Joachim Jäger / Hans Schupp

Curriculum

Stochastik in der Hauptschule

Ferdinand Schöningh

Joachim Jäger / Hans Schupp

Curriculum

Stochastik in der Hauptschule

37466

Ferdinand Schöningh Paderborn

ISBN 3-506-37466-4 1.2.3.4.5. Druck 83 84 85 86 87

nhaltsverzeichnis

VORWORT

Ein sorgfältig geplantes, erprobtes und evaluiertes Curriculum kommt nur dann zustande, wenn ein leistungsfähiges und engagiertes Team mit präziser Aufgabenteilung und bei ständiger Kommunikation in allen Phasen der Curriculumentwicklung über Jahre hinweg zusammenarbeitet. Daß dies innerhalb des Forschungsprojekts "Stochastik in der Hauptschule" der Fall war, ist ein Faktum, das alle Beteiligten bereichert hat und für so manche Mühe entschädigte.

Als besonders wichtig erscheint im nachhinein das Wirken der Lehrer im Planungsgremium des Projekts. Die u.a. Autoren (beide Hochschullehrer und zusammen als Federführer des Projekts tätig) haben den anderen Mitgliedern dieses Gremiums, nämlich den Lehrern Uwe Kremb, Dipl.Päd. Heinz-Jürgen Maier und Rektor Oswald Schöpp herzlich zu danken für ihre zugleich kritische und konstruktive Mitarbeit, vor allem für ihr ständiges Bemühen, die zuweilen hochfliegenden Vorstellungen der "Theoretiker" in den gegebenen Rahmen zurückzuführen, andrerseits aber auch für ihre Bereitschaft, sich gerade in diesem Rahmen innovativen Zielsetzungen nicht zu verschließen.

Nicht minder bedeutsam war die Tätigkeit der erprobenden Lehrer. Sie haben jahrelang eine erhebliche Mehrbelastung tragen müssen; trotzdem ließ ihr Eifer niemals nach. Das Curriculum in seiner jetzigen Fassung ist maßgeblich durch ihre Erfahrungen geprägt worden (so daß sie sich in der Tat alle als Autoren betrachten können). Unser Dank gilt den Kolleginnen und Kollegen Fritz Jacob, Friedrich Koch, Marlene Kopping-Schild, Richard Krieger, Heinz-Jürgen Maier (ein weiteres Mal), Paul Mohrbacher, Sigrid Müllenbach, Monika Nikolaus, Ernst Pallier, Magdalena Rech, Werner Rühr, Volker Ruppert, Horst Schmitt und Hans Steuer.

Bei der Auswertung der Tests und Fragebögen war uns Fritz Dreyer eine große Hilfe.

Schließlich danken wir dem Saarländischen Minister für Kultus, Bildung und Sport für die -nach einigem (verständlichen) Zögern - erteilte Genehmigung des erforderlichen Unterrichts außerhalb des (damals) geltenden Lehrplans, sowie dem Staatlichen Institut für Lehrerfortbildung, welches einen Teil der Curriculumentwicklung in seine Veranstaltungen aufnahm.

Saarbrücken, im Mai 1982

J. Jäger

H. Schupp

1. EINFÜHRUNG

1.1 Forschungsprojekt CUPS

Das hier veröffentlichte Curriculum "Stochastik in der Hauptschule" war Gegenstand eines Forschungsprojektes, das von saarländischen Mathematikdidaktikern und Lehrern in den Jahren 1975 bis 1981 durchgeführt worden ist.

Das Forschungsteam bestand aus einem engeren Mitarbeiterstab (zwei Didaktikern, einem Vertreter der Schulaufsichtsbehörde, zwei amtierenden Hauptschullehrern) sowie einem weiteren Kreis von etwa 15 erprobenden Hauptschullehrern. Hinzu kamen zeitweilig angestellte Lehramtskandidaten bzw. -absolventen.
Das Projekt CUPS (Curriculumprojekt "Stochastik in der Hauptschule") war in den Forschungsplan der Pädagogischen Hochschule des Saarlandes aufgenommen worden und wurde aus deren Forschungsmitteln in den Jahren 1976, 1977 und 1978 finanziert. Nach Auflösung dieser Hochschule und Integration ihrer Mitglieder in andere Hochschulen des Saarlandes setzte die dortige Universität die Finanzierung des Projekts im Jahre 1979 fort. Ab 1980 schließlich wurden die entstehenden Kosten aus der Grundausstattung der beiden Verfasser sowie aus deren privaten Mitteln beglichen.

1.2 Ziele des Projekts

CUPS hatte ein inhaltlich bestimmtes und ein forschungsmethodologisches Ziel, wobei sich diese beiden Zielsetzungen im Verlaufe der Projektentwicklung auf mannigfache Weise verschränkten.

Inhaltliches Ziel

Es sollte ein Curriculum entwickelt werden, das mit einem tragfähigen Minimum an Begriffen und Methoden den Hauptschüler befähigt, sich in einfachen stochastischen, d.h. von Zufalls- und Massenerscheinungen geprägten Situationen – mit denen er konfrontiert ist bzw. sein wird – , sachgerecht zu verhalten und zweckmässig zu entscheiden.

Dies hat folgenden Hintergrund. Traditionelle Hauptschulcurricula enthalten lediglich die Anfänge der Beschreibenden Statistik und stoßen daher nicht zu beurteilenden Argumentationen bzw. zu begründeten Entscheidungen durch. Neuere Curricula (z.B. in Lehrplänen und Lehrbüchern) orientieren sich – direkt oder (für die Hauptschule leider typisch) auf dem Umweg der Anlehnung an Stochastik-Curricula für andere Schulformen bzw. Schulstufen – allzusehr am systematischen Aufbau der mathematischen Disziplin "Stochastik" und sind daher weder genügend anwendungsbezogen noch hinreichend schülernah.

Es kommt aber darauf an, die Diskrepanz zwischen dem fortgesetzten Gebrauch stochastischer Methoden in vielen Wissenschafts- und Lebensbereichen und der stochastischen Unmündigkeit vieler Bürger deutlich zu verringern. Damit würde auch ein wichtiger Beitrag geleistet zur zwar stets postulierten, aber kaum je eingelösten Wirklichkeitsnähe des Mathematikunterrichts in der Hauptschule.

Methodologisches Ziel

Es sollten Strategien entwickelt werden für die Planung, Erprobung und Evaluation eines für die Hauptschule neuen, eben deshalb unterrichtsorientierten, also praxisnahen, praktikablen und offenen Curriculums.

Die besondere Struktur der Schüler- und Lehrerschaft dieser Schulform war bewußt als Planungskomponente aufzunehmen. Dies machte die Mitwirkung von Hauptschullehrern in allen Phasen und auf allen Ebenen des Projekts unentbehrich.

Bisher ist für den Mathematikunterricht der Hauptschule keine Konzeption einer Curriculumentwicklung erstellt und erprobt worden, die den angegebenen Anforderungen genügt.

1.3 Planung und Durchführung des Projekts

Soweit sich unsere Aktivitäten auf Ziele und Inhalte des Curriculums selbst beziehen, sind sie in Kapitel 2 dargestellt (einschließlich wichtiger Erfahrungen und Korrekturen) und werden selbstverständlich auch in der anschließenden Vorstellung des Curriculums (Kapitel 3,4,5) sichtbar.

Wir beschränken uns deshalb hier auf den Aspekt der Curriculumentwicklung. Aus Raumgründen kann allerdings nur eine Skizze der diesbezüglichen Überlegungen und Maßnahmen gegeben werden. Für eine ausführliche Information sei auf (11) verwiesen.

a) Angesichts der negativen Erfahrungen mit "teacher-proof"-Curricula, die bis hin zu detaillierten Verlaufsbeschreibungen des Unterrichts gehen - und damit weder der Individualität des Lehrers noch der Situation der Klasse oder gar der Spontaneität des Unterrichtsgeschehens gerecht werden können - , sollte ein offenes Curriculum erarbeitet werden; ein Curriculum also, das nur eine Grobsequenz der Inhalte vorgibt, während die Feinplanung und vor allem die unmittelbare Unterrichtsvorbereitung dem Lehrer obliegt. Für diese (seine Profession mittragende) Arbeit sollte er allerdings in den Curriculum-Materialien ein Maximum an Hilfe finden.

b) Demgemäß wurden folgende Materialien erstellt:

- eine ausführliche Begründung der Aufnahme eines Curriculums "Stochastik" in den Mathematikunterricht der Hauptschule sowie eine Offenlegung seiner Ziele und seiner Struktur - für Lehrer sowie für interessierte Eltern und Schüler (s.Kapitel 2),
- eine Beschreibung der Grobsequenzierungen für die Klassen 7 und 8 (s.Kapitel 3,4) sowie möglicher Unterrichtsprojekte für die Klasse 9 (s.Kapitel 5),
- eine Darstellung des fachwissenschaftlichen Hintergrundes der Jahrescurricula 7 und 8. Sie konnte - wiederum der Platzersparnis wegen - nicht in diese Veröffentlichung aufgenommen werden; das ist insofern bedauerlich, als diese fachliche Information auf die Leitlinien des Curriculums zugeschnitten ist und zudem berücksichtigt, daß nicht jeder Kollege, der Mathematikunterricht in der Hauptschule erteilt, ein Fachstudium absolviert hat oder dabei gar mit Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik befaßt worden ist.

c) Mit der Entwicklung des Curriculums mußte eine Qualifizierung der an seiner Erprobung teilnehmenden Lehrer einhergehen: Sie wurden in die Stochastik eingeführt und mit den zugehörigen didaktisch-methodischen Grundvorstellungen konfrontiert. Bei CUPS geschah dies im Rahmen einer Veranstaltungsreihe des Staatlichen Instituts für Lehrerfortbildung (STIL) im Saarland; hier stellten die Mitglieder des Planungsgremiums den erprobenden Lehrern die entwickelten Curriculum-Materialien vor, und hier fanden auch die Rückmeldungen über die erprobten Sequenzen statt.

Ziel mußte allerdings sein, ein Curriculum zu entwickeln, dessen Realisierung nicht von einer derart intensiven und normalerweise nicht vorhandenen Kooperation zwischen Konstrukteuren und Benutzern abhängt.

d) Je offener ein Curriculum angelegt ist, desto schwieriger wird seine Evaluation. Diese Problematik sollte in CUPS gemindert werden durch einen fortgesetzten Informationsaustausch aller Beteiligten und durch eine damit verbundene ständige Überarbeitung aller Materialien. Eine solche *formative* Evaluation kann nicht nach den Prinzipien klassischer empirischer Forschung, sondern muß nach dem Paradigma der Handlungsforschung gestaltet werden.

Im einzelnen wurden folgende, sich gegenseitig stützende Evaluationsmaßnahmen durchgeführt:

vor der Erprobung

- Überprüfung des vorläufigen Konzepts auf Verträglichkeit mit dem Stand der fachdidaktischen Diskussion und der Curriculum-Forschung, mit den allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts, mit dem Bildungsauftrag der Hauptschule sowie mit dem Leistungs- und Motivationsprofil des Hauptschülers,
- Pilot-Erprobungen (von Teilen) der Grobsequenzen durch die unterrichtenden Mitarbeiter des Planungsstabes (s. (5)),
- Korrekturen auf Grund der Diskussion mit den erprobenden Lehrern während der Instruktionsphase,

während der Erprobung

- regelmäßige Unterrichtsbesuche von Mitgliedern des Planungsteams bei den erprobenden Lehrern,
- Beratung, gelegentlich auch Übernahme von Unterricht anläßlich solcher Besuche,
- regelmäßige ganz- oder halbtägige Begleitveranstaltungen (wiederum im Rahmen der Lehrerfortbildung), in denen Erfahrungen, insbesondere unvorhergesehene Schwierigkeiten vorgetragen und diskutiert wurden,

nach der Erprobung

- Erhebung von Schülereinstellungen anhand eines Fragebogens und von Schülerleistungen durch informelle Endtests (s.Unterkapitel 3.6 und 4.5),
- Erhebung der Einschätzung des Curriculums und der Curriculum-Materialien durch die erprobenden Lehrer anhand eines Fragebogens,
- Interviews mit den erprobenden Lehrern anhand deren Unterrichtstagebücher, konzentriert auf die Schwachstellen des Curriculums und auf diesbezügliche Verbesserungsvorschläge,

während der gesamten Curriculum-Entwicklung

- Vorstellen und Diskutieren des Projekts bzw. von Projektteilen auf wissenschaftlichen Tagungen (s. (1),(3),(6),(8),(9),(12)) sowie anläßlich von Vorträgen in Mathematikdidaktik-Seminaren an zahlreichen bundesrepublikanischen Hochschulen,
- Durchführen eines flankierenden Forschungsprojekts "Stochastik in der Arbeitswelt" mit einer Analyse der stochastischen Phänomene und Probleme in für Hauptschulabsolventen relevanten Berufen (s. (3),(4)). Dieses Projekt wurde in dankenswerter Weise von der Arbeitskammer des Saarlandes finanziert.

e) Auf Grund der damit gesammelten Informationen wurden überarbeitet

- das Curriculum selbst
- die Curriculum-Materialien
- die Evaluationsinstrumente.

f) Revidierte Curriculumteile wurden in eine zweite Erprobung, einige nach erneuter Revision in eine dritte Erprobung gegeben. Daran nahmen in der Mehrzahl wiederum die gleichen Lehrer, zum kleineren Teil aber auch "Neulinge" (und nun ohne intensive fachwissenschaftliche und didaktisch-methodische Begleitung) teil, so daß wir einen ersten Hinweis darüber erhielten, inwieweit das Curriculum bereits zur Dissemination (flächenhaften Realisierung) geeignet ist. -

Die Planung, Erprobung und Evaluation der Teilcurricula für die Klassen 7, 8 und 9 (kurz STOCHASTIK 7, STOCHASTIK 8 und STOCHASTIK 9 genannt) erfolgte mit einer jeweiligen Phasenverschiebung um ein Jahr. Dies führte zu einer Ablaufgestaltung, die es ermöglichte, Erfahrungen bei der Erprobung früherer Curriculumteile bereits in die Planung späterer Sequenzen einfließen zu lassen.

Bei der folgenden Zusammenstellung ist zu beachten, daß STOCHASTIK 9 aus mehreren Unterrichtsprojekten besteht, unter denen eines ausgewählt und durchgeführt werden sollte.

Jahr	Gesamtcurriculum	STOCHASTIK 7	STOCHASTIK 8	STOCHASTIK 9
1975	Ziele und Methoden	Pilot-Studien		
1976	Inhalte (Rahmen)	Planung		
1977		1.Erprobung	Planung	
1978	Revision	Revision und 2.Erprobung	1.Erprobung	Planungen
1979	Revision	Revision	Revision	Planungen
1980	Revision	3.Erprobung	2.Erprobung	Planungen und Pilot-Studien
1981	Gesamtrevision	nachträgliche Erprobungen		Planungen und Pilot-Studien
1982	Projektabschluß und Manuskripterstellung			

1.4 Resultate und Desiderate

a) Die benutzten Strategien der Curriculumentwicklung und ihr Zusammenspiel im Rahmen der Handlungsforschung haben sich durchweg bewährt. In ihrer Gesamtheit vermögen die Evaluationsmaßnahmen ein recht umfassendes und präzises Bild der Tauglichkeit des Curriculums (gemäß den selbstgesteckten Zielen) zu geben.

Insbesondere gelang es, die erprobenden Lehrer in den Prozeß der Curriculumentwicklung verantwortlich einzubeziehen. Es war erfreulich, daß sie die zumeist auf mangelnde fachliche und didaktisch-methodische Vorkenntnisse im stochastischen Bereich zurückgehenden Verständnis- und Lehrschwierigkeiten freimütig offenlegten und so die Voraussetzungen schufen für entsprechende Korrekturen im Curriculum und insbesondere auch in den Curriculum-Materialien. Die Ausgestaltung der Sequenzen (mit einer Vielzahl von Beispielen und Aufgaben, Hinweisen auf geeignete Medien, Schulbuchpassagen, kritische Momente) ist weitgehend von ihren Erfahrungen und Vorschlägen her geschehen.

Allerdings wirft gerade diese (fachdidaktische und curriculumtheoretische) Qualifizierung der erprobenden Lehrer das Problem auf, ob auch andere Adressaten mit dem entstandenen Produkt sinnvoll umzugehen vermögen. Die positiven Erfahrungen vorwiegend mit Kollegen der Mitarbeiter an deren Schulen sind leider nicht genügend repräsentativ.

Ausgehend von der Tatsache, daß eine Curriculumentwicklung niemals abgeschlossen ist, hoffen die Verfasser, mit der Veröffentlichung des Curriculums weitere "Erprober" zu gewinnen, und bitten diese ebenso herzlich wie dringend um Übermittlung der gewonnenen Daten und Erfahrungen (Fragebogen können auf Wunsch zugesandt werden).

b) Die fortgesetzten Erprobungen von STOCHASTIK 7 in 33 Klassen mit insgesamt 848 Schülern und von STOCHASTIK 8 in 27 Klassen mit insgesamt 696 Schülern haben ergeben, daß das Fundamentalziel "sachgerechtes Verhalten und zweckmäßiges Entscheiden in einfachen stochastischen Situationen" sowie die zugehörigen Richtziele (s.Kapitel 3,4,5) mit vernünftigem Aufwand erreichbar sind.

Das Engagement der Schüler - auch der sonst weniger interessierten und leistungsfähigen unter ihnen - war das gesamte Curriculum hindurch überdurchschnittlich groß. Gewiß trug dazu bei, daß sie stets auf allen Repräsentationsstufen aktiv werden konnten, relativ wenige Voraussetzungen benötigten und meist mit neuen Inhalten konfrontiert waren. An diesem erfreulichen Sachverhalt können auch gewisse Ermüdungserscheinungen am Ende jedes Jahrescurriculums wenig ändern.

Als schwierig muß angesehen werden (s. (9)):

- der Abbau unstimmiger Primärintuitionen (z.B. Sehen vermeintlicher Abhängigkeiten, zu enger Zufallsbegriff, Oktroieren von Gleichwahrscheinlichkeiten),
- der verständige Umgang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten (Baumdiagramme und Operatorauffassung der Brüche dürfen vielerorts nicht vorausgesetzt, sondern müssen mitentwickelt werden),
- das Mathematisieren von originären Sachsituationen, insbesondere wenn sie nicht der unmittelbaren Umwelt der Schüler angehören.

Diese Schwierigkeiten konnten im Verlaufe der und durch die Evaluation zwar gemindert werden (z.B. durch eine breite und charakteristische Auswahl von Zufallsexperimenten, empirisches Interpretieren und Überprüfen postulierter und errechneter Wahrscheinlichkeiten, Herstellen des Zusammenhangs zwischen Glücksspiel- und Realsituationen u.a. durch geeignete Simulationen), stellen sich jedoch in jedem konkreten Lehrgang (und dort wiederum in fast jeder Phase) aufs Neue. Insbesondere bleibt festzuhalten, daß der in der gegenwärtigen Mathematikdidaktik hochgeschätzten "Motivation durch Anwendung" deutliche Grenzen gesetzt sind (zumindest in der Hauptschule).

Ungeklärt mußte bleiben, wie sich eine stärkere Betonung stochastischer Komponenten in früheren Klassen (Grundschule!), in anderen Fächern und in anderen Mathematik-Kapiteln auswirkt. Zumindest könnte sie aber wohl den – angesichts der Stoff- und Zielfülle in der heutigen Hauptschule recht problematischen – Zeitbedarf des Stochastik-Lehrgangs reduzieren.

c) Im Unterschied zu STOCHASTIK 7 und STOCHASTIK 8 ist STOCHASTIK 9 nur wenige Male erprobt worden, wobei sich diese Erprobung noch auf die einzelnen Unterrichtsprojekte verteilte, aus denen dieses dritte Jahrescurriculum besteht. Dies hatte vor allem drei Gründe:

- Im Saarland endet die Hauptschule in der Regel mit der 9.Klasse. Dort sind die unterrichtenden Lehrer, nicht zuletzt von den Eltern, gehalten, ihre Schüler in optimaler Weise auf die heute existenziellen Aufnahmeprüfungen der Abnehmerinstitutionen vorzubereiten. Dann bleibt aber kaum Zeit für eine mindestens zweiwöchige Projektarbeit, deren kurzfristiger Nutzen gering ist.

  (Das ist anders in Bundesländern mit einer 10. Hauptschulklasse. Deshalb hoffen die Verfasser gerade für dieses Teilcurriculum auf weitere Erfahrungen aus dem Leserkreis.)
- Die Projekte sind z.T. fächerübergreifend. Vermeintlich geringe Sachkenntnisse in den jeweils einbezogenen Bereichen schrecken so manchen Lehrer ab.
- Gleiches gilt in formaler Hinsicht für die propagierte Projektmethode. So sehr diese allenthalben gefordert und favorisiert wird, so wenig wird sie praktiziert.

