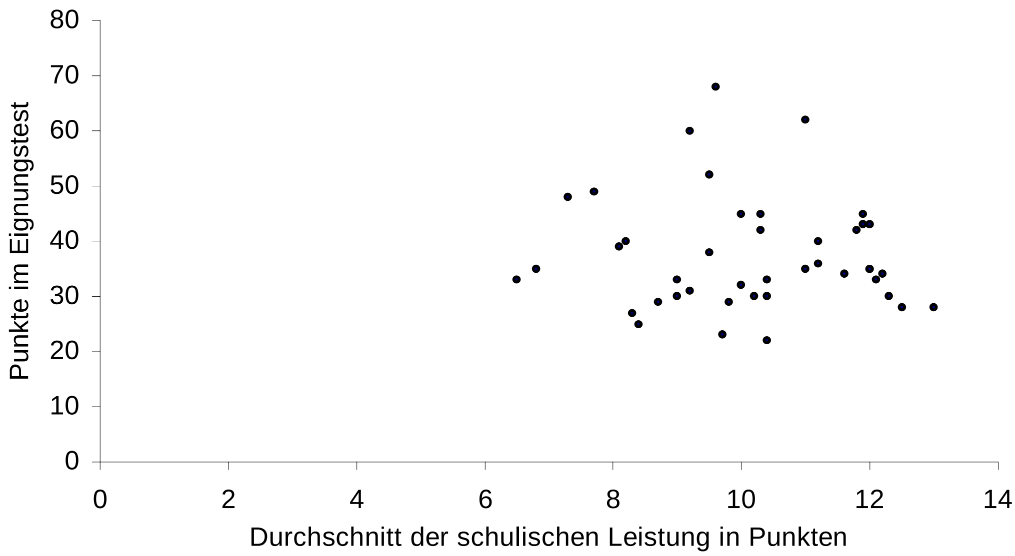
- Besteht ein Zusammenhang zwischen den schulischen Leistungen und dem Erfolg bei Eignungstests?
- Was ist dran an den Blondinenwitzen?
- Werden Schülerinnen und Schüler benachteiligt, wenn Klausuren mit kurzen zeitlichen Abstand geschrieben werden?
- Hängt das Ansehen einer Schülerin/eines Schülers vom Geldbeutel der Eltern ab?
- Beeinflussen langjährige Freundschaften zwischen Jungen und Mädchen die schulischen Leistungen?

Die Untersuchung dieser Fragestellungen verlangt einen unterschiedlichen Aufwand bei der Erhebung der statistischen Daten. Während bei der ersten und dritten Fragestellung relativ leicht Daten zu erhalten waren (Klausurergebnisse, Zeugnisnoten), musste das Ansehen eines Schülers erst messbar gemacht werden. Deshalb wurde in Absprache mit dem Fachlehrer Sozialkunde eine kurze Einführung in die Arbeit mit Fragebögen gegeben.

Erläuterungen zu den einzelnen Fragestellungen

Besteht ein Zusammenhang zwischen den schulischen Leistungen und dem Erfolg bei Eignungstests?

Die Schülerinnen und Schüler, die sich für diese Fragestellung entschieden hatten, verglichen Eignungstests unterschiedlicher Firmen (Banken, Versicherungen, Großunternehmen), arbeiteten das Typische dieser Tests heraus und stellten danach einen solchen Test zusammen. Sie gewannen 53 Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II ihrer Schule, die an diesem Test anonym teilnahmen und zugleich auch ihre Noten (Punkte) des letzten Zeugnisses vermerkten. Daraus wurde mit der Korrelationsanalyse der Korrelationskoeffizient r = 0 ermittelt.



Das heißt, die schulischen Leistungen und der Erfolg bei diesen Tests hatten nichts miteinander zu tun. Diese Erkenntnis hat die Schülerinnen und Schüler sehr nachdenklich gemacht. Darauf hin wurden folgende Fragen bis in die Pause diskutiert:

- Machen die Unternehmen nicht entscheidende Fehler 2. Art (sie lehnen geeignete Bewerber ab)?
- Messen eigentlich Schulnoten korrekt? Und wenn ja, was messen sie?
- Lernen wir in der Schule das Richtige, wenn die Unternehmen etwas anderes verlangen?

Anmerkung:
Die Anwendung der Korrelationsanalyse setzt voraus, dass beide Variablen normalverteilt sind. Das ist aber für die Bewertung von schulischen Leistungen (auch in Punkten) nur bedingt der Fall.

Was ist dran an den Blondinenwitzen?