Zwar haben die in STOCHASTIK 9 enthaltenen Projekte ebenfalls mehrere Fassungen durchlaufen, doch gingen die Korrekturen mehr aus Diskussionen im engeren und weiteren Mitarbeiterstab und mit Fachleuten aus den Bezugsbereichen hervor denn aus Unterrichtserfahrungen.

Dieser Mangel ist insofern bedauerlich, als gerade dort Sachsituationen auftreten, in denen eine charakteristische Vielfalt von Aktivitäten bei der Lösung der immanenten stochastischen Probleme erforderlich und bewußt wird.

1.5 Literatur

Wegen der Fülle der relevanten fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Veröffentlichungen zitieren wir hier nur Arbeiten, die von den Mitarbeitern des Projekts während dessen Entwicklung publiziert wurden. Umfangreiche Literaturhinweise zur Stochastik findet der Leser an folgenden beiden Stellen:

Kinder,H.P.; Schmitz,N.: Bibliographie "Stochastik in der Schule" - In: Didaktik der Mathematik 3 (1975),H.4 und 4 (1976),H.1

Kütting,H.: Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung - Freiburg: Herder 1981

(1) Jäger,J.: Stochastische Probleme aus der Eichgesetzgebung - In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1978 - Hannover: Schroedel 1978

(2) Jäger,J.: Abfüllen von Fertigpackungen - In: Didaktik der Mathematik 7 (1979),H.3

(3) Jäger,J.: Stochastik in der Arbeitswelt. Zwischenbericht über eine empirische Untersuchung. - In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1979 - Hannover: Schroedel 1979

(4) Jäger,J.; Schupp,H.: Mathematikunterricht und Arbeitswelt, Zwischenbericht - Saarbrücken: Schriftenreihe der Arbeitskammer des Saarlandes 1979

(5) Maier,H.J.: Zum Problem des Einstiegs in einem Curriculum "Stochastik in der Hauptschule" - Saarbrücken: 1976 (unveröffentlichte Diplom-Arbeit)

(6) Schupp,H.: Einführung in das stochastische Denken anhand des Galton-Brettes- In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1976 - Hannover: Schroedel 1976

(7) Schupp,H.: Die Arbeitswelt im Mathematikunterricht - In: Der Arbeitnehmer 25 (1977),H.11

(8) Schupp,H.: Zwischenbericht über das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule" - In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1978 - Hannover: Schroedel 1978

(9) Schupp,H.: Lernschwierigkeiten in einem Stochastik-Curriculum - In: Bauersfeld,H.(Hrsg.): Lernschwierigkeiten und Curriculum. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik 1978

(10) Schupp,H.: Stochastik in der Sekundarstufe I - In: Volk,D.(Hrsg.): Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht. München: List 1979

(11) Schupp,H.: Evaluation eines Curriculums - In: Der Mathematikunterricht 25 (1979),H.5

(12) Schupp,H.: Zweiter Zwischenbericht über das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule" - In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1980 - Hannover: Schroedel 1980

(13) Schupp,H.: Zum Verhältnis statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Komponenten in einem Stochastik-Lehrgang für die Sekundarstufe I (noch unveröffentlichtes Manuskript)

Hinweise auf bereichsspezifische Literatur finden sich innerhalb der Unterrichtsprojekte (s. Kapitel 5). Auf geeignete Schulbuchpassagen wird bei der Beschreibung des Curriculums verwiesen.

2. BEGRÜNDUNG UND DIDAKTISCHE KONZEPTION DES CURRICULUMS

2.1 Was ist Stochastik ?

Stochastik hat viele Gesichter. Der Versuch einer kurzen, prägnanten Definition birgt daher immer das Risiko einer Verfälschung in sich. Statt dessen betrachten wir im folgenden Stochastik aus verschiedenen Blickrichtungen.

Historische Sicht

"Stochastik" ist eine relativ neue Bezeichnung für Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Sie setzt sich immer mehr durch, nicht zuletzt weil sie die zunehmende Verschmelzung beider Disziplinen andeutet. Historisch gesehen haben Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zunächst nichts miteinander zu tun.

Der Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird meistens in einem Briefwechsel zwischen Blaise PASCAL (1623 - 1662) und Pierre FERMAT (1601 - 1655) gesehen, in dem Fragen des Glücksspiels erörtert werden. Eine erste fundamentale Begründung leistete Jakob BERNOULLI (1654 - 1705) in seinem Buch "Ars conjectandi", das auch schon auf Anwendungen im sozialen, politischen und wirtschaftlichen Bereich hin konzipiert ist. Der heute als klassisch bezeichnete Wahrscheinlichkeitsbegriff stammt von Pierre Simon de LAPLACE (1749 - 1827).

Die Statistik hat eine andere Wurzel. Im 18. Jahrhundert bezeichnete man damit eine systematische Staatenbeschreibung, die auf quantitativen Angaben zur Geographie, Geschichte und Volkswirtschaft beruhte. Als sich diese Staatenbeschreibung im 19. Jahrhundert immer mehr in Einzelgebiete zergliederte, ging der Name auf die Politische Arithmetik über, deren Aufgabe es war, mathematische Gesetzmäßigkeiten im gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Leben aufzudecken. Sie bediente sich bereits wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden.

In der heutigen Zeit werden wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Methoden in einem Großteil der Wissenschaften verwendet (insbesondere in der Wirtschafts- und Sozialwissenschaft, Erziehungswissenschaft, Physik, Biologie, Medizin). Die Fragen, die aus den Anwendungszusammenhängen an Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik herangetragen werden, haben wesentlich zur Weiterentwicklung und insbesondere zur Verschmelzung der beiden stochastischen Teildisziplinen beigetragen.

Stochastik als Lehre von den Gesetzmäßigkeiten bei Zufalls- und Massenerscheinungen

Bei dieser Betrachtungsweise liegt der Schwerpunkt auf der mathematischen Analyse von Situationen, an denen Zufallsprozesse beteiligt sind oder die sich auf Massenerscheinungen beziehen. In beiden Fällen beschreiben die bekannten Rahmenbedingungen die Situation nicht vollständig, so daß allein von ihrer Kenntnis her keine sichereAussage z.B. über zukünftige Entwicklungen gemacht werden kann.

Ob dies ein grundsätzliches Problem ist oder Folge der hohen Komplexität einer solchen Situation, spielt zunächst keine Rolle. Wichtig ist, daß die Stochastik als mathematische Theorie im gewissen Sinne eine Synthese zwischen dialektischen Widersprüchen darstellt: der Zufälligkeit als Wesensbestandteil eines Einzelphänomens und der Gesetzmäßigkeit bei massenhaftem Auftreten eines solchen Phänomens.

Ein Beispiel: Wie alt werden Männer in der Bundesrepublik Deutschland ? Im Einzelfall, d.h. bezogen auf eine bestimmte, jetzt lebende Person läßt sich diese Frage kaum beantworten. Dennoch kann man recht präzise sagen, welcher Anteil der männlichen Bevölkerung etwa das 60. Lebensjahr erreicht und wie groß die Aussicht eines 60-jährigen ist, den 70. Geburtstag noch zu erleben. Derartige Regelmäßigkeiten sind stochastischer Art; ihre Kenntnis bildet z.B. eine Grundlage für die Berechnungen der Lebensversicherungsgesellschaften.

Stochastik als Entscheidungshilfe

Wie bereits erwähnt, kommt heute kaum eine Wissenschaft ohne stochastische Methoden aus. Das ist umso bedeutsamer, als unser tägliches Leben auf vielfache Weise von Ergebnissen der Wissenschaften geprägt ist. Ob nun eine pharmazeutische Forschungsabteilung Wirkung und Verträglichkeit eines neuen Medikamentes testet, ob ein Ingenieur die voraussichtliche Lebensdauer eines technischen Gerätes bestimmt, Volkswirte die zu erwartenden Aufwendungen für die Finanzierung der Arbeitslosigkeit ermitteln, Pädagogen die Effekte einer neuen Methode zum Lesenlernen untersuchen: in all diesen Fällen geht es um Aussagen über zukünftige Massenerscheinungen, deren Richtigkeit mit stochastischen Methoden auf einem gewissen Verläßlichkeitsniveau getestet werden kann.

Daneben werden mit stochastischen Methoden Fragen beantwortet, die sich auf zukünftige Entwicklungen beziehen: Wer wird die nächste Wahl gewinnen ? Wie wird sich die Weltbevölkerung weiterentwickeln ? Wann werden die Rohstoffreserven an Buntmetallen erschöpft sein ? Welchen Energiebedarf werden wir in 10 Jahren haben ? Trendberechnungen erlauben hier mit einer gewissen Sicherheit Aussagen über die Zukunft, die für heutige Planungen mitentscheidend sind.

Stochastik als Datenanalyse

In einer eine unüberschaubare Fülle von Daten produzierenden Welt fällt es dem Einzelnen schwer, den Überblick zu behalten, Zusammenhänge zu erkennen, Wichtiges von Nebensächlichem zu unterscheiden. Zur Analyse komplexer Situationen können indessen stochastische Methoden herangezogen werden, mit deren Hilfe solche Situationen zunächst beschreibend modelliert und dann analysiert werden. Dazu dienen bestimmte Techniken der graphischen Darstellung, Gliederung, Zusammenfassung von Daten und der Berechnung charakteristischer Werte wie z.B. Mittel- und Streuwerte.

Ein Beispiel: Das Problem Arbeitslosigkeit läßt sich leichter analysieren, wenn man die vorliegenden Daten etwa nach Gesichtspunkten wie Geschlecht, Altersgruppe, Sozialgruppe, Region, Jahreszeit usw. gruppiert (s. Unterkapitel 5.4). Hier können Besonderheiten sichtbar werden, die in der Fülle der Daten zunächst untergehen.

Stochastik als rationale Methode des induktiven Schließens

Wir urteilen oft auf Grund von Erfahrungen, die in einem induktiven Erkenntnisprozeß gewonnen worden sind. Wir beobachten mehr oder minder bewußt, daß bei Vorgängen, die unter ähnlichen Rahmenbedingungen ablaufen, bestimmte Ergebnisse sich besonders häufig einstellen. Dies führt uns zu Generalisierungen und zur Behauptung allgemeingültiger Zusammenhänge

Von dieser Art ist z.B. die Feststellung des Senators Edward KENNEDY: "Nach meinen Erfahrungen ist ein Fünftel der Leute gegen alles und jedes." Wie verläßlich ist ein solches Urteil ? Genügt es, eine solche Beobachtung in 200 von 1 000 Fällen zu machen, um sie auf über 200 Millionen Fälle verallgemeinern zu können ?

Unsere intuitiven Schlüsse auf der Grundlage solcher Erfahrungen sind im allgemeinen unvollkommen und unzuverlässig, auch wenn sie für uns selbst überzeugend erscheinen. Stochastik kann nun als Theorie betrachtet werden, die das Prinzip des Erkennens über Erfahrungen auf solide Füße stellt, gleichzeitig aber auch die Grenzen eines solchen Wissens deutlich ausweist. Stochastik erlaubt die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe relativer Häufigkeiten (von Primärwahrscheinlichkeiten also) – dies mit einer gewissen Sicherheit – und die Berechnung weiterer Wahrscheinlichkeiten (sekundärer Wahrscheinlichkeiten) aus primären Wahrscheinlichkeiten.

2.2 Entwicklung des Stochastikunterrichts

Ein Rückblick auf die letzten 100 Jahre Mathematikunterricht zeigt, daß Stochastik als Unterrichtsgegenstand keineswegs neu ist. Er zeigt aber auch, daß die Stochastik bislang eine Sonderstellung eingenommen hat.

Bereits im 19. Jahrhundert haben namhafte Pädagogen und Mathematiker einen Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung gefordert; im Jahre 1901 wurde Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik Bestandteil des Mathematiklehrplans für die Primen der drei gymnasialen Schulformen in Preußen. Triebfeder war die eminente Bedeutung, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für naturwissenschaftliche Fächer erlangt hatten, verbunden mit der zunehmenden gesellschaftlichen Anerkennung von Naturwissenschaft und Technik als Bestandteil höherer Bildung. Allerdings blieben stochastische Themen im Mathematikunterricht bis vor wenigen Jahren auf die gymnasiale Oberstufe beschränkt.

Die Schulreform des 3. Reiches führte zu einer Enttheoretisierung, der die Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Opfer fiel, und zu einer stark pragmatischen Ausrichtung, in der elementare Methoden der Beschreibenden Statistik stärkeres Gewicht erlangten. Einige dieser Methoden sind bis heute fester Bestandteil von Hauptschullehrplänen geblieben. Nach dem 2.Weltkrieg fiel auch die Statistik weitgehend einer Schulreform zum Opfer, die sich nicht zum Utilitaritätsprinzip des 3. Reiches bekennen konnte, aber auch keine eigenständigen Begründungen für Stochastik entwickelte.

Der Neubeginn der didaktischen Diskussion nach dem 2. Weltkrieg hatte zwei Triebfedern:

Entwicklungspsychologische Studien zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

Sie führten zur Forderung, intuitive Konzepte zur Wahrscheinlichkeit frühzeitig aufzunehmen bzw. zu entwickeln und genetisch aufzubauen sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung in andere Themen des Mathematikunterrichts und in andere Unterrichtsfächer zu integrieren.

Initiativen der OECD ab 1959

Hier ging es generell um eine Förderung und Entwicklung des naturwissenschaftlich-technischen Potentials in den westeuropäischen Industrienationen. In mehreren Konferenzen wurde eine Reform des Mathematikunterrichts mit dem Ziel gefordert, Stochastik als anwendungsorientierte mathematische Disziplin fest in den Lehrplänen aller Schulstufen zu verankern. Während diese Initiative im europäischen Ausland Früchte trug, wurde die Bedeutung der Stochastik in der Bundesrepublik Deutschland von den für die Lehrpläne verantwortlichen Lehrern, Didaktikern und Behörden erst relativ spät erkannt.

Die Empfehlungen und Richtlinien der KMK von 1968 zeigen deutlich zwei Tendenzen:

- Beschränkung stochastischer Themen auf die gymnasiale Oberstufe; insbesondere wurde dem Entwicklungsgesichtspunkt nicht Rechnung getragen.
- Ausrichtung der Stochastik auf die formal-strukturelle Gestalt mathematischer Theorien; die ursprüngliche Leitidee der Anwendung wird zwar genannt, bleibt aber ohne Auswirkung auf die Stoffstruktur.

In dieser Situation, insbesondere unter dem Druck, die Richtlinien der KMK in den Lehrplänen der Bundesländer umzusetzen und in neuen Unterrichtswerken zu berücksichtigen, entwickelte sich eine lebhafte Diskussion über Stochastik als Unterrichtsgegenstand, die in vielen Tagungen und fachdidaktischen Publikationen dokumentiert ist. Kernpunkte der Diskussion waren und sind die Entwicklung des stochastischen Denkens und die Anwendungsorientierung der Stochastik.

Zwar ist die Diskussion heute noch lange nicht abgeschlossen; es zeichnen sich aber Grundlinien bezüglich dieser beiden Schwerpunkte ab, die auch in dem vorliegenden

Curriculum verfolgt werden. Insbesondere sind inzwischen schulpolitische Entscheidungen getroffen worden, die dem Curriculum seinen vormals avantgardistischen Charakter (glücklicherweise) genommen haben. Etwa ab 1970 drang die Stochastik in die Lehrpläne der gymnasialen Mittelstufe ein, weil man erkannt hatte, daß anders eine gründliche Auseinandersetzung mit der Stochastik als mathematischer Disziplin auf der Sekundarstufe II nicht möglich ist. Etwa ab 1975 öffneten sich ihr allmählich auch Real- und Hauptschule, dies im Zuge einer stärker anwendungsorientierten Mathematikdidaktik.

2.3 Entwicklung des stochastischen Denkens

Ähnlich der Entwicklung des Zahlbegriffs wird das Verständnis für stochastische Phänomene, verbunden mit einem Konzept für Wahrscheinlichkeit, in einem langfristigen, phasenweise verlaufenden Prozeß ausgebildet. Die Entwicklung des stochastischen Denkens fällt weitgehend in die Zeitspanne, in welcher der Schüler die Primarstufe und Sekundarstufe I besucht. Schon deshalb ist sie für diese Stufen bedeutsam.

Psychologische Untersuchungen zur Entwicklung des stochastischen Denkens wurden bereits 1951 von Jean PIAGET und Bärbel INHELDER publiziert (s. (3)). Daß dieser Entwicklungsprozeß gelenkt und gefördert werden kann, daß fehlerhafte Verhaltensmuster in stochastischen Situationen korrigiert werden können, zeigen didaktische Untersuchungen von FISCHBEIN und anderen um 1970. In (8) heißt es sinngemäß (bezogen auf die Sekundarstufe I): Der Hauptzweck der Einführung von Wahrscheinlichkeit und Statistik ist, durch weitgefaßte und systematische Übungen die intuitiven Strukturen und grundlegenden geistigen Gewohnheiten zu bilden, die später in den abstrakten probabilistischen und statistischen Überlegungen eine Rolle spielen. Nur durch ein derartiges systematisches Training kann man die produktive Synthese von Zufall und Gesetzmäßigkeit verwirklichen, die auf dem Gebiet wesentlich ist.

FISCHBEIN spricht hier ein zentrales Problem bei der Entwicklung des stochastischen Denkens an: das Vorhandensein fehlerhafter stochastischer Primärintuitionen, insbesondere

- der Annahme kausal-deterministischer Zusammenhänge in stochastischen Situationen,
- der Annahme von Abhängigkeiten bei unabhängigen Versuchen in stochastischen Experimenten,
- der Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen auf Einzelereignisse.

Derartige Fehlvorstellungen wurden auch in einer Voruntersuchung zu diesem Curriculum in der 7. Klasse einer Hauptschule aufgedeckt. Daß falsche Primärintuitionen als relativ stabile Verhaltensmuster ausgeprägt werden, zeigen Beobachtungen an Erwachsenen in stochastischen Situationen.

Charakteristisch ist z.B. das Verhalten in Spielsituationen:

- Viele Lottospieler setzen immer auf die gleiche Zahlenreihe ("Einmal muß sie ja kommen!").
- Andere vermeiden die Zahlen der vorangegangenen Ziehung ("Sie waren ja gerade dran!").

Beim Roulette treten oft zwei einander entgegengesetzte Strategien auf, beide im Zuge der Beobachtung einer längeren Spielserie:

- Ist in der Serie ‚rot' wesentlich öfter als ‚schwarz' aufgetreten, setzen die Einen auf ‚rot' ("Rot kommt öfter!").
- Andere setzen in der gleichen Situation auf ‚schwarz' ("Jetzt muß öfter schwarz kommen, damit sich rot und schwarz ausgleichen!").

Diese Strategien beruhen ausnahmslos auf falschen Vorstellungen vom Zusammenhang der einzelnen Ziehungen im Lotte bzw. der einzelnen Spiele beim Roulette, darüber hinaus auf einer falschen Interpretation des Gesetzes der großen Zahlen.

Die fundamentale Rolle, die das Unabhängigkeitskonzept bei der Ausbildung intuitiver stochastischer Vorstellungen spielt, ist didaktisch bedeutsam. Das vorliegende Curriculum geht davon aus, daß der Schüler der 7. Klasse bereits über korrekturbedürftige Einstellungen zu stochastischen Phänomenen verfügt. Es stellt sich die Aufgabe, sie aufzudecken und durch stimmige Vorstellungen zu ersetzen.

Das intuitive Verständnis stochastischer Unabhängigkeit kann besonders gut in mehrstufigen Zufallsexperimenten aufgegriffen werden. Wir ziehen daher solche Experimente im Curriculum der Klasse 7 recht früh heran und wirken durch ihre Analyse korrigierend und präzisierend auf die Entwicklung des stochastischen Denkens ein.

2.4 Anwendungsbezug der Stochastik

Wir streben mit dem Curriculum die Fähigkeit und die Bereitschaft des Schülers an, sich in stochastischen Situationen rational zu verhalten. Diese Qualifikation ist weder auf eine kleine, unbedeutende Klasse von Situationen beschränkt noch stellt sie nur eine Zusatzqualifikation zu bewährten deterministischen Verhaltensmustern dar. Im Gegenteil: Es dürfte schwerfallen, Realsituationen ohne stochastische Elemente aufzuweisen; und vielfach sind diese stochastischen Elemente Wesensbestandteil der Realsituation.

Das heißt aber: Eine angemessene Lösung der situationsimmanenten Probleme ist ohne stochastische Methoden gar nicht möglich. Es kann daher kaum bezweifelt werden, daß stochastische Qualifikationen - auch für den Hauptschüler - wichtige Erkenntnismittel und Techniken zur Bewältigung von Realsituationen enthalten.

Für den Stochastikunterricht stellt sich daher als zentrales Problem, wie der Zusammenhang zwischen Realität und stochastischer Theorie vermittelt werden kann. Hierbei sind viele Fragen zu beantworten, z.B.:

- Wie bildet sich die Realität in der Stochastik ab?
- Welche inhaltliche Bedeutung hat der Wahrscheinlichkeitsbegriff ?
- Welche stochastischen Strukturen treten in Realsituationen auf ?
- Wie erwirbt der Schüler eine Handlungskompetenz für stochastische Probleme ?

Diese Fragen werden im Laufe des Curriculums jeweils problembezogen erörtert. Daher seien hier nur einige Kernpunkte genannt.

Modellierung realer stochastischer Situationen

Das entscheidende Mittel zur Herstellung einer Beziehung zwischen Realität und Theorie ist die Konstruktion eines stochastischen Modells, das die wesentlichen stochastischen Problembestandteile hervortreten läßt und es erlaubt, reale Vorgänge im Modell abzubilden. Paradigmatisch für solche stochastischen Modelle sind Glücksspiele. Sie stellen - neben ihrem motivierenden Effekt - also ein Mittel dar, den Zusammenhang zwischen realem Problem und stochastischer Theorie zu stiften.

Fast alle Anwendungssituationen der Stochastik lassen sich als Zufallsexperimente modellieren: Ein prinzipiell beliebig oft wiederholbarer Prozeß (etwa der Lauf einer Kugel über das Galton-Brett) findet unter bestimmten, den Prozeß aber nicht determinierenden Bedingungen statt. Es können daher mehrere Ergebnisse eintreten (beim Galton-Brett können die Kugeln in verschiedene Fächer fallen). Man interessiert sich dann für die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ergebnisse.

Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse eines realen Zufallsexperiments hat in der Regel eine frequentistische (statistische) Bedeutung: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnissis wird geschätzt mit dem Anteil, den dieses Ergebnis in einer langen Versuchsreihe hatte. Die frequentistische Deutung impliziert aber nicht die frequentistische Ermittlung der Wahrscheinlichkeit. Eine solche Ermittlung ist häufig unmittelbar gar nicht möglich, manchmal unökonomisch. Auf der Ebene des stochastischen Modells kann hier der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff zum Tragen kommen, der auf Symmetrieüberlegungen beruht. Oft führen diese zwar nicht unmittelbar zu Resultaten, wohl aber mittelbar. So kann die Wahrscheinlichkeit für das Fallen einer Kugel in ein bestimmtes Fach des Galton-Brettes nicht direkt aus Symmetrieüberlegungen ermittelt werden; wohl aber basiert die Annahme, daß an jedem Zapfen des Bretts die Hälfte der Kugeln nach links, die andere nach rechts fällt, auf einer solchen Überlegung (sie kann ggf. frequentistisch geprüft werden). Die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Fächer wird dann mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung - der Analyse mehrstufiger Zufallsexperimente - ermittelt (in diesem Zusammenhang spielt die in 2.3 erörterte Unabhängigkeit eine fundamentale Rolle).

So sind klassischer und frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff eng aufeinander bezogen und stützen sich gegenseitig. Eine explizite Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kann unterbleiben, wenn angemessene Vorstellungen vom und begründete Methoden für den Umgang mit Wahrscheinlichkeit entwickelt werden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt die Methoden bereit, mit denen aus (primären) Wahrscheinlichkeiten - solchen, die klassisch oder statistisch ermittelt wurden - (sekundäre) Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Umgang mit Verteilungen

Charakteristisch für Zufallsexperimente ist die Verteilung der Häufigkeiten bzw. der Wahrscheinlichkeiten auf die einzelnen Ergebnisse. Sie vermittelt einen plastischen Eindruck von realen stochastischen Phänomenen; insbesondere haben Verteilungen einen unmittelbar erklärenden Charakter für empirische Massenerscheinungen. Die für eine wichtige Klasse realer stochastischer Situationen kennzeichnende Mittenbetonung (Normalverteilung) ist auf der Modell-Ebene (z.B. mit dem Galton-Brett) schülerangemessen erklärbar. Es kann damit ein wesentlicher Beitrag zur Erkenntnis realer stochastischer Situationen geleistet werden. Die Korrespondenz zwischen statistischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffen ist ein Kernpunkt für die Entwicklung des stochastischen Denkens:

relative Häufigkeit	-	Wahrscheinlichkeit
Häufigkeitsverteilung	-	Wahrscheinlichkeitsverteilung
Durchschnittswert	-	Erwartungswert
mittlere Abweichung	-	erwartete Abweichung

Insgesamt ist die "Verteilung" der mathematische Leitbegriff für unser Curriculum. In STOCHASTIK 7 lernt der Schüler verschiedenste Verteilungen und Verteilungstypen kennen, in STOCHASTIK 8 charakterisieren, in STOCHASTIK 9 innerhalb der dortigen Unterrichtsprojekte verwenden.

Handlungsorientierung

Es versteht sich von selbst, daß die Kompetenz zu angemessenem Verhalten in stochastischen Situationen eine Handlungskompetenz einschließt. Der Schüler wird sie nur im aktiven Umgang mit stochastischer Modellbildung erwerben können: Er muß selbst Modelle auswählen, Versuchsreihen durchführen, die gewonnenen Daten strukturieren, klassifizieren, weiterverarbeiten und interpretieren und schließlich die Angemessenheit des Modells beurteilen. Er muß durch eigene Tätigkeit lernen, die Komplexität vieler realer stochastischer Situationen aufzulösen. Das Curriculum sieht hierfür einen breiten Spielraum vor; insbesondere sei auf die Unterrichtsprojekte für die Klasse 9 hingewiesen.

2.5 Fachinhalte des Curriculums

Klasse 7

Im Curriculum dieser Klasse geben Zufallsexperimente den strukturellen Rahmen für die Entwicklung stochastischer Grundbegriffe und Methoden ab. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird im Kontext realer und modellhafter Zufallsexperimente in seiner frequentistischen und klassischen Interpretation – beide eng aufeinander bezogen – entwickelt. Wir verzichten auf eine explizite Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ebenso wie auf eine mengentheoretische Formalisierung von Zufallsexperimenten. Entsprechend tritt der Ereignisbegriff in seiner formalen Gestalt nicht auf, wohl aber inhaltlich bei der Umstrukturierung (Vergröberung) von Zufallsexperimenten.

Der Verteilungsbegriff kommt auf natürliche Weise bei der Untersuchung von Zufallsexperimenten ins Spiel. Der Zusammenhang zwischen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen ergibt sich aus der frequentistischen Interpretation der Wahrscheinlichkeit. Graphische Darstellungen und umgekehrt Interpretationen graphisch gegebener Verteilungen werden behandelt.

Was die Wahrscheinlichkeitsrechnung betrifft, so verzichten wir auf die Sätze, die gewöhnlich zur axiomatischen Definition der Wahrscheinlichkeit herangezogen werden, und die auf der Analyse einstufiger Zufallsexperimente beruhen. Dagegen wird der Multiplikationssatz an mehrstufigen Experimenten entwickelt und als Pfadregel für Baumdiagramme formuliert. Mit Hilfe des Multiplikationssatzes wird die Binomialverteilung inhaltlich, und zwar am Galton-Brett analysiert.

Klasse 8

Das Curriculum baut auf den fundamentalen Begriffen und Methoden der 7. Klasse auf. Sein zentrales Thema ist die Analyse, der Vergleich und die Bewertung von Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit Hilfe von Mittel- und Streuwerten. Für Häufigkeitsverteilungen wird der Durchschnittswert (arithmetisches Mittel), für Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Erwartungswert als korrespondierender Begriff eingeführt. Möglichkeiten und Grenzen dieser Parameter führen zur weiteren Charakterisierung von Häufigkeitsverteilungen durch die durchschnittliche Abweichung, von Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch die erwartete Abweichung als analogem Begriff. Auf andere Mittel- und Streuwerte verzichten wir, insbesondere auf die Standardabweichung, die als Streumaß weniger naheliegend ist und in dem hier gegebenen Rahmen ihre Vorteile nicht entfalten kann.

Klasse 9

Sie bringt keine Erweiterung des stochastischen Instrumentariums, sondern eine Anwendung der erworbenen Kenntnisse in komplexen Realsituationen.

2.6 Stochastik in der Hauptschule

Mit den vorangegangenen Bemerkungen wurden die Bedeutung der Stochastik für die Bewältigung realer Probleme und die spezifischen Schwierigkeiten bei der Entwicklung des stochastischen Denkens erörtert. Die Inhaltsskizze in 2.5 zeigt zugleich den fachmathematischen Rahmen auf, in dem der Anwendungsbezug in der Hauptschule hergestellt und das stochastische Denken entwickelt werden kann.

Seit jeher hat die Hauptschule den engen Zusammenhang zwischen Mathematik und Realität als ihre besondere Aufgabe betrachtet; Sachrechnen war stets eine ihrer Domänen. Allerdings genügen auch heute noch Lehrpläne und Unterrichtswerke dem damit verbundenen Anspruch nur unvollkommen. Themen und Aufgabenstellungen aus Anwendungsgebieten der Mathematik wirken nicht selten antiquiert und konstruiert.

ıntiquiert, weil sie die bürgerliche Welt vergangener Jahrzehnte widerspiegeln, also en Informationen und Interessen des heute aufwachsenden Menschen nicht entsprehen; konstruiert, weil sie nicht etwa tatsächliche Fragestellungen aus der Praxis ieten, sondern auf unmittelbare "Anwendung" der erlernten Regeln hin angelegt ind.

lieses Verständnis von Anwendung findet sich auch heute noch in den Stochastik-:apiteln mancher Hauptschulbücher, die in ihrer Konzeption mehr formalmathematichen Strukturen verpflichtet sind als den Erkenntnisinteressen und -möglichkeiten es Hauptschülers. Mit der Aufnahme eines Curriculums "Stochastik" kann hingegen in wertvoller Beitrag zur Realisierung der ureigensten Ziele der Hauptschule geleitet werden, wenn die Eigenheiten des stochastischen Denkens berücksichtigt werden nd Anwendungen nicht nur eine Alibifunktion übernehmen. Daß dies bisher nicht enügend geschehen ist, gab den Anlaß zur Entwicklung dieses unseres Curriculums.

)ie während seiner Erprobung gemachten Erfahrungen zerstreuen die Befürchtungen, aß der Hauptschüler von Interesse und Leistungsfähigkeit her überfordert sein önnte. Ganz im Gegenteil: So große Anforderungen ein umfassender Erwerb stochatischer Methoden stellt, so einfach und naheliegend und dennoch relevant sind die ınfänge, um die allein es sich in der Hauptschule handelt. Rechentechnisch ist igentlich "nur" die Vertrautheit mit Bruch- und Dezimalzahlen vonnöten. Nebenbei:)ie Stochastik ist einer der ganz wenigen Bereiche, in denen außerhalb der Schule nit Brüchen gerechnet, in denen also Bruchrechnung tatsächlich angewendet wird.

)ie Stochastik bietet demnach eine ausgezeichnete Gelegenheit für einen Neubeginn, ei dem leistungsschwächere Schüler nicht sofort durch ihre Lücken aus früher beıandelten Bereichen benachteiligt sind. Solche Zäsuren sind gerade in der Hauptschue von eminenter psychologischer Bedeutung. Daß sich mit solch minimalen inhaltlihen Voraussetzungen und im Curriculum mit relativ wenigen Begriffen und Methoden in interessantes, nichttriviales Anwendungsfeld erschließt, ist umso erfreulicher.

ichließlich lassen sich stochastische Fragen zumindest im für die Hauptschule releanten Bereich auf allen drei Repräsentationsebenen angehen:

naktiv: konkret-handelnd (z.B. beim Durchführen von Zufallsexperimenten und beim Sammeln von Daten)

konisch: anschaulich-zeichnerisch (z.B. beim Anlegen von Graphiken und Baumdiagrammen)

ymbolisch: umgangssprachlich-fachsprachlich-fachmethodisch (z.B. beim Bestimmen von Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten)

)a im Unterricht durchgehend alle drei Ebenen benutzt werden, hat der Schüler die Aöglichkeit, in der ihm jeweils gemäßen Ebene zur Formulierung und Lösung des anitehenden Problems beizutragen. So ergeben sich vielfältige Möglichkeiten zu offenem ınd differenzierendem Unterrichten.

2.7 Leitprinzipien und Leitziele des Curriculums

Leitprinzipien

1. Die Diskrepanz zwischen fortgesetztem und intensivem Gebrauch stochastischer Methoden in nahezu allen Bereichen und Disziplinen einerseits und völliger Unkenntnis dieser Mittel in weiten Teilen der Bevölkerung andrerseits muß abgebaut werden. Die einfachsten dieser Methoden zählen heute zu den elementaren Kulturtechniken und müssen demgemäß zur Basisausstattung eines jeden Menschen gehören.
2. Das Curriculum beschränkt sich nicht auf Glücksspiele (Würfelbudenmathematik!), sondern greift praxisrelevante Sachverhalte auf. Glücksspiele werden auf der Modellebene eingesetzt; ihr motivierender Charakter wird genutzt. Damit wird auch den gegenwärtigen Interessen der Schüler Rechnung getragen. Die Anwendungssitu-

ationen der Stochastik stehen zu anderen Schulfächern und Disziplinen in vielfältiger Beziehung und greifen auch Probleme des späteren Berufslebens der Schüler auf.

3. Wie in der stochastischen Praxis sollen auch im Unterricht wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Betrachtungen möglichst früh, möglichst oft und möglichst intensiv miteinander verschränkt werden.
4. Die o.a. didaktisch-methodischen Vorzüge der elementaren Stochastik müssen entschlossen genutzt werden: ständige Präsenz sämtlicher Repräsentationsebenen, Erwerb möglichst vieler Methoden und Einsichten durch möglichst wenige Begriffe und Symbole. Insbesondere soll (nach entsprechend negativen Erfahrungen bei Pilot-Erprobungen) der Ereignisbegriff und damit das Arbeiten mit Mengen vermieden werden.
5. Die Sequenzierung der ausgewählten stochastischen Phänomene und Methoden soll genetisch erfolgen, d.h. vom probabilistischen Vorverständnis der Schüler ausgehen und falsche Primärintuitionen abbauen, problem- statt wissenschaftszentriert sein, die zentralen Einsichten spiralig erarbeiten, und nicht auf den bloßen Erwerb von Wissen, sondern auf das Erarbeiten und Weiterentwickeln stochastischer Strategien hin angelegt sein.
6. Auf äußere Differenzierung sollte verzichtet werden. Nach Schaffen einer gemeinsamen Basis in den Klassen 7 und 8 ist in der Klasse 9 allerdings eine Spezialisierung bzw. Aufteilung in Projektgruppen je nach Leistung und Neigung möglich.

Leitziele

Als Fundamentalziel des Curriculums sehen wir an:

Abbau irrationaler Verhaltensweisen in stochastischen Situationen und Aufbau eines rationalen, zielgerichteten Verhaltens einschließlich der dazu erforderlichen Handlungskompetenzen

Dazu gehören folgende Richtziele:

1. eine stochastische Situation erkennen können
2. die stochastischen Bestandteile eines der Situation immanenten Problems isolieren und analysieren können
3. durch stochastische Verfahren und Schlüsse zusätzliche Informationen gewinnen können
4. das Problem durch stochastische Methoden lösen können
5. sich gemäß den vorliegenden Daten, gewonnenen Informationen und errechneten Lösungen in der stochastischen Situation verantwortungsbewußt und kompetent verhalten können

Noch einmal ist zu betonen, daß auch und gerade der Hauptschüler über solche Fähigkeiten verfügen muß. Ohne sie läuft er Gefahr, sich in vielen Situationen zu schaden oder aber von jenen Interessenverbänden manipuliert zu werden, die ihm das Hantieren mit diesen Techniken abnehmen und ihn dabei mit geschickt zubereiteten Ergebnissen überfahren. Deshalb gehört zu den Richtzielen auch:

6. den Gebrauch stochastischer Methoden durch andere sowie die dort erhaltenen Ergebnisse kritisch überprüfen können

Um welche Methoden geht es hierbei ?

- Übliche Maßnahmen der Beschreibenden Statistik
  (Gewinn, Darstellung und Aufbereitung von Daten; Mittel- und Streuwerte)
- Elementare Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung
  (statistische und klassische Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten; Berechnung weiterer Wahrscheinlichkeiten mit elementaren Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie;

Bestimmung charakteristischer Werte von wichtigen Verteilungen)

Schlüsse aus stochastischen Informationen und Interpretationen stochastischer Resultate.

.8 Beitrag der Stochastik zu den Gesamtzielen des Mathematikunterrichts

/urde bisher fast nur von der Bedeutung her argumentiert, welche die Stochastik in er uns umgebenden Welt einnimmt, so ist nicht zu übersehen, daß auch der Mathe- ıatikunterricht selbst, seine Ziele, Methoden und Formen durch die Aufnahme eines tochastik-Curriculums erheblich gewinnen können. Dies sei beispielhaft am Beitrag es Stochastik-Unterrichts zu drei kognitiven Grundstrategien* gezeigt, denen sich der 1athematikunterricht aller Schulformen und Schuljahre verpflichtet weiß.

er Schüler soll lernen, zu argumentieren.

ich an Tatsachen halten, an Daten orientieren; Daten auswählen, auswerten und trukturieren; Argumente durch Daten stützen bzw. widerlegen; im Bereich zwischen sicher" und "unmöglich" argumentieren; Chancen, Entwicklungen, Tendenzen kalku- ieren; die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens von Behauptungen einschätzen; Fehler rmitteln; Hypothesen prüfen

er Schüler soll lernen, sich kreativ zu verhalten.

ich geeignete Daten beschaffen; aus gegebenen Daten neue Daten ermitteln; geeig- ıete Veranschaulichungen wählen; eine stochastische Situation erkennen; stochastische ınd deterministische Methoden kombinieren; Vermutungen und Hypothesen aufstellen

er Schüler soll lernen, Situationen zu mathematisieren.

ine stochastische Situation beschreiben, veranschaulichen und analysieren; das sie ufschließende mathematische Modell entwickeln; die modellimmanenten Methoden jebrauchen; die erhaltenen Ergebnisse in der Situation interpretieren; die solchermassen erhaltenen Lösungen kontrollieren und bewerten; untersuchen, was das Modell eistet und was es nicht leisten kann

nsgesamt wird eine nicht zu leugnende Schwäche des klassischen Mathematikunterichts abgebaut: die falsche Sicht, Mathematik habe es immer mit eindeutigen Situationen und vollständig bestimmten Strukturen zu tun, denen mit eindeutigen Mitteln eindeutige und sichere Konsequenzen zu entnehmen wären, Mathematik sei also wertlos und unbrauchbar im Bereich der Unsicherheit und des Zufalls.

Vielmehr ergibt sich die Einsicht, daß dort, wo über das Einzelereignis nichts Sicheres gesagt werden kann, vielfach noch Feststellungen über viele solcher Ereignisse und dadurch Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Einzelereignis möglich sind, und daß solche Resultate oft genügen, um sich in der gegebenen Situation zweckmäßig zu verhalten.

2.9 Literatur

Auch hier beschränken wir uns auf Arbeiten, welche die vorstehenden Überlegungen ergänzen und vertiefen.

(1) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 13 (1981),H.6 und 14 (1982),H.2

Darin werden in einem vorgegebenen Rahmen Unterrichtswerke beider Sekundarstufen in ihren Stochastik-Kapiteln rezensiert, darüber hinaus eine historisch orientierte Synopse zur Stochastik im Schulunterricht vorgelegt.

(2) Stochastik im Schulunterricht. Beiträge zum 3. Internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik vom 29.9. bis 3.10.1980 – Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1981

Psychologische Untersuchungen:

(3) Fischbein,E.: The intuitive sources of probabilistic thinking in children - Dordrecht: Reidel 1975

(4) Piaget,J.;Inhelder,B.: La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant - Paris: P.U.F. 1951

(5) Koßwig,F.W.: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff beim Kind - In: Beiträge zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht,H.32/33 - Braunschweig: Vieweg 1977

Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in didaktischer Sicht:

(6) Steinbring,H.: Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs - Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht - Materialien und Studien des IDM,Bd.18 - Bielefeld 1980

(7) von Harten,G.; Steinbring,H.: Schätzen, Messen und Entscheiden - Stochastik im Unterricht der Sekundarstufe I - EPAS I - Drucksache Nr.6 - Bielefeld: IDM 1981

Unterrichtsversuche:

(8) Fischbein,E.; Pampu,I.; Minzat,I.: Einführung in die Wahrscheinlichkeit auf der Primarstufe - In: Didaktik der Mathematik (Hrsg.: H.G.Steiner) - Darmstadt: Wiss.Buchges. 1978

(9) Winter,H.: Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule - In: Didaktik der Mathematik 4 (1976),H.1

3. CURRICULUM "STOCHASTIK 7"

3.1 Vorbemerkungen

Das Curriculum STOCHASTIK 7 (= Teilcurriculum "Stochastik in der Hauptschulklasse 7") ist in vier Phasen gegliedert, welche je mehrere Unterrichtsstunden umfassen.