Die Schülerinnen und Schüler dieser Gruppe wollten die in den Blondinenwitzen zum Ausdruck kommende Meinung „Blondinen sind dümmer“ widerlegen. Dazu stellten sie die Hypothese H_0 auf: „Blonde Mädchen haben einen geringeren Intelligenzquotient als der Durchschnitt ihrer Altersgruppe“. Zur Überprüfung dieser Hypothese gewannen sie 86 Schülerinnen und Schüler aus den 10. und 11. Klassen ihrer Schule zur Teilnahme an einem der üblichen Intelligenztests (vgl. zum Beispiel Esenck, Hans: Das Intelligenztestbuch. Orbis Verlag München, 1991). Gleichzeitig mussten alle Teilnehmerinnen ihre natürliche Haarfarbe angeben, so dass sich insgesamt 17 blonde Mädchen diesem Test stellten.
Der Test bestand aus 40 Aufgaben, die innerhalb von 30 Minuten zu beantworten waren. Die Anzahl der richtigen Antworten konnte dann in den Intelligenzquotient (IQ) umgerechnet werden.

IQ	106	108	110	111	113	114	115	116	117	118
alle Teilnehmer	1	1	1	2	2	2	1	2	2	3
davon blonde Mädchen		1					1		1	1
IQ	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
alle Teilnehmer	4	4	6	8	9	9	7	6	3	2
davon blonde Mädchen	1		3	2	2	1		2		1
IQ	129	130	132	133	134	135	136			
alle Teilnehmer	3	2	1	1	2	1	1			
davon blonde Mädchen				1						

Die Gesamtstichprobe ergab auf Grund dieser Messwerte die Parameter $\bar{x}_g = 121$ und $s = 6{,}04$. Wenn man diese Parameter als Schätzwert für die Grundgesamtheit (alle 15- und 16-jährigen Gymnasialschülerinnen und -schüler, die in ländlicher Umgebung aufwachsen) annimmt, so folgt daraus für den Standardfehler s_{xg} der Stichprobe

$$s_{xg} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{6{,}04}{\sqrt{86}} = 0{,}65.$$

Das bedeutet, dass in 95% aller Fälle der Erwartungswert für den Intelligenzquotienten dieser Grundgesamtheit im Intervall

$$121 - 1{,}96 \cdot 0{,}65 \le \mu \le 121 + 1{,}96 \cdot 0{,}65$$

$$119{,}73 \le \mu \le 122{,}33$$

liegt.

Zum Nachweis der Hypothese muss der kleinere Wert Berücksichtigung finden. Da die Stichprobe „blonde Mädchen" einen Umfang von 17 hatte, konnte die Standardabweichung σ_m für den Mittelwert x_m berechnet werden:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n_m}} \text{ mit } \sigma = s = 6{,}04 \text{ und } n_m = 17,$$

$$\sigma_m = 1{,}46.$$

Damit ergab sich mit 95% Sicherheit ein Vertrauensintervall für den Mittelwert $\bar{x}_m$ dieser Stichprobe

$$119{,}73 - 1{,}96 \cdot 1{,}46 \le x_m \le 119{,}73 + 1{,}96 \cdot 1{,}46$$

$$116{,}86 \le x_m \le 122{,}59.$$

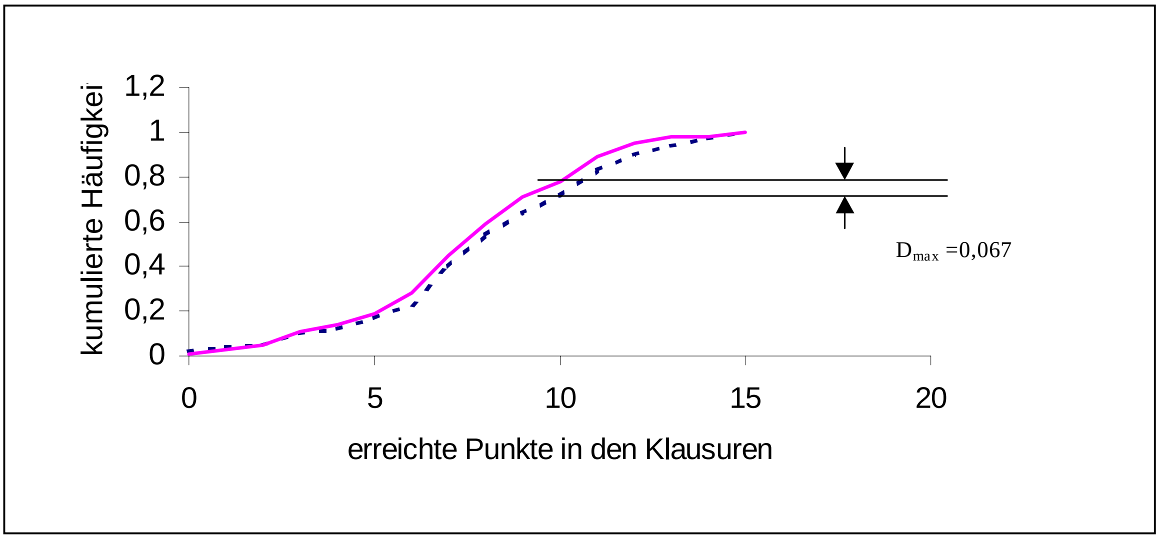
Die Hypothese H_0 wäre also nur dann mit einer gewissen Sicherheit (95%) bestätigt, wenn der Mittelwert der Stichprobe „blonde Mädchen" x_m kleiner als 117 gewesen wäre. Da der Mittelwert dieser Stichprobe aber zu 121,59 ermittelt wurde, muss die Hypothese H_0 zumindest für die untersuchte Grundgesamtheit abgelehnt werden.