Wir empfehlen, zwischen 3. Phase und 4. Phase ein traditionelles Kapitel der Hauptschulmathematik in Klasse 7 einzuschieben, also STOCHASTIK 7 in zwei zeitlich getrennten Abschnitten zu unterrichten.

Die Feinsequenzierung des Unterrichts innerhalb der Phasen bleibt weitgehend dem Lehrer überlassen (zur Begründung s. Unterkapitel 1.3). Allerdings erhält der Lehrer dafür und für seine unmittelbare Unterrichtsvorbereitung zahlreiche Anregungen und Hilfen; dabei gehen insbesondere die während der Erprobungen gemachten Erfahrungen ein.

Jede Phase ist gegliedert in:

Didaktische Begründung

Hier wird auf die Funktion der jeweiligen Phase im Jahrescurriculum und im gesamten Lehrgang eingegangen. Dies geschieht, um ein Auseinanderfallen in relativ selbständige Teilkapitel zu vermeiden und um das je Wesentliche einer Phase zu betonen.

Ziele

Die Ziele liefern eine Beschreibung des gewünschten Endverhaltens nach Durchlaufen der Phase. Sie stellen eine phasen- und inhaltsbezogene Konkretisierung der o.a. Generalziele dar.

Allerdings ist nicht zu vertreten, daß der gesamte Unterricht auf das Erreichen dieser Ziele hin ausgerichtet wird (s.u.).Vor allem in der ersten Phase ist auch darauf zu achten, daß die Schüler für das neue Gebiet interessiert und motiviert werden (affektives Ziel).

Inhalte

Je nach Zielsetzung und Stellung der Phase ist der Unterrichtsstoff festgelegt (Phase 1) oder es werden lediglich Vorschläge unterbreitet (z.B. für die Zufallsexperimente in Phase 2).

Falls die Inhalte als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, sind sie hier nur skizziert.

Methoden und Medien

Die Planungsgruppe meinte, daß die erprobenden Lehrer zur Ausgestaltung dieser Dimension von Ausbildung und Erfahrung her in besonderem Maße bereit und fähig sind. Dies hat sich bei der Erprobung voll bestätigt.

So gehen viele der methodischen Hinweise und Medienangebote auf die Feinplanungen und Unterrichtserfahrungen der Lehrer zurück.

Typische Aufgaben und Testitems

Traditionelle Kapitel der Schulmathematik haben einen "Hof" klassischer Aufgaben um sich, die dem Lehrer bekannt und verfügbar sind.

Neuere Kapitel müssen den (jahrzehntelangen) Prozeß der Generierung eines Aufgabenstammes erst durchlaufen. Dies ist Chance und Risiko zugleich: Chance, weil die Gefahr des Tradierens überholter Aufgabenstellungen und des bloßen Aneinanderreihens bzw. Verselbständigens von Aufgaben (statt zielbezogenen, von Leitideen geprägten Arbeitens an tragenden Problemen) einstweilen nicht gegeben ist; Risiko, weil Motivation, Schwierigkeitsgrad, Wirklichkeitsnähe, wechselseitige Verflochtenheit der Aufgaben sich erst noch herausstellen müssen.

Die jeder Phase beigegebene Aufgabensammlung ist daher nicht so sehr als Reservoir für den Lehrer oder gar als roter Faden für den Unterricht anzusehen, sondern eher als Hilfe für die Konstruktion eigener Übungen. Sofern dabei statistisches Material verwendet wird, ist unbedingt auf Aktualität zu achten (wir haben in unserer Sammlung bewußt die seinerzeit aktuellen Daten nicht mehr ergänzt bzw. abgeändert).-

Abschließend sei vermerkt, daß die angegebene Grobsequenzierung weder systemorientiert (d.h. an der fachwissenschaftlichen Deduktion stochastischer Begriffe und Methoden ausgerichtet) noch durchgängig lernzielorientiert (d.h. der Hierarchie stochastischer Ziele vom Fundamentalziel (s.Unterkapitel 2.7) bis hin zum operationalisierten Feinziel verpflichtet), sondern problem- und adressatenorientiert (genetisch) vorgenommen wurde. Diese Grundsatzentscheidung sollte auch für die Feinsequenzierung beibehalten werden.

Zeitbedarf

Die Angaben sind als ungefähre Richtwerte zu verstehen.

Schulbücher

Es wird auf einschlägige Passagen in geeigneten Schulbüchern verwiesen, wobei insbesondere die dortigen Medien und Aufgaben sowie variierte bzw. alternative Sequenzierungen interessieren.

3.2 1.Phase: KONFRONTATION MIT DEM GALTON-BRETT

Didaktische Begründung

Das Galton-Brett liefert eine in bezug auf das Fundamentalziel und die zugehörigen Richtziele (s.Unterkapitel 2.7) exemplarische Situation. Insbesondere ermöglicht es den Abbau unzutreffender Primärintuitionen (z.B. Determiniertheit bzw. Beeinflußbarkeit der Versuche, Existenz ausgezeichneter Wege, Abhängigkeit aufeinanderfolgender Ergebnisse). Es motiviert die Schüler durch die den Versuchen immanente Dynamik sowie durch das Auftreten eines unerwarteten und nicht einfach zu durchschauenden Phänomens (Mittenbevorzugung). Schließlich führt es schon zu Beginn des stochastischen Lehrgangs und auf enaktiver Ebene zu dem zentralen Begriff der Verteilung.

Ziele

1. Versuche am Galton-Brett durchführen sowie den Verlauf und das Ergebnis solcher Versuche beschreiben können
2. erläutern können, wieso das Ergebnis eines Versuches nicht vorausgesagt werden kann (d.h. vom Zufall abhängt)
3. die Anzahlen des Eintretens der einzelnen Ergebnisse feststellen und miteinander vergleichen können
4. das Problem der "Bevorzugung der Mitte" erkennen und formulieren können
5. Scheinargumente zur Begründung der Mittenbevorzugung zurückweisen können

Hinweis:
Die hier geforderte Beschreibung (Ziel 1) und Erläuterung (Ziel 2) darf nicht überinterpretiert werden, sondern ist als naive umgangssprachliche Skizzierung des Zu-

fallsexperimentes gemeint. Dazu sollte es der Lehrer den Schülern ermöglichen, die Begriffe "Versuch", "Ergebnis" und "Zufall" durch Imitationslernen zu übernehmen.

Inhalte

Das Experiment "Lauf einer Kugel über das Galton-Brett" wird vorgestellt. Es wird deutlich, daß dieser Lauf und mithin auch das schließlich erreichte Kästchen vom Zufall abhängen. Umso mehr überrascht die offensichtliche Bevorzugung der mittleren Kästchen.

Welches sind die Gründe ?

Erste Erklärungsversuche deterministischer Art werden diskriminiert.

Methoden und Medien

Ein Galton-Brett mit verstellbarer Zapfenreihenzahl ist unbedingt erforderlich (Binostat; Lehrmittelverlag Köster, München; Best.-Nr. IP 1199. Oder: Galton-Brett; Lehrmittelfirma RATEC, Frankfurt/Main; Best.-Nr. 8.3761).

Wer es selbst herstellen möchte, nimmt am besten sechseckige Muttern, die auf von hinten eingebohrte Schrauben gedreht werden (Fig.1). Die Breite der Zwischenräume sollte den Kugeldurchmesser kaum übertreffen, um ein Durchfallen der Kugel zu vermeiden. Weniger geeignet, weil meist nicht genau genug, sind einfache Nagelmodelle. Daher sollten Schüler für den Bau eigener Galton-Bretter zwar gelobt, aber nicht dazu aufgefordert werden.

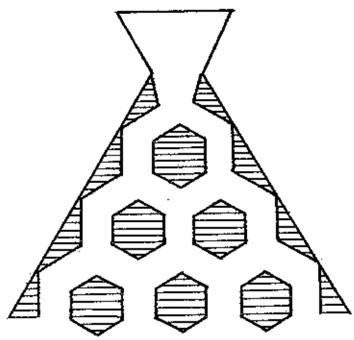


Fig.1

Die den Zielen der Einstiegsstunde angemessene Unterrichtsform ist zweifellos das offene Gespräch.

Vorschlag: Der Lehrer zeigt das auf mindestens 5 Zapfenreihen (d.h. auf 6 mögliche Ergebnisse) eingestellte Galton-Brett kurz vor und fragt: "Was passiert mit einer Kugel, die ich hier oben einwerfe ?" "Warum ?"

Diese beiden Fragen werden nach jedem der 10 ersten Versuche wiederholt. Es hat sich gezeigt, daß dabei recht unterschiedliche Vortheorien und Schlüsse auftauchen, die meist deterministischer, manchmal aber auch magisch-anthropomorpher Natur sind und deshalb durch das weitere Verhalten der Kugel nicht bestätigt werden;z.B.:

- Die Kugel fällt in die Mitte, weil sie dies auch auf einer schiefen Ebene ohne Zapfen tun würde (falscher Analogieschluß oder aber Annahme eines Kugel"willens").
- Die Kugel fällt in die Mitte, weil dies der kürzeste Weg ist (durch Nachmessen oder Nachdenken leicht zu widerlegen).
- Die Kugel fällt in ein Kästchen ganz am Rande, weil sie dorthin einen knickfreien Weg hat (falscher Analogieschluß).
- Die Kugel fällt in ein noch nicht besetztes Kästchen, weil sie kein Kästchen bevorzugt (falsche Annahme vom "gerechten Zufall").
- Die Kugel fällt nach links (in die Mitte, nach rechts), wenn man sie oben rechts (in der Mitte, links) einwirft (falsche Annahme der Manipulierbarkeit).

Am Ende der Stunde sollten sich alle Schüler davon überzeugt haben, daß der Lauf der Kugel nicht vorauszubestimmen ist und daher vom Zufall abhängt. Der Lehrer wird die Diskussion nur insoweit beeinflußen, als dies zum Erreichen der Ziele 1 und 2 erforderlich ist. Dazu gehört allerdings, daß er Gegenargumente bereit hält, falls sich eine der o.a. Scheinbegründungen in der Klasse durchzusetzen beginnt.

Die zweite Stunde kann man mit einem interessanten Spiel einleiten. Jeder Schüler darf sich ein Fach wählen. Es gewinnen diejenigen, in deren Fach die meisten Kugeln rollen. Dabei wird man jeweils nach den Gründen der Wahl fragen.

Im Verlaufe des Spiels schält sich die Mittenbevorzugung heraus. Mit wachsender Versuchezahl wird sie immer deutlicher. Wie kommt sie zustande ?

Erfahrungsgemäß bieten die Schüler zunächst die Erdanziehung an: Sie zieht die Kugel in die Mitte.

Diese deterministische Begründung kann auf zweifache Weise widerlegt werden:

- durch genaues Studium eines Kugelweges
  Offensichtlich trifft die Kugel jeden Zapfen, bei dem sie ankommt, genau in der Mitte. Dort bevorzugt die Erdanziehung aber keine der beiden "Zapfenflanken" .
- durch eine theoretische Überlegung
  Die Erdanziehung ist immer gleich groß und gleich gerichtet. Also müßten alle Kugeln in die Mitte fallen; das Fallen der Kugeln wäre gar kein Zufallsexperiment.

Normalerweise bleibt das Problem der Mittenbevorzugung in dieser Stunde noch ungelöst.

Zeitbedarf

2 Stunden -

Hinweise:
Der Einstiegscharakter dieser Phase hat zur Folge, daß hier weder auf Schulbücher verwiesen noch eine Aufgabensammlung beigegeben werden kann.

Die nun folgenden Phasen 2 und 3 sind austauschbar. Der Lehrer ist gut beraten, wenn er seine diesbezügliche Entscheidung davon abhängig macht, wie weit die Schüler beim o.a. Andiskutieren des Problems der Mittenbevorzugung brauchbare Lösungsideen entwickeln (falls ja: 3.Phase, falls nein: 2.Phase) oder zumindest von diesem Problem so fasziniert sind, daß sie es nicht verlassen wollen. Bei der Erprobung haben sich beide Wege als gangbar erwiesen.

Möglich ist auch, daß das Problem der Mittenbevorzugung zuerst in einer anderen Situation, etwa bei der Augensumme des Doppelwürfels gelöst wird; dies hätte zur Folge, daß man dann mit der gleichen Strategie das Galton-Brett untersucht, also die 3. Phase in die 2. Phase integriert.

3.3 2.Phase: ANDERE STOCHASTISCHE GERÄTE UND SITUATIONEN

Didaktische Begründung

In dieser Phase soll erreicht werden, daß der Schüler von der Häufigkeit und Aktualität stochastischer Phänomene überzeugt wird. Damit soll er eine erste Antwort erhalten auf seine angesichts des Galton-Brettes womöglich geäußerte Frage, wozu man dies brauche.

Die jeweils auftretenden Ergebnisse und ihre Anzahlen (absoluten Häufigkeiten) sind graphisch festzuhalten, da die enaktive Repräsentation der Häufigkeitsverteilung im Unterschied zum Galton-Brett nicht mehr unmittelbar gegeben ist.

Die unterschiedlichen Verteilungstypen (z.B. Gleichverteilung bei Würfel, Münze und (scheinbar) Geburt; Mittenbevorzugung bei der Augensumme des Doppelwürfels, bei den Noten, bei der wiederholten Messung desselben Objekts; Ungleichverteilung beim Reißnagel, bei den Verkehrsteilnehmern; mehrgipflige Verteilung beim Busverkehr, bei der Energieabnahme) lassen das in der 1. Phase aufgeworfene Problem im größeren Rahmen erscheinen und konturieren es darin umso schärfer: Während die Bevorzugungen bei Massenerscheinungen durchweg erklärbar, ja nicht selten beabsichtigt sind, verstoßen Augensumme beim Doppelwürfel und Kästchennummer beim Galton-Brett offensichtlich gegen die Vorstellung vom "gerechten Zufall". Woran liegt das ?

Die Vielzahl der Situationen, insbesondere der Massenerscheinungen, ermöglicht zudem die notwendige Abkehr vom intuitiven Begriff des Zufalls als "Willkür", als "völlige Regellosigkeit"; dies zugunsten einer Auffassung als subjektives Negat der Sicherheit: Eine Situation (ein Versuch) hat für die Person A einen zufälligen Ausgang, wenn A nicht alle situationsbestimmenden Faktoren und deren Zusammenwirken im konkreten Falle kennt.

Ziele

1. Zufalls- bzw. Massenerscheinungen aus der Umwelt nennen können
2. solche Erscheinungen von deterministischen Erscheinungen unterscheiden können
3. Anzahlen (Häufigkeiten) der einzelnen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes bestimmen können
   (Dazu gehört insbesondere auch das Aufstellen von Strichlisten und Häufigkeitstabellen.)
4. Stabdiagramme (Häufigkeitsdiagramme) aufstellen, lesen und auswerten können
5. durch Versuche feststellen bzw. gegebenen Daten entnehmen können, ob bei Zufalls- bzw. Massenerscheinungen manche Ergebnisse gegenüber anderen bevorzugt sind
6. die Notwendigkeit von Datenklassen bei umfangreichem Datenmaterial erkennen und gegebenenfalls solche Klassen sinnvoll bilden können
7. ein ungenaues bzw. verfälschtes Diagramm kritisieren und verbessern können

Inhalte

Es können etwa behandelt werden

- die möglichen Ergebnisse und deren Häufigkeit
  beim Werfen eines Würfels
  beim Werfen zweier Würfel für die Augensumme
  beim Werfen zweier Würfel für den Augenunterschied
  beim Werfen einer Münze
  beim Drehen eines Roulettes
  beim Werfen eines Reißnagels
  beim Schreiben einer Klassenarbeit
  beim Notieren des Typs eines Fahrzeugs an einer bestimmen Kreuzung
  beim Notieren der Schuhgröße der Schüler einer Klasse
  beim Befragen von Passanten nach ihrem Hobby
  beim Messen der Körperlänge (des Körpergewichts) der Schüler einer Klasse
  beim Messen der Länge des Schulsaales durch jeden Schüler einer Klasse
  (nach geeignetem Zusammenfassen)
- die Intensität des Straßenverkehrs (der Energieabnahme, des Wasserverbrauchs) zu verschiedenen Tageszeiten im Schulort
- die Arbeitslosenzahl (im Schulort, im Bundesland, in der Bundesrepublik)
- das Klimadiagramm eines schulnahen Ortes
- der Absatz der bekanntesten Automarken im letzten Jahr

sowie entsprechende Angaben und Diagramme in den Massenmedien.

Hinweis:
Die Berücksichtigung von Medien und Situationen mit Glücksspielcharakter ist häufig dem Vorwurf ausgesetzt, sie verhindere die Einsicht in die enorme praktische Bedeutung der Stochastik. Dem ist entgegenzuhalten, daß solche Experimente vergleichsweise einfach durchzuführen und leicht zu analysieren sind. Hinzu kommt, daß komplexere und wichtigere stochastische Phänomene durch sie gedeutet und erklärt (simuliert) werden können. Und damit: Daß die o.a. Ausweitung des mitgebrachten Zufallsbegriffs sukzessive geschehen kann.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß Glücksspielexperimente zunächst noch dominieren und erst allmählich (Klassen 8 und 9) zurücktreten. Selbstverständlich müssen aber auch schon in Klasse 7 echte Anwendungen auftreten.

Methoden und Medien

Die Schüler sollten Gelegenheit haben, möglichst viele Zufallsexperimente bzw. Massenphänomene selbst zu nennen bzw. zu finden. Dies gilt vor allem für den Bereich der Glücksspiele und für Häufigkeitsdiagramme in den Massenmedien. Wichtig sind auch eigene Datenerhebungen, etwa im Zusammenhang mit Befragungen. Solche Aktivitäten fördern erfahrungsgemäß die stochastische Sensibilität und erhöhen die Motivation; sie legen zudem die gemeinsame Struktur aller Zufallsexperimente frei.

Der Lehrer wird sich darauf beschränken, Beispiele aus solchen Gebieten beizusteuern, die den Schülern zwar bekannt, aber von ihnen bisher nicht beachtet worden sind.

Eine ausgezeichnete und aktuelle Datenquelle ist das in regelmäßigen Abständen erscheinende Statistische Jahrbuch der Bundesrepublik Deutschland (Stuttgart: Kohlhammer) sowie im Landesbereich der alljährliche Bericht des zuständigen Statistischen Landesamtes. Gute Dienste leisten auch der alljährlich erscheinende Fischer-Weltalmanach (Frankfurt: Fischer) und die Begleitschrift Statistik 77 zum DIERCKE Weltatlas (Braunschweig: Westermann) .

Die o.a. Beispiele sind lediglich als Anstöße zu verstehen. Auch die Anzahl der Beispiele kann nicht vorgegeben werden, sondern hängt von der Intensität ab, mit der die Daten und Diagramme diskutiert und eventuell auch schon auf ihren Nutzen hin befragt werden. Bei einigen Beispielen mag die bloße Anführung genügen; andere lohnen eine intensive Auseinandersetzung.

Es sollte deutlich werden, daß zu einem Zufallsexperiment meist mehrere Möglichkeiten existieren, Art und Anzahl der Ergebnisse festzusetzen, und daß eine diesbezügliche Wahl in erster Linie von den Interessen des Experimentators abhängt. Beim "Mensch-ärgere-dich-nicht"-Spiel etwa interessiert am Anfang die Verteilung " 6 - nicht 6 ", am Ende " hineinkommen - nicht hineinkommen " , zwischendurch " Gegner rauswerfen - nicht rauswerfen " usw.

Der allmähliche Übergang von Zufallserscheinungen (i.e.S.) zu Massenerscheinungen muß so behutsam geschehen, daß der gemeinsame Kern (mehrere mögliche Ergebnisse, deren Eintreten nicht einzeln prognostizierbar ist) zutage tritt.

Während das Nennen und erste Werten einschlägiger Beispiele im Unterrichtsgespräch erfolgen sollte, kann man das Sammeln zugehöriger Daten an einzelne Gruppen vergeben, die zeitlich parallel (bei einigen Experimenten notwendigerweise auch außerhalb der Schule) arbeiten und ihre Resultate nacheinander im Plenum vorstellen, wobei besonderer Wert auf Art und Ausmaß etwaiger Bevorzugungen gelegt wird.

Vor der Gruppenarbeit muß allerdings an mehreren Beispielen das korrekte und übersichtliche Anlegen von Häufigkeitsdiagrammen erarbeitet werden. Die Erprobungen haben gezeigt, daß dafür erhebliche Zeit investiert werden muß, weil diese Fertigkeit in den meisten Fällen entgegen den Lehrplänen weder in der Grundschule noch in den Klassen 5 und 6 angestrebt worden ist. Umso notwendiger ist ihr nachträglicher Erwerb, auch für andere Mathematik-Kapitel und Schulfächer.

Die Notwendigkeit der Klassenbildung ist an einem günstigen Beispiel (etwa: Alter der Schüler) sorgfältig zu begründen: Überall dort, wo fast jede Messung ein anderes Ergebnis hat, wo also fast jedes Ergebnis nur einmal auftritt, hilft das übliche Diagramm nicht weiter. Erst die Zusammenfassung benachbarter Ergebnisse liefert den gewünschten Aufschluß.

Beispiel: In den aus dem Erdkundeunterricht bekannten Klimadiagrammen werden die Niederschlags- und Temperaturdaten auf Monate bezogen, weil die Darstellung in wöchentlichen oder gar in täglichen Abständen weder übersichtlich noch hilfreich wäre.

Die meisten Medien können von den Schülern selbst beschafft bzw. hergestellt werden. Ergänzend sei auf das Labor zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stuttgart: Klett , Best.-Nr. 99 380, 290 DM) und auf den zugehörigen, für die Hand des Schülers gedachten Mini-Wahrscheinlichkeitskasten (Best.-Nr.: 70 999, 19,50 DM) hingewiesen.

Mit neuen Begriffen wird man in dieser Phase noch zurückhalten, um den Weg zu den stochastischen Phänomenen und Grundeinsichten nicht unnötig zu erschweren. Ganz allgemein sollte man einen Begriff dann einführen, wenn er geeignet ist, die Argumentation zu vereinfachen und gleichzeitig zu präzisieren. Der Lehrer mag entscheiden, ob dies bei seiner Klasse jetzt bereits für das "Zufallsexperiment" zutrifft. Die synonymen Begriffe "Anzahl" und "Häufigkeit" können direkt der Umgangssprache entnommen werden und bedürfen daher keiner Reflexion.

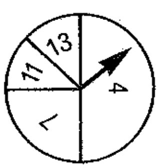
Eingedenk der Tatsache, daß der Verhältnisbegriff zur Erfassung des Wahrscheinlichkeitskonzepts vorausgesetzt werden muß (Phasen 3 und 4), nicht immer aber von der Behandlung klassischer Themen (Prozentrechnung, Schlußrechnung) her bereits vorliegt, haben mehrere Lehrer bei der Erprobung in einigen Fällen neben den "Anzahlen" auch die "Anteile" (relativen Häufigkeiten) der einzelnen Ergebnisse bestimmen lassen. Wir stellen dies anheim. Für das Erreichen der Ziele dieser Phase ist der Anteilbegriff sicher nicht erforderlich. Allerdings muß eingeräumt werden, daß bei zahlreichen Listen und Diagrammen in unseren Medien mit relativen Häufigkeiten (Prozentsätzen) gearbeitet wird.

Typische Aufgaben und Testitems

Aufgaben

Da Aufgaben zu Glücksspielsituationen einfach zu konstruieren bzw. leicht zu finden sind, stellen wir bevorzugt andere Situationen dar.

1. Welche Schulfächer sind in deiner Klasse am beliebtesten ?
2. Dieses Zahlen-Roulette ist 200-mal gedreht worden.



Ergebnis	Anzahl
4	100
7	45
11	20
13	27

Veranschauliche die Liste in einem Stabdiagramm.

3. Verschiedene Familien haben verschieden viele Kinder. Welche Kinderzahlen sind möglich ? Wie kann man herauskriegen, welche Kinderzahlen oft, welche weniger oft auftreten ? Warum ist es nicht richtig, wenn wir nur unsere eigenen Familien betrachten ?
4. Es soll eine Befragung durchgeführt werden, wie beliebt die einzelnen Arten von Fernsehsendungen sind. Was muß man dabei als erstes tun ? Was muß man bei der Befragung selbst beachten ?
5. Wann ist tagsüber der Straßenverkehr am größten ? Warum wohl ?

6. Warum und für wen ist es wichtig, welche Schuhgrößen (Körperlängen) am verbreitetsten sind ?

7. Hier siehst du die Tage, an denen der Bürgermeister im Jahr 1978 betagten Jubilaren seiner Gemeinde einen Präsentkorb überreicht hat.

7.1.	20.3.	27.5.	6.8.	16.10.
25.1.	26.3.	29.5.	10.8.	7.11.
26.1.	31.3.	5.6.	24.8.	18.11.
30.1.	4.4.	9.6.	25.8.	20.11.
1.2.	10.4.	17.6.	2.9.	26.11.
8.2.	10.4.	22.6.	15.9.	3.12.
8.2.	22.4.	22.6.	19.9.	15.12.
21.2.	4.5.	20.7.	22.9.	15.12.
27.2.	15.5.	29.7.	24.9.	21.12
20.3.	24.5.	1.8.	30.9.	28.12.

Wie viele Körbe waren in jedem Monat zu überreichen ? Veranschauliche diese Anzahlen .

8. Veranschauliche folgende Tabelle:

Jahr	Anzahl der Arbeitslosen	Anzahl der offenen Stellen
1960	270 678	465 081
1962	154 523	573 843
1964	169 070	609 187
1966	161 059	539 752
1968	323 480	488 317
1970	148 846	794 817
1972	246 433	545 849
1974	582 481	315 375
1976	1 060 336	234 997
1978	992 927	245 543

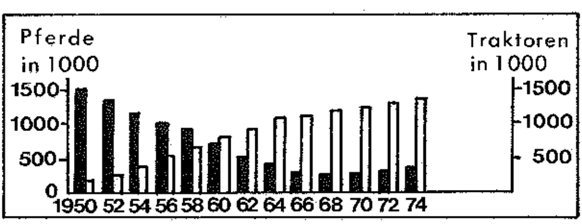
Was fällt dir auf ? Woher bekommt man neuere Zahlen ?

9. Die 30 Schüler einer Klasse haben folgende Körperlängen:

1,37	1,74	1,28	1,43	1,57	1,64
1,55	1,24	1,33	1,43	1,71	1,53
1,68	1,47	1,75	1,83	1,46	1,58
1,25	1,37	1,49	1,60	1,72	1,58
1,66	1,70	1,39	1,44	1,65	1,51

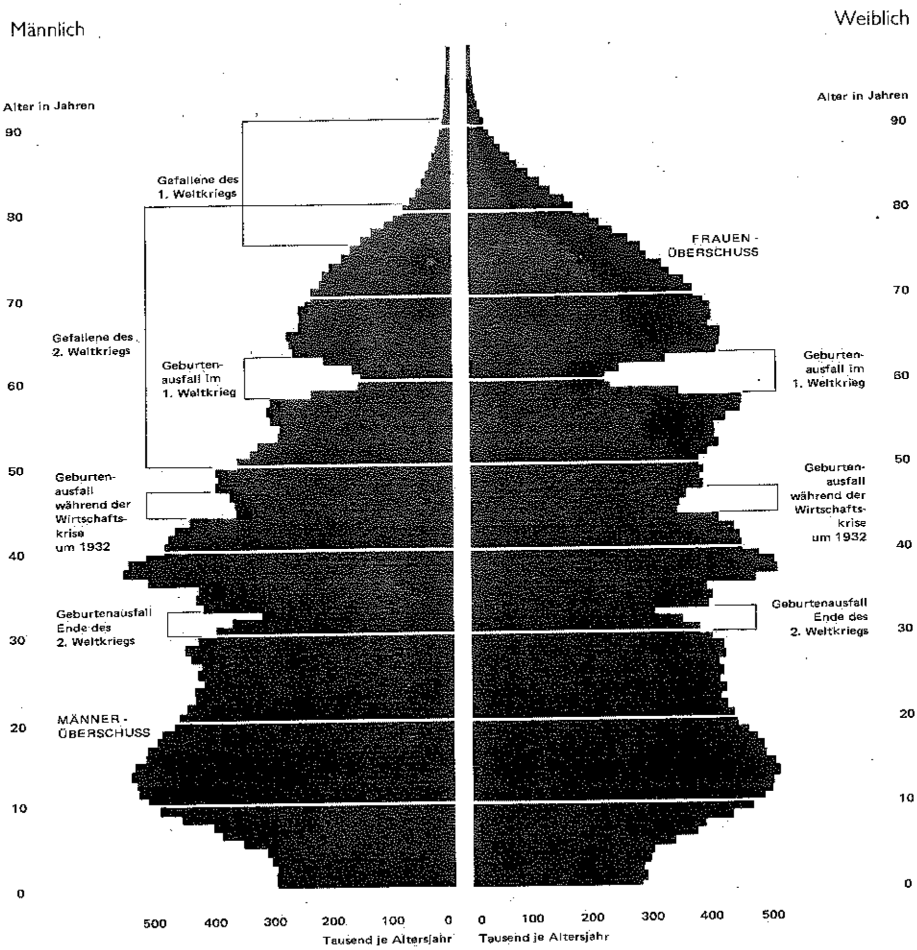
Fasse diese Zahlen geeignet in Klassen zusammen und veranschauliche ihre Häufigkeit.

10. Erläutere folgende Darstellung. Was sagt sie aus ?



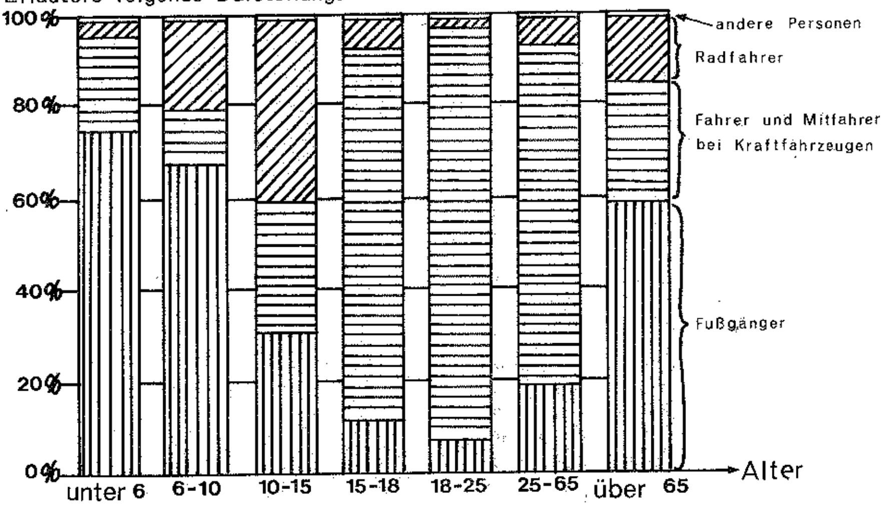
11. Erläutere den Altersaufbau der Wohnbevölkerung in der Bundesrepublik Deutschland (1977). Was fällt dir besonders auf ?

Altersaufbau der Wohnbevölkerung am 31. 12. 1977



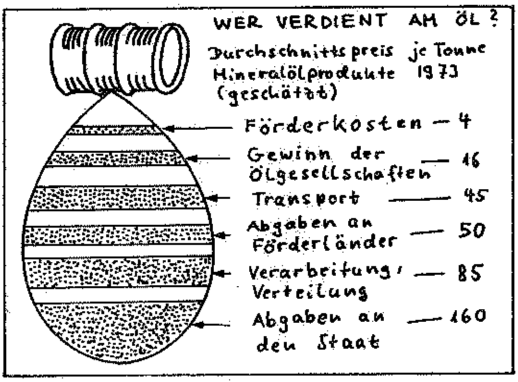
Statistisches Bundesamt 79 0242

12. Erläutere folgende Darstellung.

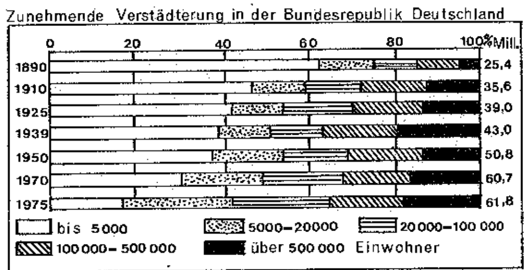


Tote bei Straßenverkehrsunfällen nach Alter und Verkehrsbeteiligung (1972)

13. Kritisiere und verbessere diese Darstellung.



14. Was ist in dieser Darstellung nicht berücksichtigt worden ? Verbessere sie.

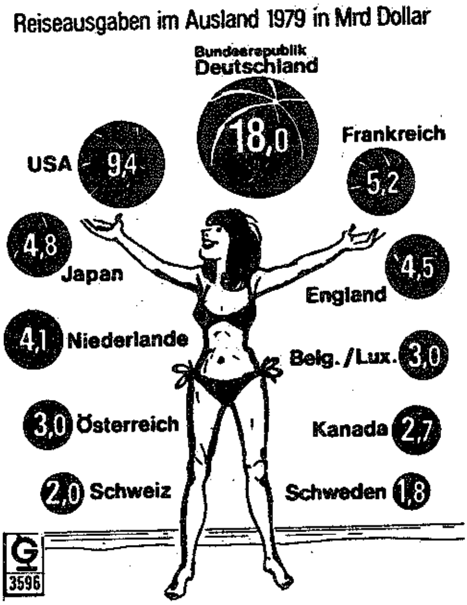


15. Wirf 100-mal eine Streichholzschachtel in die Luft und stelle jedesmal fest, auf welche der drei verschieden großen Flächen sie fällt. Wird eine der Flächen bevorzugt (benachteiligt) oder nicht ?

16. Wirf vier Münzen und stelle bei jedem Wurf fest, wie oft Wappen kommt. Welche Ergebnisse sind möglich ? Welche kommen öfters vor als andere ?

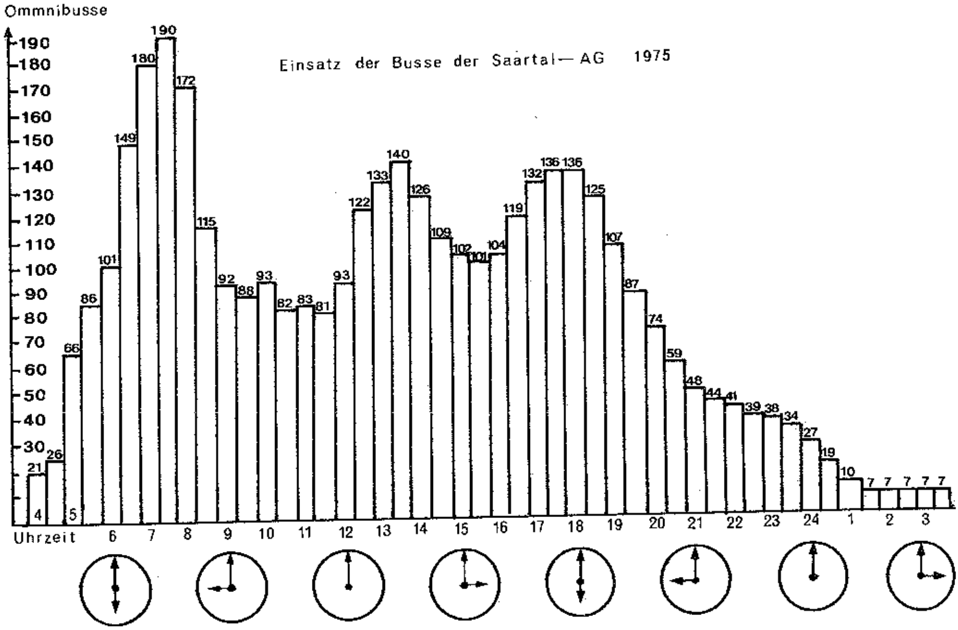
7. Erläutere folgende Darstellung. Findest du sie gut ?
Wenn ja, warum ? Wenn nein, zeichne eine bessere Darstellung.

Deutsche sind Reise-Weltmeister



Trotz steigender Heiz- und Benzinkosten – das Reisen lassen sich die Bundesbürger nicht verleiden. Im Gegenteil: Dank allgemein gut gefüllter Haushaltskassen, die in den letzten Jahren immer mehr Spielraum für Freizeit und Urlaub gelassen haben, ist das Reisefieber sogar noch gestiegen. 1979 gaben deutsche Touristen im Ausland rund 18 Milliarden Dollar aus, gut ein Viertel mehr als im Jahr zuvor. Damit sind die Bundesbürger das reiselustigste Volk der westlichen Welt. Sie rangieren weit vor den Amerikanern, die es lediglich auf 9,4 Milliarden Dollar gebracht haben.

18. Warum sind in Saarbrücken nicht immer gleich viele Busse eingesetzt ?



Testitems

1. Welche der folgenden Vorgänge sind vom Zufall bestimmt ?

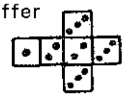
   [+] Morgen regnet es bei uns.

   [f] Morgen ist eine Sonnenfinsternis.

   [?] Morgen werde ich meinem Großvater begegnen.

2. Bei welchen der folgenden Zufallsexperimente sind manche Ergebnisse gegenüber anderen bevorzugt ?

   [f] Raten einer verdeckt aufgeschriebenen Ziffer

   [+] Werfen eines Würfels mit diesem Netz: 

   [f] willkürliches Herausgreifen eines Buchstabens aus einem Text (etwa mit einer Stecknadel)

3. Bei welchen der folgenden Zufallsexperimente ist es sinnvoll und vorteilhaft, die Daten zu Klassen zusammenzufassen ?

   [+] Körpergewicht jedes Schülers eines Jahrgangs

   [f] Lieblingsschlagersänger jedes Schülers eines Jahrgangs

   [f] Mathematiknote jedes Schülers eines Jahrgangs

Zeitbedarf

etwa 6–8 Stunden

Schulbücher

B 5, S.114 – 116 – Stuttgart: Klett

Die Welt der Zahl – Neu 6, S.86 – 96 – Hannover: Schroedel

Einführung in die Mathematik (Bigalke) 5, S.16 – 19 – Frankfurt: Diesterweg

GAMMA (Hauptschule) 6 , S.90 – 95 – Stuttgart: Klett

Mathematik (Kahle;Lörcher) 5, S.183 – 188 – Braunschweig: Westermann

Mathematik (Hahn;Dzewas) 6, S.175 – 185 – Braunschweig: Westermann

Mathematik in der Sekundarstufe B 7, S.119 – 124 – Düsseldorf: Schulbuchverlag Vieweg

PLUS 5, S.108 – 111, 7, S.60 – 63 – Paderborn: Schöningh

Treffpunkt Mathematik 5, S.9 – 14 – Freiburg: Herder

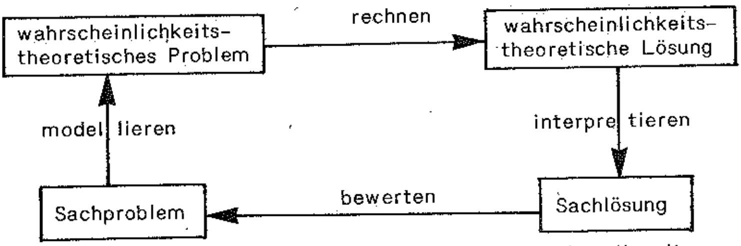
3.4 3. Phase: LÖSUNG DES AUFGEWORFENEN PROBLEMS AM GALTON-BRETT

Didaktische Begründung

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff soll im denkbar einfachsten Falle (Verteilung $\frac{1}{2}$ – $\frac{1}{2}$) naiv, d.h. ohne explizite Definition eingeführt und sofort im Problemkontext (multiplikatives und additives Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten) eingeübt und vertieft werden. Im Vergleich mit den statistisch ermittelten relativen Häufigkeiten (Antei-

n) wird sowohl sein theoretischer Charakter als auch der damit verbundene Nutzen veniger Mühe, geringerer Zeitaufwand) deutlich. Ein scheinbar schwieriges Problem lie Mittenbevorzugung) kann durch Einführung eines quantitativen Begriffs präzise efaßt und durch seine fortgesetzte Benutzung vollständig gelöst werden. Somit ist ese Phase exemplarisch für das Bewältigen von Situationen durch Mathematisierung.

e erlaubt – nach der Erweiterung des Problemkreises in der 2.Phase – eine Vertieung der Argumentation; insbesondere macht sie erstmals auf den "stochastischen egelkreis" aufmerksam, ohne daß dieser (jetzt schon) thematisiert werden müßte.



llerdings werden sofort auch – und dies darf als weiterer Vorteil gelten – die Grenen dieser Mathematisierung deutlich: Sie bringt keine sichere Aussage über das ächste Ergebnis, sondern lediglich eine Prognose "en gros" .

iele

. mit Wahrscheinlichkeiten ausdrücken können, was an einem Zapfen des Galton-Brettes geschieht

. die Wahrscheinlichkeit bestimmen können, mit der eine Kugel in ein bestimmtes Kästchen fällt

. erläutern können, warum die mittleren Kästchen bevorzugt werden

. das Zufallsexperiment mit Münzen simulieren können

. das Zufallsexperiment am zugehörigen Wahrscheinlichkeitsabakus nachspielen können

. die errechneten Wahrscheinlichkeiten statistisch überprüfen können

. den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten (Anteilen) und Wahrscheinlichkeiten erläutern können

Hinweis:
Spätestens hier muß also der Anteilbegriff eingesetzt, der Name "Anteil" benutzt werden. Die Bezeichnung "relative Häufigkeit" sollte man vermeiden.

nhalte

)ie Lösung des aufgeworfenen Problems erfolgt durch seine Reduktion auf den einachsten Fall (Fig.2). Am ersten Zapfen fällt etwa die Hälfte aller Kugeln ins erste ınd die andere Hälfte ins zweite Kästchen.