Zum großen Erstaunen war der Mittelwert der Stichprobe „blonde Mädchen" größer als der Mittelwert aller beteiligten Schülerinnen und Schüler. Dieser Unterschied ist aber nicht signifikant.

Werden Schülerinnen und Schüler benachteiligt, wenn die Klausuren mit kurzem zeitlichen Abstand geschrieben werden?

Ausgangspunkt dieser Fragestellung ist die Erscheinung, dass Kurshalbjahre nicht gleich lang sind – insbesondere durch die Verschiebung der Sommerferien. Dadurch mussten die Schülerinnen und Schüler dieses Kurses in einem Kurshalbjahr 11 Klausuren in sieben und

in einem anderen Halbjahr in vier Wochen schreiben. Daraus leiteten sie eine Benachteiligung ab, die sich in ihren Klausurergebnissen bemerkbar machen müsste.
Die Schülerinnen und Schüler erfassten alle Klausurergebnisse ihres Jahrgangs in beiden Halbjahren (wobei nur die Schülerinnen und Schüler berücksichtigt wurden, die alle Klausuren mitschrieben) und verglichen diese mit Hilfe des Smirnow-Kolmogorow-Tests.



Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass die Klausuren schlechter ausfallen, wenn sie in kürzeren Abständen geschrieben werden (durchgezogene Linie). Diese Abweichung ist aber nicht signifikant, da die maximale Abweichung D_{max} = 0,067 kleiner ist als der zugehörige Tabellenwert von $D_{0,05;506;506}$ = 0,086.
Die enttäuschten Schülerinnen und Schüler argumentierten an dieser Stelle folgendermaßen:

- Die Nichtablehnung der Nullhypothese (gleiche Punktverteilung in beiden Halbjahren) führt noch nicht zur Annahme derselben.
- Die Benachteiligung der Schülerinnen und Schüler muss sich nicht in Noten ausdrücken, sondern auch z. B. in einer reduzierten Freizeit (das wurde aber nicht untersucht).
- Selbst, wenn sich die Verkürzung der Vorbereitungszeit nicht signifikant auf die gesamte Gruppe auswirkt, dann aber bestimmt auf einzelne Schülerinnen und Schüler (auch das wurde nicht untersucht).

Beeinflussen langjährige Freundschaften zwischen Jungen und Mädchen die schulischen Leistungen?

Das größte Problem der Schülerinnen und Schüler war die Zuordnung ihrer Mitschüler in eine der Gruppen:

- Junge/Mädchen sind langjährig befreundet (Was bedeutet befreundet?, Was ist langjährig?),

- Junge/Mädchen sind erst seit kurzem befreundet (Freunde wechseln),
- Junge/Mädchen hat noch keine Freundin/Freund gehabt.

Dabei war auch Kompromissfähigkeit innerhalb der Arbeitsgruppe gefragt. Als Verbesserung/Verschlechterung der Leistung wurde die Abweichung von einem Punkt im Notendurchschnitt vereinbart.

	Verbesserung	**Konstanz**	**Verschlechterung**	
langjährige Freundschaft	11 (6,8)	12 (12,8)	4 (7,4)	27
kurzfristige Freundschaft	5 (7,3)	11 (13,7)	13 (8,0)	29
keine Freundin/ Keinen Freund	7 (6,8)	20 (12,8)	8 (9,6)	35
	23	43	25	91

$$\chi^2_{0,05;\ f=4} = 9,35 \text{ und } \chi^2 = 12,9$$

Der χ^2-Test zeigt interessante Ergebnisse. Langjährige Freundschaften führen zu einer signifikanten Verbesserung der schulischen Leistungen, während das häufige Wechseln von Freunden zu einer Verschlechterung führt.

Hängt das Ansehen eines Schülers/einer Schülerin vom Geldbeutel seiner Eltern ab?

Am interessantesten und schwierigsten (gemessen an den anderen Gruppen) war die Messung des Ansehens eines Schülers bzw. einer Schülerin. Da dieses ebenso wie der Umfang des Geldbeutels anonym ermittelt werden sollte, musste jeder Proband der Stichprobe sein Ansehen mit einem Fragebogen selbst ermitteln (Selbstfremdbild „Was denkst Du, was Deine Mitschüler über Dich denken?“). Deshalb mussten Kriterien erarbeitet werden, mit denen das Ansehen gemessen werden konnte. Die Schülerinnen und Schüler führten dazu eine „Expertenbefragung“ in ihrem Kurs durch, indem sie Kriterien hinsichtlich ihrer Bedeutsamkeit für das Ansehen eines Schülers/einer Schülerin wichten ließen (5 sehr bedeutsam; 1 unbedeutend). Anschließend wurde der Mittelwert und die Streuung s ermittelt. Alle Kriterien mit s ≥ 1 wurden herausgenommen, da sich offensichtlich die „Experten“ nicht einig waren. Hier ein Auszug aus dieser Befragung:

Eigenschaft	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\bar{x}$	**s**
Genießt Vertrauen	-	-	3	2	14	4,58	0,75
Zuverlässigkeit	-	-	3	8	8	4,26	0,71
Ehrlichkeit	-	3	1	7	8	4,05	1,05
Kontaktfreudig	1	2	4	9	3	3,58	1,04
Modisch gekleidet	3	3	6	6	1	2,74	1,29
Sportlich	3	8	6	2	-	2,37	0,87
Gute schulische Leistungen	6	5	6	2	-	2,21	1,00

Anschließend wurden entsprechend der verbliebenen Kriterien ein neuer Fragebogen entwickelt, der zur Selbsteinschätzung diente.
Durch Klassenbildung sowohl beim „Einkommen“ als auch beim „Ansehen“ konnte der χ^2-Test angewendet werden:

	hohes Einkommen	**mittleres Einkommen**	**niedriges Einkommen**	
hohes Ansehen	9 (4,30)	5 (6,07)	7 (10,63)	21
mittleres Ansehen	6 (7,17)	13 (10,12)	16 (17,70)	35
niedriges Ansehen	2 (5,53)	6 (7,81)	19 (13,67)	27
	17	24	42	83

$$\chi^2_{0,05;\, f=4} = 9,49 \text{ und } \chi^2 = 12,63$$

Der signifikante Unterschied zwischen den Erwartungswerten und den Befragungsergebnissen wird vor allem durch die grau unterlegten Daten hervorgerufen. Offensichtlich hängt das Ansehen eines Schülers/einer Schülerin doch vom Geldbeutel der Eltern ab.

Zur Bewertung

Im letzen Halbjahr der Kursstufe erhielten die Schülerinnen und Schüler vier Noten:

- eine Klausur über 300 Minuten (50%),
- zwei Kontrollen über je 90 Minuten (je 12,5%),
- eine Note für die Projektarbeit (25%).
-

Diese Projektnote setzte sich aus mehreren Teilnoten zusammen:

Schriftliche Arbeit	- mathematische Korrektheit
	- Folgerichtigkeit, Begründung des Vorgehens
	- Darstellung (äußere Form)
	- Gliederung
	- Beherrschung der deutschen Sprache
Präsentation	- Art und Weise des Vortrages
	- Begründungen / Verständlichkeit
	- Reaktion auf Fragen
	- Gebrauch der Fachsprache
	- Qualität der Kurzfassung
	- Qualität des Posters
Erarbeitungsphase	- Planung des Vorgehens
	- Arbeitsteilung
	- Organisation der einzelnen Arbeitsschritte
	- Berücksichtigung der notwendigen Hilfen

Auswertung des Projektes

Im Ergebnis dieser Unterrichtssequenz lässt sich feststellen, dass durch die ungewöhnlich aktive Beteiligung fast aller Schülerinnen und Schüler in Folge der hohen Identifikation mit den Problemstellungen folgendes erreicht wurde:

Sachkompetenz

Die in den Rahmenrichtlinien geforderten Begriffe (wie Hypothese, Gegenhypothese, Entscheidungsregel, Fehler 1. und 2. Art) wurden vom Wesen verstanden und konnten sicher angewendet werden.