)iese Erkenntnis sollte durch Symmetriebetrachtungen, durch Analogie (etwa zur Münze) und statistisch (viele Versuche) gewonnen werden. Das übereinstimmende Resultat entspricht noch den Erwartungen der Schüler: kein Kästchen wird bevorzugt.

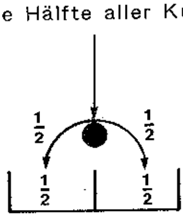


Fig.2

Statt zu sagen: "Die Hälfte aller Kugeln fällt ins erste (zweite) Kästchen." formulieren wir nun: "Die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel ins erste (zweite) Kästchen fällt, ist $\frac{1}{2}$."

Nun wird die nächste Reihe betrachtet (Fig.3). Sie hat zwei Zapfen, an denen das gleiche geschieht wie am ersten Zapfen: Die Kugeln kommen lotrecht an und verteilen sich gleichmäßig nach links und rechts. Sowohl ins erste als auch ins letzte Kästchen kommt damit die Hälfte der Hälfte aller Kugeln, kurz: ein Viertel. Also muß die Hälfte aller Kugeln ins mittlere Kästchen gelangen.

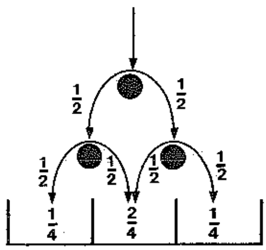


Fig.3

Hier wird erstmals die Mitte bevorzugt und man erkennt sofort auch den Grund: Ins mittlere Kästchen führen im Unterschied zu den äußeren Kästchen 2 Wege. Da jeder der 4 Wege mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gegangen wird, bedeutet "doppelte Wegezahl" auch "doppelte Wahrscheinlichkeit".

In gleicher Weise werden nun die Wahrscheinlichkeiten für die nächsten Reihen (etwa bis zur sechsten Reihe) errechnet (Fig.4) und jedesmal als voraussichtliche Anteile interpretiert.

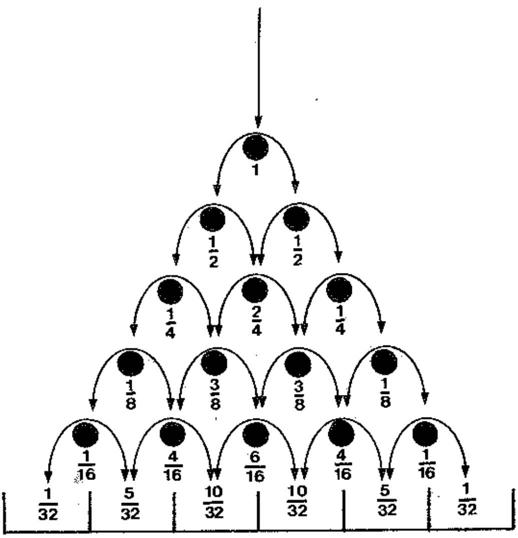


Fig.4

Als Kontrolle kann dabei dienen, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten (Anteile) in derselben Reihe den Wert 1 (Gesamtanteil) haben muß. Falls dies die Schüler jetzt schon wünschen, mag auch jeweils eine statistische Kontrolle erfolgen (s.u.).

Zwischen den errechneten Wahrscheinlichkeiten bestehen zahlreiche weitere Zusammenhänge. So verdoppelt sich die Nenner von Zeile zu Zeile (weil sich die Anzahl der Wege jeweils verdoppelt) und erweist sich jeder Zähler als die Summe der Zähler der schräg darüberstehenden (ungekürzten) Wahrscheinlichkeiten (weil die Anzahl der Wege zu einem Zapfen gleich der Summe der Wegzahlen zu den beiden schräg darüber angebrachten Zapfen ist; denn bei ihrem Lauf zu diesem Zapfen muß die Kugel an den beiden genannten Zapfen vorbei).

Die erhaltenen Resultate werden mit dem Wahrscheinlichkeitsabakus nachgespielt und abgesichert; d.h. es werden Paare ideal gedachter Kugeln (Plättchen) in Fig.4 solange obeneingegeben und gemäß den (statistisch interpretierten, indessen auf geringe Anzahlen bezogenen) Wahrscheinlichkeiten hinuntergespielt, bis alle Kugeln die letzte Zeile erreicht haben.

eispiel:

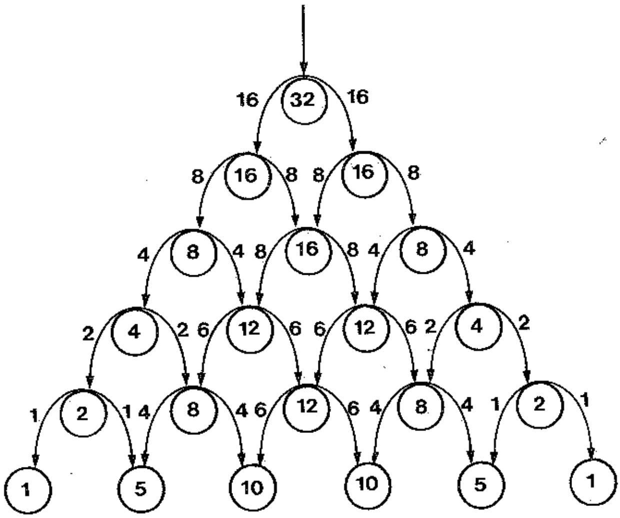


Fig.5

Jnten kommt also $\frac{1}{32}$ der eingegebenen Plättchen ins erste Kästchen, kommen $\frac{5}{32}$ ns zweite Kästchen, usw.

)ieser Wahrscheinlichkeitsabakus kann bald auch ohne Plättchen, also mit Zahlen wie n Fig.5 gespielt werden und ist eine wichtige Vorstufe (und enaktive Repräsenta- ion) zu der in der nächsten Phase auftretenden Pfad regel. Deshalb sollte man ihn in lieser Phase auch dann benutzen, wenn er zum Verständnis der Wahrscheinlichkeiten ım Galton-Brett nicht unbedingt erforderlich ist.

ìibt man nun etwa 32 tatsächliche Kugeln in ein tatsächliches Galton-Brett, so ist leren Verhalten "enttäuschend" . Sie besetzen die Kästchen zwar nicht völlig anders ıls berechnet, aber eben doch anders. Im Rückgriff auf den ersten Zapfen wird leutlich, daß die dortige Aussage ($\frac{1}{2}$;$\frac{1}{2}$) nur gilt, falls viele Kugeln kommen. Da glei- :hes auch für die Zapfen in der letzten Reihe gilt, müssen oben sehr viele Kugeln ›ingegeben werden.

Schätzung: Genügen zur Herstellung der Gleichverteilung an einem Zapfen etwa 30 Kugeln, so müssen angesichts des 1.Zapfens in der 5.Reihe bereits $30 \cdot 2^4$ = 480 Ku- ;eln oben eingegeben werden.)

Man wirft nun vor der Klasse genügend viele Kugeln in das Galton-Brett ein und 'ergleicht nach 50, 100, 150, 200, 250, ... Versuchen. Es ergibt sich eine deutliche ıllmähliche Angleichung der erhaltenen Anteile an die errechneten Wahrscheinlich- ‹eiten.

)as Problem der Mittenbevorzugung ist damit gelöst. Die Lösung erfolgte durch die ›ingeführten und die daraus sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten; die Ökonomie des Arbeitens mit diesen Wahrscheinlichkeiten wird im Zusammenhang mit der statisti- ;chen Kontrolle besonders deutlich. Nach Aufstellen der Primärwahrscheinlichkeiten (und d.h. nach Bestimmen eines geeigneten Modells) sind solche zeitraubenden Groß- ›xperimente vermeidbar: Sekundärwahrscheinlichkeiten sind (wie auch schon die Pri- närwahrscheinlichkeiten) Näherungswerte für die bei solchen Experimenten sich all- nählich einstellenden relativen Häufigkeiten.

)ies kann beispielhaft auch noch an einem schiefgestellten Galton-Brett gezeigt wer- den, bei dem an jedem Zapfen die Trennwahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$ bestehen (Fig. 6).

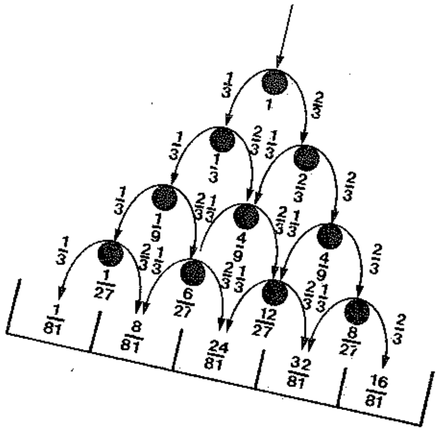


Fig.6

Beim Auftreten von Schwierigkeiten hilft wiederum der Abakus (Fig.7).

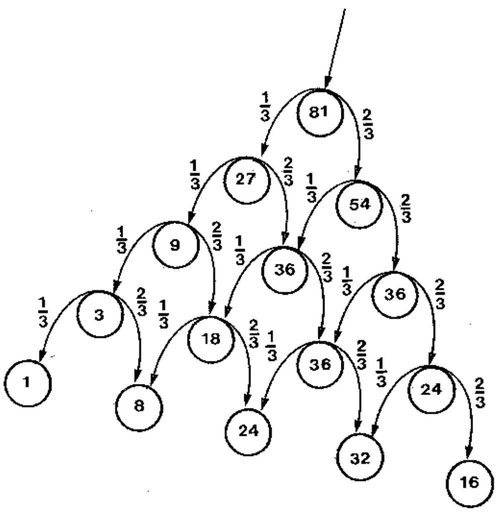


Fig.7

Methoden und Medien

Die Erarbeitung der Vorgänge am 1.Zapfen und die naive Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgt zweckmäßig im vom Lehrer geleiteten Unterrichtsgespräch. Auch die Wahrscheinlichkeiten hinter der 2.Zapfenreihe werden noch gemeinsam gewonnen und gedeutet. Dann aber können die Schüler von Zeile zu Zeile selbständiger "operieren", da die Strategien dieselben bleiben.

In der Tat ist das Multiplizieren von Wahrscheinlichkeiten entlang des Weges einer Kugel nichts anderes als das Verketten von Bruchoperatoren $\frac{1}{2}$; und die Wegepfeile sind ohne weiteres als Operatorpfeile interpretierbar. Auch das Addieren von Wahrscheinlichkeiten bei Wegebündelung macht vom Bilde her keine Schwierigkeiten.

Es erweist sich als günstig, wenn jeder Schüler die angestellten Überlegungen und Rechnungen am eigenen Wahrscheinlichkeitsabakus re-enaktivieren und damit abstützen kann. Der Lehrer sollte daher veranlassen, zuhause ein möglichst großes Exemplar des Abakus anzufertigen und mitzubringen.

Bald genügen hierfür bloße Zeichnungen von der Art der Fig.5 . Zur Einsicht in die allmähliche Annäherung der Anteile an die errechneten Wahrscheinlichkeiten verhilft folgende Zusammenstellung:

	Kästchennummer					
	1	2	3	4	5	6
Wahrschein-lichkeit	$\frac{1}{32} \approx 0{,}03$	$\frac{5}{32} \approx 0{,}16$	$\frac{10}{32} \approx 0{,}31$	$\frac{10}{32} \approx 0{,}31$	$\frac{5}{32} \approx 0{,}16$	$\frac{1}{32} \approx 0{,}03$
Anteil (nach 50 Kugeln)	$\frac{3}{50} = 0{,}06$	$\frac{6}{50} = 0{,}12$	$\frac{16}{50} = 0{,}32$	$\frac{19}{50} = 0{,}38$	$\frac{4}{50} = 0{,}08$	$\frac{2}{50} = 0{,}04$
Anteil (nach 100 Kugeln)	$\frac{4}{100} = 0{,}04$	...				
⋮						

Die zum Vergleich erforderliche Umwandlung aller Brüche in Dezimalbrüche macht den Schülern erfahrungsgemäß erhebliche Schwierigkeiten. Hier bedarf es anfänglich stärkerer Lenkung des Lehrers; dabei leistet ein Taschenrechner gute Dienste.

Falls nicht jede Gruppe genügend viele Versuche machen kann bzw. soll, wird man Versuche aus verschiedenen Gruppen zusammenlegen; man muß dann jedoch auf die Zulässigkeit dieser Maßnahme (Unabhängigkeit der Versuche) eingehen.

Auch Schüler ohne Galton-Brett können sich am Sammeln von Daten beteiligen. Sie brauchen die Zapfen lediglich zu simulieren, etwa durch eine Münze, bei der Wappen "nach links" und Zahl "nach rechts" bedeutet (oder umgekehrt). Schüttelt man 5 Münzen in der hohlen Doppelhand und formt daraus einen Turm, so entspricht seinen 5 Schichten ein Weg durch das Galton-Brett und man kann notieren:

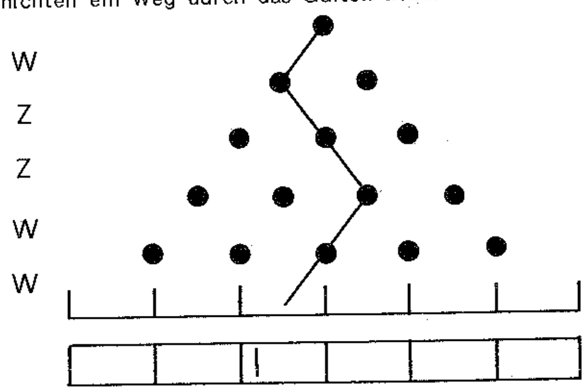


Fig.8

Auch fünfmaliges Werfen eines Würfels mit "gerade Zahl = links" und "ungerade Zahl = rechts" (oder umgekehrt) ist möglich, allerdings umständlicher.

Man sollte diese Methode nicht als Notbehelf auffassen; das Simulieren stochastischer Situationen durch andere (und später das Simulieren deterministischer durch stochastische Situationen) ist ein zentrales stochastisches Verfahren.

Hinweis:
Wege, die ins gleiche Kästchen führen, unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der W und Z (bzw. "gerade" und "ungerade"), nicht jedoch in deren Anzahl. Es genügt also, die Münzen nach dem Schütteln auf den Tisch zu legen und zu zählen: Liegt n-mal Z oben, so fällt die Kugel in das (n+1)-te Kästchen.

Typische Aufgaben und Testitems

Aufgaben

1. Was geschieht an einem Zapfen des Galton-Brettes ?
2. Weshalb werden beim Galton-Brett die mittleren Kästchen bevorzugt ?
3. Wie viele Wege gibt es in das ...te Kästchen unter der ...ten Zapfenreihe ? Wie viele Wege gibt es überhaupt bis zu dieser Kästchenreihe ?
4. Was passiert mit ... Plättchen, die man in das gezeichnete Galton-Brett oben eingibt ?
5. Warum verhalten sich tatsächliche Kugeln meist anders als die Plättchen ? Ganz anders ?
6. Wie kann man mit einigen Münzen den Lauf der Kugel über das Galton-Brett nachspielen ? Geht das auch mit einem Würfel ?
7. Erläutere, was man meint, wenn man sagt: "Die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel in das dritte Kästchen unter der fünften Zapfenreihe fällt, ist $\frac{10}{32}$."
8. Was passiert, wenn man in ein Galton-Brett immer mehr Kugeln eingibt ?
9. Ein Galton-Brett ist so gebaut, daß bei jedem Zapfen die ankommende Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ nach links und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ nach rechts geht . Untersuche dieses Galton-Brett in gleicher Weise wie das übliche Gerät.
10. Petra, Thomas und Jürgen spielen "Werfen dreier Münzen". Jürgen gibt die Spielregeln bekannt:
    Petra gewinnt, wenn dreimal oder keinmal Wappen oben liegt.
    Thomas gewinnt, wenn zweimal Wappen oben liegt.
    Jürgen gewinnt, wenn einmal Wappen oben liegt.
    Nach einigem Überlegen sagt Petra, dieses Spiel sei unfair, und sie spiele deshalb nicht mit.
    Was meinst du dazu ?

    Anleitung:
    Stelle dir die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse am Galton-Brett vor.
11. Ein Fußballverein kämpft gegen den Abstieg. Es stehen noch vier Spiele aus, bei denen der Gegner jedoch stets als gleichstark einzuschätzen ist. Um dem Abstieg zu entrinnen, muß der Verein mindestens 3 der 4 Spiele gewinnen.
    Wie groß ist dafür die Wahrscheinlichkeit ?

    Anleitung:
    Überlege am Galton-Brett .

Hinweis:
Die letzten beiden Aufgaben sind erste Versuche, das Galton-Brett zur Simulation mehrstufiger Versuche zu benutzen. Sie können ungünstigenfalls bis zur 4.Phase zurückgestellt werden.

Testitems

1. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Galton-Brett die Kugel in das

   [r] zweite Kästchen unter der zweiten Zapfenreihe fällt, ist $\frac{1}{2}$.

   [f] zweite Kästchen unter der dritten Zapfenreihe fällt, ist $\frac{1}{4}$.

   [f] zweite Kästchen unter der vierten Zapfenreihe fällt, ist $\frac{1}{8}$.

2. Die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen dreier Münzen

   [f] dreimal Wappen kommt, ist $\frac{1}{3}$.

   [f] zweimal Wappen kommt, ist $\frac{2}{3}$.

   [f] einmal Wappen kommt, ist $\frac{1}{2}$.

Zeitbedarf

4-6 Stunden je nach der Intensität, mit der die Operatordenkweise vorliegt sowie der sachgerechte Umgang mit Bruch- und Dezimalzahlen (vor allem das wechselseitige Umwandeln) gesichert ist

Schulbücher

Die Welt der Zahl - Neu 9, S.50 - Hannover: Schroedel

PLUS 7, S.80 - 81 - Paderborn: Schöningh

Hinweis:
Wir empfehlen, nach diesen drei Phasen eine Pause im stochastischen Lehrgang einzulegen, die vierte und letzte Phase also erst später (frühestens in einem Monat) zu behandeln. Die Erprobungen haben ergeben, daß der motivierende Novitätseffekt stochastischer Inhalte bei kontinuierlicher Durchnahme aller vier Phasen in der letzten Phase spürbar nachläßt; und daß diese Ermüdungserscheinungen nicht zufällig gerade dann einsetzen, wenn die Anforderungen im Zuge der Analyse und Anwendung mehrstufiger Experimente ansteigen.

Ein traditionelles Intermezzo hingegen bringt einen zweifachen belebenden Wechsel der Sichtweisen und führt daher zu einer größeren Bereitschaft der Schüler zum Umgang mit komplexeren stochastischen Situationen.

3.5 4. Phase: BESTIMMEN VON WAHRSCHEINLICHKEITEN BEI EINFACHEN ZUFALLSEXPERIMENTEN

Didaktische Begründung

In dieser Phase sollen die am Galton-Brett erworbenen Einsichten, insbesondere das Wahrscheinlichkeitskonzept, auf andere Zufallsexperimente ausgeweitet und dadurch gefestigt, vertieft und begrifflich fixiert werden. Hierbei werden erste Typisierungen (Gleich- und Ungleichverteilungen, ein- und mehrstufige Experimente) und wichtige Anwendungssituationen erschlossen.

Das Problem der Mittenbevorzugung kann für mehrere Zufallsexperimente durch das Zusammenfassen ursprünglicher zu neuen Ergebnissen geklärt und dadurch zu einem gewissen Abschluß geführt werden, ohne daß der Ereignisbegriff oder gar der bekanntermaßen schwierige Begriff der Zufallsvariablen thematisiert werden müßte (s. Leitprinzip 4 , S.20).

Ziele

1. die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis bei einem einfachen, einstufigen Zufallsexperiment bestimmen können
   1.1 durch Symmetriebetrachtungen (klassisch)
   1.2 durch Erheben geeignet vieler Daten (statistisch)
2. erläutern können, was man unter einem Zufallsexperiment, einem Versuch, einem Ergebnis und seiner Wahrscheinlichkeit versteht
3. erläutern können, was man unter einem Zufallsexperiment mit Gleichverteilung versteht, und entsprechende Beispiele nennen können
4. die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis bei einem einfachen mehrstufigen Zufallsexperiment bestimmen können
5. die Wahrscheinlichkeit für ein "zusammengesetztes" Ergebnis bei einem einfachen mehrstufigen Zufallsexperiment bestimmen können
6. die erworbenen Kenntnisse und Methoden in einfachen Umweltsituationen anwenden können

Hinweise:
Diese Ziele weisen einen von 1 bis 6 ansteigenden Komplexitätsgrad auf. Insbesondere die letzten drei Ziele haben im Unterricht zahlreicher Klassen erhebliche Schwierigkeiten bereitet.

Dennoch sollte man auf mehrstufige Experimente nicht verzichten, da mit ihnen eine wichtige und nichttriviale Klasse von Situationen abgedeckt wird; bei ihrer Eliminierung würde das Erreichen des Fundamentalziels (s. S.20) ernsthaft gefährdet.

Bei Vorliegen ungünstiger Verhältnisse bzw. bei Zeitdruck empfehlen wir allerdings den Verzicht auf Ziel 5 und eine entsprechende Reduzierung des Zieles 6.

Inhalte

Zu 1.:
Die in der 3.Phase gewonnenen Einsichten werden (gegebenenfalls nach kurzer Wiederholung) auf die einstufigen Experimente der 2.Phase (etwa: Würfel, Münze, Reißnagel, Geburt, Kinderzahl, Blutgruppe) angewandt und sodann auf neue Experimente (z.B. Urne mit Bällen, Ziffernscheibe, Würfel anderer Form und Seitenzahl, Kartenspiel, Lottozahlen (noch nicht: Lottozahlenreihe), Anzahl der Erbsen in einer Hülse, Lebensalter) ausgedehnt.

Unabhängig von der Art der Wahrscheinlichkeitsbestimmung (klassisch oder statistisch) sollten erhaltene (und später auch: errechnete) Wahrscheinlichkeiten stets auch frequentistisch interpretiert werden: als zu erwartende relative Häufigkeiten nach vielen Versuchen.

Zu 4.:
Auch hier setzt man bei den einschlägigen Beispielen der 2.Phase ein und führt sie fort (Werfen zweier bzw. dreier Münzen, Drehen zweier oder mehrerer Ziffernscheiben, Ziehen von Bällen aus der gleichen Urne mit und ohne Zurücklegen oder aus verschiedenen Urnen). In diesem Zusammenhang wird nun auch das Galton-Brett als mehrstufiges Experiment gedeutet.

Das Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten geschieht zunächst noch über den Wahrscheinlichkeitsabakus am jeweiligen Baumdiagramm, bald aber durch Benutzen der induktiv gewonnenen und statistisch nachvollzogenen

Pfadregel: Entlang eines Pfades im Baumdiagramm kann man die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren.

Zu 5.:
Ein drittes Mal erfolgt der Einstieg bei den Materialien und Daten der 2.Phase (Augensumme, Augenunterschied beim Werfen zweier Würfel), bezieht aber sofort

wieder das Galton-Brett ein (Betrachtung der Kästchen statt der Wege). Es muß deutlich werden, daß man nun die ursprünglichen Ergebnisse zu neuen Ergebnissen zusammenfaßt und dabei die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten addiert. Diese Erkenntnis ist in neuen, zunächst innermathematischen Situationen anzuwenden (etwa: Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Sechsen beim Werfen zweier (dreier) Würfel, der Wappen beim Werfen zweier (dreier) Münzen, der Einsen beim Drehen zweier Ziffernscheiben (mit Sektor 1)).

Zu 6.:
Hierzu gehört etwa das Kalkulieren von Chancen bei einfachen Glücksspielen, der Trefferwahrscheinlichkeit bei gleichzeitigem oder mehrfachem Schießen, das (idealisierte) Voraussagen des Wetters, das Ziehen von Stichproben insbesondere bei Massenproduktionen, die Verbreitung von Gerüchten oder von Krankheiten.

Methoden und Medien

Da die Münze in der 3.Phase als Simulator benutzt wurde, empfiehlt sie sich als Einstiegsmedium. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wappen	Zahl
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

liegt sowohl von den erhobenen statistischen Daten (2.Phase) als auch von der symmetrischen Form der Münze her nahe und sollte daher auch mit beiden Argumenten begründet werden. Der Übergang von der Münze zum Würfel geschieht dann recht zwanglos: An die Stelle von 2 gleichwahrscheinlichen treten mit gleicher Begründung 6 gleichwahrscheinliche Ergebnisse und man gelangt zu der Verteilung:

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Um den Begriff der Gleichverteilung zu fassen, braucht man Gegenbeispiele. Hierzu empfehlen sich (neben dem Galton-Brett) Ziffernrad- und Urnenexperimente, z.B.

Ziffernrad

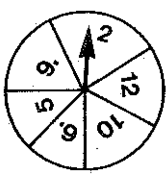


Fig.9

Wahrscheinlichkeitsverteilung

2	5	6	9	10	12
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Urne

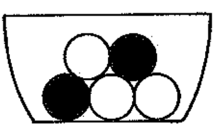


Fig.10

Wahrscheinlichkeitsverteilung

schwarze Kugel	weiße Kugel
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

weil die dortigen Ungleichverteilungen immer noch aus Symmetrien herleitbar sind (z.B. gleiche Wahrscheinlichkeit für gleichgroße Sektoren bzw. für jede Kugel). Ausserdem haben diese beiden Medien den weiteren Vorzug der beliebigen Variierbarkeit durch die Schüler.

Wir stellen es dem Lehrer anheim, ob er seine Schüler explizit lernen läßt, daß bei einem Zufallsexperiment mit Gleichverteilung gilt:

$$\text{Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses} = \frac{1}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Als Vorbereitung auf Ziel 5 empfiehlt sich auch das Konstruieren neuer Verteilungen aus alten, z.B. beim Würfel

6	keine 6
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

4	Zahl über 4	Zahl unter 4
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

oder beim obigen Ziffernrad

einziffrige Zahl	mehrziffrige Zahl
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

gerade Zahl	ungerade Zahl
$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{24}$

Hier wird wiederum der Blick auf die Tatsache gelenkt, daß Ergebnisse nicht vorgegeben sind, sondern jeweils festgesetzt werden. Und es wird deutlich, daß sich beim Zusammenfassen alter zu neuen Ergebnissen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten addieren.

Mit dem nun vorliegenden Material können die Ziele 2 und 3 angestrebt werden; Ziel 2 durch Hervorheben des allen Medien Gemeinsamen und Ziel 3 durch Abheben von Würfel (mit den ursprünglichen 6 Ergebnissen) und Münze gegenüber Ziffernrad und Urne (in der o.a. Ausgestaltung; selbstverständlich kann man auch Ziffernräder und Urnen mit Gleichverteilung herstellen, sollte es sogar tun).

Liefert das Galton-Brett Gleichverteilung oder Ungleichverteilung ? Betrachtet man die Kästchen als Ergebnisse, so liegt bekanntlich keine Gleichverteilung vor; wohl aber, wenn man die Wege als Ergebnisse auffaßt.

Kam man bisher mit Symmetriebetrachtungen aus, so helfen diese beim Reißnagelexperiment nicht mehr weiter. Die durchgeführten Versuche weisen zwar eine Ungleichverteilung aus (Vorsicht: Es gibt Ausnahmen !), doch liefern sie keine unmittelbare Information über die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Ergebnisse

 und  . In diesem Falle müssen so viele Versuche gemacht werden, bis sich die Anteile (relativen Häufigkeiten) nicht mehr wesentlich ändern (sich stabilisieren). Die schließlich erreichten Anteile werden dann zu Wahrscheinlichkeiten erklärt.

"Wesentlich" und "schließlich" können auf dieser Stufe nicht mehr präzisiert werden, sondern ergeben sich aus der Argumentation der Schüler.

Ein zweites ausgezeichnetes Beispiel für ein solches Vorgehen ist die Korrektur der Gleichverteilung des Geschlechts bei der Geburt durch den empirischen Befund

weiblich	männlich
0,49	0,51

,

ohne daß dieser bisher überzeugend hätte begründet werden können.

An den in der 2.Phase erarbeiteten Massenerscheinungen (etwa: Verkehrsteilnehmer, Schuhgröße, Blutgruppe) sollte erarbeitet werden, daß dieses Aufgreifen von relativen Häufigkeiten in der statistischen Praxis gang und gäbe ist. -

Wegen der o.a. Probleme wird nun die folgende Unterrichtseinheit über mehrstufige Zufallsexperimente recht ausführlich beschrieben und kommentiert.

Eine der Ursachen der Verständnisschwierigkeiten ist die mangelnde Vertrautheit mit dem Baumdiagramm und - damit zusammenhängend - mit dem Bruch als Operator. Fertigkeiten dieser Art stehen also meist nicht als Hilfen zur Verfügung, sondern müssen mitentwickelt werden.

Der Einstieg sollte deshalb möglichst einfach gehalten sein; etwa:

Eine Münze wird zweimal geworfen (bzw.: Zwei unterscheidbare Münzen werden geworfen.) Welche Ergebnisse sind möglich und welche Wahrscheinlichkeiten haben sie ?

Ergebnisse (Fig.11): WW, WZ, ZW, ZZ

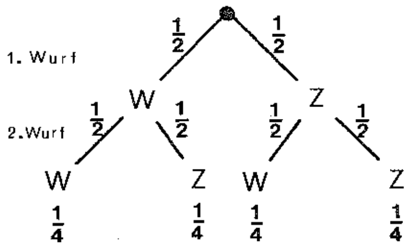


Fig.11

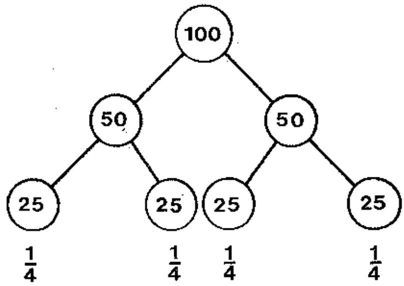


Fig.12

Jedes dieser Ergebnisse hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Man erkennt dies auch durch das (tatsächliche oder nur zeichnerisch festgehaltene) "Hinunterspielen" einer geeigneten Anzahl von Plättchen am Baumdiagramm (Fig.12).

Baumdiagramm und Plättchendiagramm müssen (trotz Phase 3) beim ersten Beispiel vielleicht noch vom Lehrer eingebracht, sollten dann aber ständig vom Schüler benutzt und ausgebaut werden, wobei dieser allmählich auch einen Blick erwirbt für geeignete Anfangszahlen und die enaktive Ebene bald nicht mehr benötigt.

Eine Steigerung der Schwierigkeit kann nun erfolgen

- durch Abändern der Stufenwahrscheinlichkeiten (statt $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ etwa $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$; $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$; 0,4 - 0,6)
  Experimente: Farben- bzw. Ziffernräder, Urnen mit Bällen
- durch Vermehren der Stufenergebnisse (statt 2 Ergebnissen nun 3; 4; 6; 10)
  Experimente: s.o., außerdem Raten von Ziffern, Würfeln
- durch Vermehren der Stufenzahl
  was mit allen bereits erwähnten Experimenten möglich ist.

Zugehörige Anwendungsaufgaben sind im Aufgabenteil angegeben.

Die Ergebniswahrscheinlichkeiten werden zunächst wohl kaum direkt aus den Teilwahrscheinlichkeiten gewonnen (Ausnahme: Experimente mit den durchziehenden Teilwahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$), sondern über den Vergleich der "unten angekommenen" mit den "oben eingegebenen" Plättchen. Erst allmählich wird deutlich, daß die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sich weit ökonomischer als Produkte der Teilwahrscheinlichkeiten entlang je eines Pfades im Baum gewinnen lassen (Pfadregel). Dies geschieht umso rascher, je größer die Vorerfahrungen der Schüler mit Operatoren und deren Verkettungen sind und je gezielter der Lehrer nachfragt, ob man die über das Plättchenspiel gewonnenen Wahrscheinlichkeiten nicht einfacher und schneller bestimmen kann.

Nach Gewinn und Einübung der Pfadregel wird man sich Experimenten zuwenden, bei denen die einzelnen Stufen nicht mehr voneinander unabhängig sind.

Einfache Beispiele gewinnt man über Urnenexperimente, bei denen die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Die Wahrscheinlichkeit, aus der Urne in Fig.13 nacheinander drei schwarze Kugeln zu ziehen, ist $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$,

denn

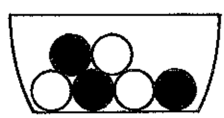
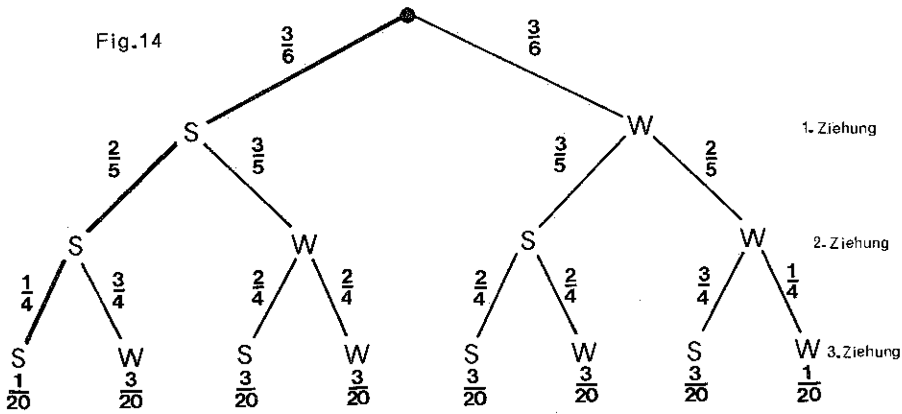


Fig.13

Fig.14



Mit solchen Urnenexperimenten kann man zahlreiche Anwendungssituationen simulieren. Ein Beispiel:

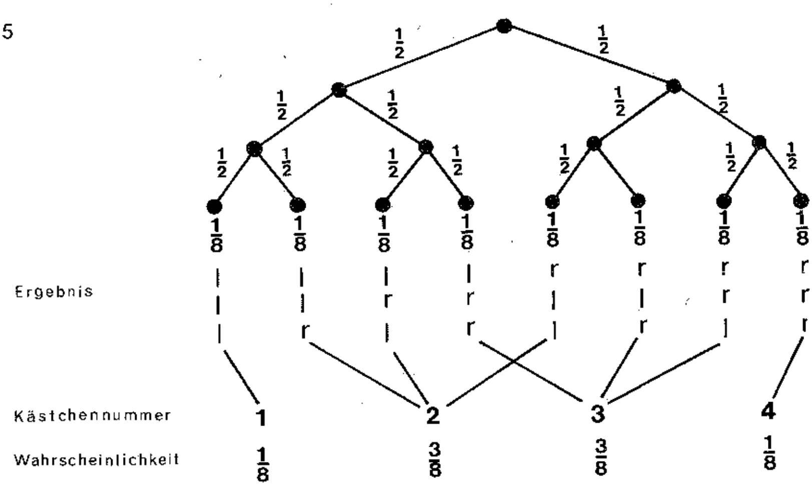
Mit einem kleinen Linienflugzeug kommen 12 Passagiere an. Darunter sind 4 Schmuggler und 8 ehrliche Leute. Ein Zöllner wählt 3 Passagiere zur genaueren Kontrolle aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie alle Schmuggler sind ?

Für jeden Schmuggler legt man eine schwarze, für jede ehrliche Person eine weiße Kugel in die Urne. Der Auswahl eines Passagiers zur Kontrolle entspricht dann eine Ziehung (ohne Zurücklegen). Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{55} .$$

Zur Vorbereitung der anschließenden Überlegungen wird man nun ein entflochtenes Baumdiagramm für das Galton-Brett anfertigen lassen. Es ist von Nutzen, wenn man sich für die Kugelwege interessiert. Geht es hingegen um die Kästchen, so ist bekanntlich zu beachten, daß in ein Kästchen mehrere Wege führen können; die ursprünglichen Ergebnisse müssen also zu neuen ("zusammengesetzten") Ergebnissen gebündelt werden, wobei sich die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten addieren:

Fig.15



Entsprechend geht man nun auch bei anderen Experimenten vor.

Beispiel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 3 aus der Urne in Fig.13 gezogenen Kugeln eine schwarz ist und zwei weiß sind ?

sss	ssw	sws	sww	wss	wsw	wws	www
$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

einmal s, zweimal w

Wahrscheinlichkeit: $\frac{9}{20}$

Fig.16

Oder: Anzahl der Sechsen beim Werfen zweier Würfel

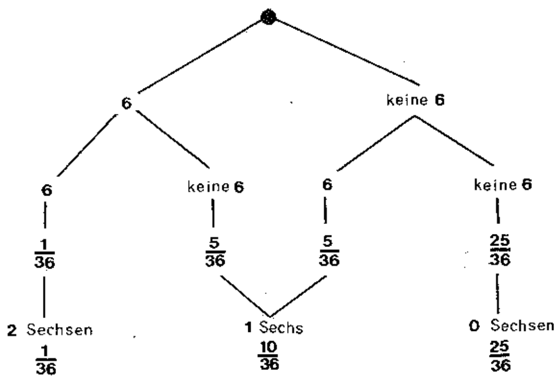


Fig.17

Dem Lehrer sei anheimgestellt, dieses Zusammenfassen in einer zweiten Pfadregel festzuhalten.

2.Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ergebnis führen.

Selbstverständlich dürfen auch hier geeignete Anwendungsaufgaben nicht fehlen.

Beispiel:
Firma A liefert 500 Gläser an Kaufhaus B. B prüft die Gläser nach folgendem Verfahren: 6 Gläser werden willkürlich herausgenommen. Ist mehr als eines von ihnen fehlerhaft (2.Wahl), so wird die Ware nicht angenommen. Die Gläser der Firma A weisen erfahrungsgemäß zu 5% Mängel auf (aber das weiß nur die Firma). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die 500 Gläser den Kaufhaustest überstehen, daß also die Ware angenommen wird ?

Antwort (s. Fig.18):
Die Gläser werden den Test mit der Wahrscheinlichkeit 0,97 bestehen.