Methodenkompetenz

Die spezifischen Fachmethoden wurden dem mathematischen Anliegen entsprechend korrekt angewendet. Durch die Diskussion über die Bedingungen und die Aussagefähigkeit des jeweiligen mathematischen Modells, also des bewussten Reflektierens über die verwendeten Methoden, haben sich bei den Schülerinnen und Schülern (entsprechen der Zielstellung der Rahmenrichtlinien) Vorstellungen vom Anliegen der beurteilenden Statistik herausgebildet. Darüber hinaus haben die Schülerinnen und Schüler ihre Methodenkompetenz hinsichtlich der Präsentation ihrer Arbeitsergebnisse entwickelt und es bildete sich eine Kultur des wissenschaftlichen Meinungsstreites heraus. Mit der Bearbeitung der Aufgabenstellungen war auch ein nicht unbeträchtlicher Fortschritt in der Organisation der eigenen Arbeit verbunden.

Sozialkompetenz

Durch die relativ knapp bemessene Bearbeitungszeit war eine gut abgestimmte Arbeit innerhalb der einzelnen Gruppen notwendig, wobei es galt die Vorzüge der einzelnen Schülerin und des einzelnen Schülers (der Organisator, die Mathematikerin, der Rhetoriker, die Gestalterin u. a.) zu erkennen und zu nutzen. Aber auch die Diskussion des Vorgehens und der Ergebnisse der Untersuchungen regte zum Nachdenken über eigene Haltungen an.

7 Literatur

/1/ Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt: Rahmenrichtlinien Gymnasium/Fachgymnasium Mathematik. Magdeburg 1999

/2/ Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt (LISA): Neue Rahmenrichtlinien – moderner Unterricht?! Reihe DIALOG, Heft 1. Halle 1999, S.73 ff.

/3/ Baumert, Jürgen u.a.: PISA-Rahmenkonzepte Schulleiterinformation. OECD PISA Deutschland. Berlin 1999

/4/ Feuerpfeil, Jürgen; Heigl, Franz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik N. Leistungskurs. Bayerischer Schulbuch-Verlag. München 1997

/5/ Weber, Karl-Heinz; Zillmer, Wolfgang: Mathematik Schuljahrgang 11 Sachsen-Anhalt. paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH. Berlin 1999

/6/ Weber, Karl-Heinz; Zillmer, Wolfgang: Mathematik Analysis Analytische Geometrie Stochastik Sekundarstufe II Sachsen-Anhalt. paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH. Berlin 1996

/7/ Barth, F.; Haller, R.: Stochastik Leistungskurs. Ehrenwirth Verlag. München 1992

/8/ Weber, Karl-Heinz (Herausgeber): Stochastik Formeln und Tabellen. paetec Gesellschaft für Bildung und Technik mbH. Berlin 1997

Weiterführende Literatur

/9/ Kütting, Herbert: Didaktik der Stochastik. Wissenschaftsverlag. Mannheim Leipzig Wien Zürich 1994

/10/ Clauß, Günter; Finze, Falk-Rüdiger; Partzsch, Lothar: Statistik für Soziologen, Pädagogen, Psychologen und Mediziner: Grundlagen. Verlag Harri Deutsch. Frankfurt am Main 1999

/11/ Clauß, Günter; Ebner, Heinz: Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. Volk und Wissen Volkseigener Verlag. Berlin 1978

/12/ Engel, Arthur: Stochastik. Ernst Klett Verlag. Stuttgart 1987

/13/ Beyer, Otfried; Hackel, Horst; Pieper, Volkmar; Tiedge, Jürgen: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Stuttgart Leipzig 1995

/14/ Randow, Gero von: Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH. Reinbek bei Hamburg 1992

/15/ Beck-Bornholdt, Hans-Peter; Dubben, Hans-Hermann: Der Hund, der Eier legt. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH. Reinbek bei Hamburg 1997

/16/ Phillips, John L. Jr.: Statistisch gesehen: Grundlegende Ideen der Statistik. Birkhäuser Verlag. Basel Boston Berlin 1997

/17/ Herget, Wilfried (Herausgeber): Stochastisches Denken. Themenheft der Zeitschrift Mathematik lehren, Heft 85, Friedrich Verlag GmbH & Co. KG. Seelze 1997