Man beachte, wie in Fig.18 diejenigen Pade, die zur Antwort nichts beitragen, vernachlässigt werden. Zu dieser ökonomischen Maßnahme sollte man auch die Schüler im Verlaufe dieser Phase anhalten.

$$w = 0{,}95^6 + 6 \cdot 0{,}95^5 \cdot 0{,}05$$
$$= 0{,}735 + 0{,}232$$
$$= 0{,}967$$

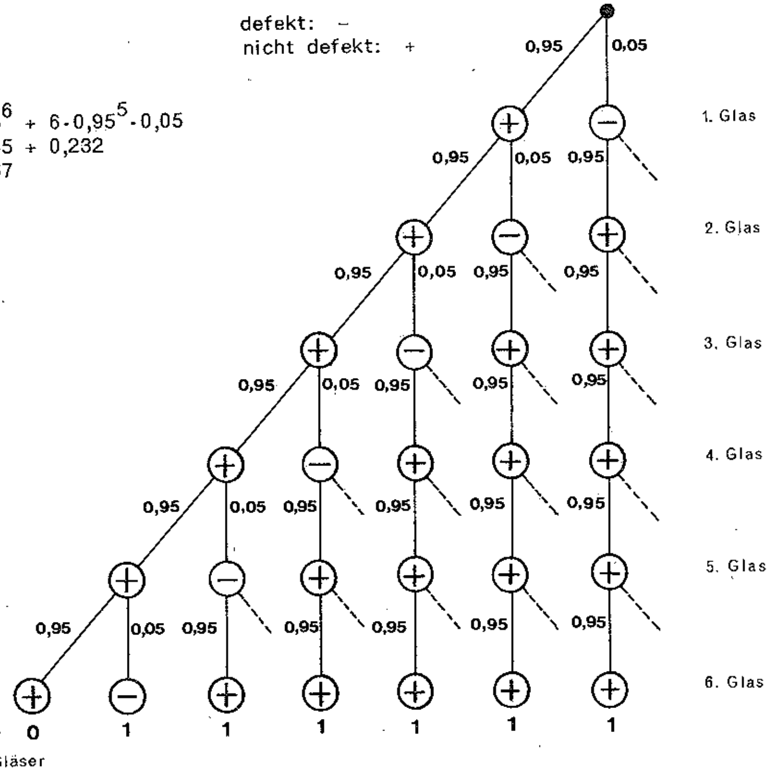
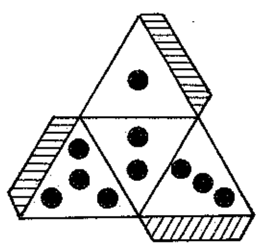


Fig. 18

Typische Aufgaben und Testitems

Aufgaben



1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß du mit dem Würfel, den du hier siehst,
   a) eine 3 b) keine 3 c) eine Zahl über 2
   d) eine Zahl unter 5 e) eine gerade Zahl
   wirfst ?
2. In einer Lostrommel liegen 20 Lose, die von 1 bis 20 durchnumeriert sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gezogenes Los
   a) die Zahl 18 b) eine gerade Zahl c) eine durch 3 teilbare Zahl
   zeigt ?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatspiel mit 32 Karten
   a) eine Kreuzkarte b) ein As c) das Kreuz-As
   d) eine rote Karte e) eine Lusche (Sieben, Acht oder Neun)
   zu ziehen ?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Ehe Mann und Frau am gleichen Tag Geburtstag haben ? (Lösung: $\frac{1}{365}$)
5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine willkürlich hingeworfene Streichholz-

schachtel
a) auf einer ihrer beiden größten Flächen
b) auf einer ihrer Reibeflächen
c) auf einer ihrer beiden kleinsten Flächen
liegen bleibt ? (Lösung auf statistischem Wege)

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine willkürlich hingeschriebene natürliche Zahl
a) gerade ist b) zwei Ziffern hat c) eine Primzahl ist ?
(Lösung: Statistische Bestimmung dieser drei Wahrscheinlichkeiten etwa dadurch, daß jeder Schüler vor Kenntnis dieser Aufgabe verschiedene natürliche Zahlen hinschreibt. Im Falle a) läßt sich die Wahrscheinlichkeit 0,5 auch klassisch einsehen.)

7. Eine Streichholzschachtel soll 50 Streichhölzer enthalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine gekaufte Schachtel
a) mehr als 50 Hölzer b) genau 50 Hölzer c) weniger als 50 Hölzer
enthält ?
(Anleitung: Jeder Schüler untersucht zuhause 3 Schachteln.)

8. Petra und Barbara spielen "Raten". Barbara muß raten, in welcher Hand Petra einen Knopf versteckt hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ihr dies dreimal nacheinander gelingt ?

9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit dem Würfel aus Aufgabe 1
a) zweimal nacheinander 1 (Lösung: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$)
b) zweimal nacheinander dieselbe Zahl (Lösung: $\frac{1}{4}$)
zu werfen ?

10. Die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 treten beim Menschen mit der Wahrscheinlichkeit 0,42 , 0,13 , 0,07 und 0,38 auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei sich zufällig begegnenden Personen
a) beide die Blutgruppe A (B , AB , 0)
b) beide die gleiche Blutgruppe
c) beide verschiedene Blutgruppen haben ?

11. Jeder Buchstabe des Wortes BEIL wird auf einen Zettel geschrieben und in eine Urne gelegt. Nach Mischen werden die vier Zettel wieder nacheinander gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Buchstaben in der Reihenfolge der Ziehung
a) wieder das Wort BEIL ergeben (Lösung: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$)
b) ein sinnvolles Wort ergeben (Lösung: $4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$) ?

12. Frau Bauer hat ihre Hyazinthen- und Narzissenzwiebeln durcheinandergebracht. In ihrem Korb befinden sich 8 Hyazinthen- und 2 Narzissenzwiebeln. Sie steckt 5 Zwiebeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es sämtlich Hyazinthen sind ?
(Lösung: $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$)

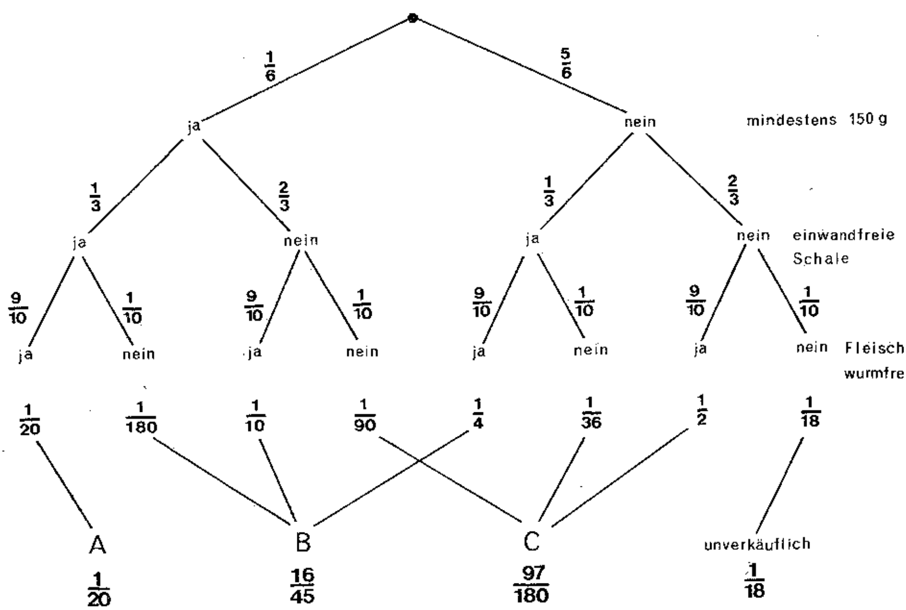
13. Auf einer Hauptstraße regeln hintereinander und voneinander unabhängig drei Ampeln den Verkehr. Jede läßt ein Auto erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ durch. Wie oft kann ein Auto an ihnen halten ? Bestimme die Wahrscheinlichkeit für jedes solche Ergebnis.
(Lösung: Möglich sind die Ergebnisse 0, 1, 2, 3 mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. Simulation der Situation durch 3 Münzen oder durch ein Galton-Brett mit 3 Zapfenreihen.)

14. Ein Elektrowerk bietet Glühbirnen an. Erfahrungsgemäß sind 2% der Birnen defekt. Ein Großhändler will 10 000 Glühbirnen bestellen, wenn folgender Test gelingt: Er greift aus der Produktion willkürlich 5 Glühbirnen heraus. Darunter darf keine Birne defekt sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Test positiv verläuft ?

(Lösung: $0{,}98^6 = 0{,}90$. Wegen der großen Gesamtzahl der Birnen kann das Herausgreifen als Ziehen mit Zurücklegen interpretiert werden.)

15. Drei Jäger schießen auf einen Hasen. Erfahrungsgemäß hat A die Trefferwahrscheinlichkeit 0,5; B trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 und C mit 0,3. Welche Überlebenschance hat der Hase ?
(Lösung: Der Hase überlebt, wenn alle drei Jäger vorbeischießen. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis ist $0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$.)

16. Ein Bauer verkauft seine Äpfel an einen Obstgroßhändler. Dabei werden drei Qualitätsklassen unterschieden.
A: Apfel wiegt mindestens 150g, Schale ist einwandfrei und Fleisch ist wurmfrei.
B: Apfel hat nur zwei dieser drei Eigenschaften
C: Apfel hat nur eine dieser drei Eigenschaften.
Alle weiteren Äpfel können nicht verkauft werden.
Erfahrungsgemäß hat ein Apfel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ mindestens 150g , ist mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ von einer einwandfreien Schale umgeben und hat mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ wurmfreies Fleisch.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gepflückter Apfel zur Qualitätsklasse A (B, C) gehört ?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht verkauft werden kann ?
(Lösung:



)

17. Ein bestimmter Schultest besteht aus 8 Aufgaben. Jede Aufgabe enthält 4 Antworten, von denen genau eine richtig ist. Für jemand, der nichts gelernt hat und der nichts weiß, ist der Test ein Zufallsexperiment: Jedes Ankreuzen der für richtig gehaltenen Antwort ist ein Versuch mit den Ergebnisse "richtig" oder "falsch" .
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man durch Zufall alle 8 Aufgaben löst ?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man durch Zufall 7 der 8 Aufgaben löst ?

c) ... keine der Aufgaben löst ?
(Lösung:
Die Ratewahrscheinlichkeit beträgt für jede Aufgabe $\frac{1}{4}$.

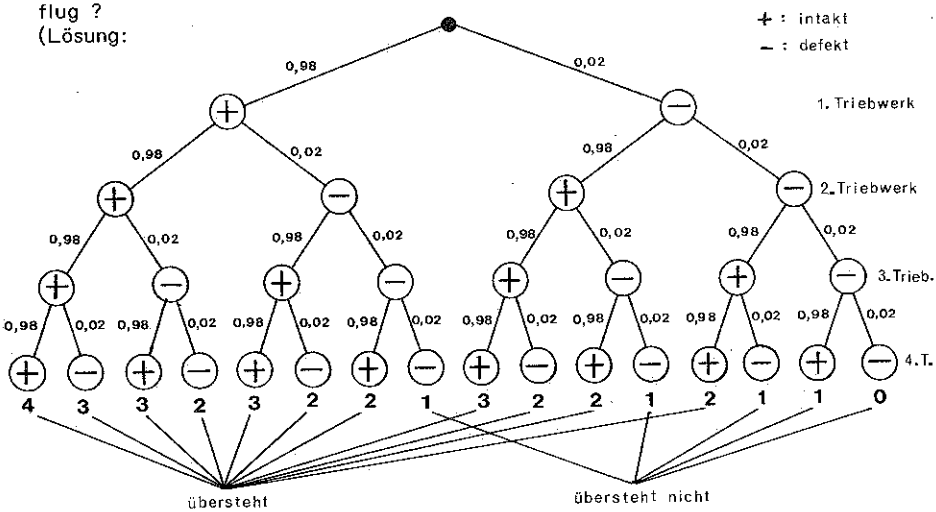
a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{65\,536}$

b) $8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{65\,536} = \frac{3}{8\,192}$;

denn im zugehörigen Baumdiagramm gibt es 8 Wege mit 7 Teilwahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$ und einer Teilwahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$.

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6\,561}{65\,536}$)

8. Eine Düsenmaschine hat 4 Triebwerke. Jedes Triebwerk übersteht einen Überseeflug mit der Wahrscheinlichkeit 0,98 . Die Maschine braucht zum Fliegen mindestens 2 Triebwerke. Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteht sie den Überseeflug ?
(Lösung:



$0{,}98^4 + 4 \cdot 0{,}98^3 \cdot 0{,}02 + 6 \cdot 0{,}98^2 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}999$ $\qquad$ $4 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02^3 + 0{,}02^4 = 0{,}001$ $\qquad$ Wahrscheinlichkeit
)

estitems

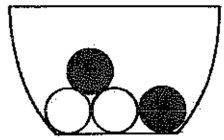
. Für jeden der 26 Buchstaben des Alphabets liegt eine Karte in einem Stapel. Die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Stapel

[f] einen Selbstlaut (Vokal) zu ziehen, ist $\frac{1}{2}$.

[r] einen Buchstaben zu ziehen, der im Alphabet vor E kommt, ist $\frac{2}{13}$.

[r] zweimal nacheinander denselben Buchstaben zu ziehen (wenn der erste gezogene Buchstabe wieder zurückgelegt und der Stapel erneut gut gemischt wird), ist $\frac{1}{26}$.

2. Aus der Urne werden 2 Bälle gezogen.



$\boxed{r}$ Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Bälle schwarz sind, ist $\frac{1}{6}$.

$\boxed{f}$ Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Bälle gleichfarbig sind, ist $\frac{1}{2}$.

$\boxed{f}$ Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Bälle verschiedenfarbig sind, ist $\frac{1}{3}$.

3. Peter und Paul zielen mit einem Tennisball auf eine Blechdose. Peter trifft mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, Paul mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$. Jetzt werfen sie beide gleichzeitig.

$\boxed{f}$ Die Wahrscheinlichkeit, daß beide die Dose treffen, ist $\frac{3}{4}$.

$\boxed{r}$ Die Wahrscheinlichkeit, daß keiner die Dose trifft, ist $\frac{1}{8}$.

$\boxed{f}$ Die Wahrscheinlichkeit, daß die Dose getroffen wird, ist $\frac{5}{6}$.

Zeitbedarf

6–9 Stunden je nach Aufnahme oder Elimination von Ziel 5

Schulbücher

B 6, S.74 – 81, 7, S.148 – 151 – Stuttgart: Klett

Die Welt der Zahl – Neu 7, S.110 – 112, 9, S.49 – 50 – Hannover: Schroedel

GAMMA (Gymnasium) 7, S.140 – 149 – Stuttgart: Klett

Lambacher-Schweizer 6, S.154 – 161 – Stuttgart: Klett

Mathematik (Hahn;Dzewas) 7, S.180 – 187 – Braunschweig: Westermann

Mathematik heute (Realschule) 7, S.180 – 183 – Hannover: Schroedel

PLUS 6, S.126 – 135, 7, S.70 – 83 – Paderborn: Schöningh

3.6 Abschlußtest

Vorbemerkung

Der nachfolgende Test ist ein lernzielorientierter Leistungstest; er soll zum Abschluß von STOCHASTIK 7 geschrieben werden.

Eine Erstfassung dieses Tests wurde 1977 in 14 Hauptschulklassen mit 350 Schülern erprobt und nach intensiver Auswertung (auch der Erfahrungen im vorangegangenen Curriculum) erheblich verbessert. Die Zweitfassung wurde 1978 und 1979 in weitere 12 Hauptschulklassen (294 Schüler) gegeben; sie mußte nur noch in wenigen Details korrigiert werden.

Lernziele

Im Test werden folgende Lernziele abgeprüft:

Item 1: das Ergebnis eines Versuches am Galton-Brett erläutern können

Item 2: erläutern können, was man unter einem Zufallsexperiment, einem Versuch, einem Ergebnis und dessen Wahrscheinlichkeit versteht

Item 3: erläutern können, weshalb bei manchen Zufallsexperimenten gewisse Ergebnisse bevorzugt werden, bei anderen nicht

tem 4: aus einer vorgebenen Datenliste Anzahlen und Anteile von Ergebnissen bestimmen können

tem 5: eine Häufigkeitsdarstellung überprüfen können

tem 6: die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses bei einem einstufigen Zufallsexperiment bestimmen können

tem 7: die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment bestimmen können

tem 8: eine innermathematische Situation stochastisch analysieren können

tem 9: eine Umweltsituation stochastisch analysieren können

tem 10: ein gebräuchliches Häufigkeitsdiagramm auswerten können

Hinsichtlich der Taxonomiestufen

- wissen (w)
- verstehen (v)
- anwenden (a)
- analysieren (y)
- synthetisieren (s)
- bewerten (b)

und der Sachthemen in STOCHASTIK 7

- Zufallsexperimente (Z)
- Beschreibende Statistik (B)
- Wahrscheinlichkeit in einstufigen Zufallsexperimenten (WE)
- Wahrscheinlichkeit in mehrstufigen Zufallsexperimenten (WM)

sind diese 10 Ziele folgendermaßen zu lokalisieren :

Taxonomiestufe / Sachthema	w	v	a	y	s	b
Z	2	1;3				
B	2		4	5		10
WE	2		6			
WM			7	8;9		

Testkonstruktion

Alle 10 Testaufgaben (Items) haben dieselbe Form. Eine Aufgabe besteht aus drei Aussagen a), b), c) (eventuell mit einer Eingangsinformation), von denen jede richtig oder falsch sein kann.

Vor jeder Aussage steht ein Kästchen, in dem der Schüler durch ein "r" bzw. ein "f" vermerkt, ob er sie für richtig oder falsch hält.

Beispiel:

[f] a) $8 \cdot 14 = 122$

[r] b) $85 : 5 = 17$

[f] c) $19 + 59 = 78$

Ein Lernziel gilt dann als erreicht, wenn die zugehörige Aufgabe vollständig gelöst, d.h. wenn alle drei Aussagen zutreffend beurteilt wurden. Im Beispiel ist dies nicht der Fall: Zwar wurden a) und b) zutreffend beurteilt, c) indessen nicht.

Es empfiehlt sich, ein solches Beispiel rechtzeitig vor dem Test im Unterricht zu behandeln, um die Schüler mit dieser Aufgabenform vertraut zu machen. Bei dieser Gelegenheit sollten auch bereits die arbeitstechnischen Hinweise auf den Schülerbögen (s.u.) zur Sprache kommen.

Lösungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	f	r	r	r	f	f	f	f	r	r
b)	r	r	f	f	r	f	f	r	r	r
c)	f	f	f	r	f	r	r	r	r	f

Auswertung

Lernzielorientierte Tests geben Aufschluß über den Stand eines Schülers auf dem Wege zur Erreichung der Lernziele; sie sind kriteriumsorientiert. Noten hingegen sind normorientiert, d.h. sie beziehen sich auf die Durchschnittsleistung (der Klasse, der Schule o.ä.). Dies bedeutet, daß der Test eigentlich nur der Rückmeldung an den Lehrer dienen kann, nicht aber zur Notengebung verwendet werden darf.

Andrerseits muß der Lehrer Noten machen und darf von einem Test erwarten, daß er zur Notenfindung beiträgt. Zur Benotung daher folgender Vorschlag:

1. Man gibt für jede zutreffend beurteilte Aussage 1 Punkt.
2. Man gibt weiterhin für jede vollständig gelöste Aufgabe 1 Punkt.
3. Man addiert alle Punkte eines Schülers und hat damit seine Rohpunktzahl.

   Anders formuliert: Für jede vollständig gelöste Aufgabe erhält der Schüler 4 Punkte, für eine vollständig falsche Aufgabe 0 Punkte, für eine teilweise gelöste Aufgabe 1 Punkt oder 2 Punkte je nach Anzahl der zutreffend beurteilten Aussagen.

   Ein Schüler kann demnach maximal 40 Punkte erreichen.
4. Schüler, die lediglich raten, würden durchschnittlich etwa 16 Punkte erreichen. Denn die Ratewahrscheinlichkeit für jede Aussage ist $\frac{1}{2}$, für jede Aufgabe also $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Und schließlich $30 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{8} = 16\frac{1}{4}$.
   Man gibt nun für alle Rohpunktzahlen unter diesem Erwartungswert 16 die Note 6 und teilt die anderen Rohpunktzahlen gemäß den übrigen fünf Noten in fünf gleichbreite Klassen ein. Dies führt zu folgendem Schlüssel:

Punkte	Note
0–15	6
16–20	5
21–25	4
26–30	3
31–35	2
36–40	1

Für Klassen bzw. Schüler, die keine mehrstufigen Experimente kennengelernt haben, ist eine leichtere Testversion, nämlich ohne Berücksichtigung der Aufgaben 7 und 9 möglich. In diesem Falle gilt der Schlüssel

Punkte	Note
0–12	6
13–16	5
17–20	4
21–24	3
25–28	2
29–32	1

Schule: ....

Klasse: ....

Name: ....

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK
Klasse 7

ABSCHLUSSTEST

Liebe Schülerin, lieber Schüler !

Durch den folgenden Test sollen deine Kenntnisse und Fähigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik überprüft werden.

Schreibe in ein Kästchen den Buchstaben r hinein, wenn du die dahinterstehende Aussage für richtig hältst. Schreibe den Buchstaben f hinein, wenn du diese Aussage für falsch hältst.

Merke:

Jedes Kästchen muß entweder mit r oder mit f ausgefüllt werden; ein leeres Kästchen zählt als Fehler.

In einer Aufgabe können alle drei, oder zwei, oder eine, oder garkeine Aussagen richtig sein.

Du hast insgesamt 45 Minuten Zeit.

Rechne bitte auf Schmierpapier !

Viel Erfolg !

1. Das Ergebnis eines Versuches am Galton-Brett hängt davon ab,
   - ☐ a) an welcher Stelle des Einwurftrichters die Kugel eingeworfen wird.
   - ☐ b) wie oft die Kugel an den Zapfen nach links und wie oft nach rechts fällt.
   - ☐ c) wo die Kugel beim vorherigen Versuch hingefallen ist.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch ?
   - ☐ a) Wenn man ein Experiment einmal durchführt, macht man einen "Versuch" .
   - ☐ b) Ein "Zufallsexperiment" ist ein Experiment, bei dem man niemals im voraus weiß, welches der möglichen Ergebnisse eintreten wird.
   - ☐ c) Die "Wahrscheinlichkeit" eines Ergebnisses ist die Zahl, die angibt, wie oft das Ergebnis eingetreten ist.

3. Welche der folgenden Begründungen sind richtig, welche falsch ?
   - ☐ a) Auf die Dauer treten beim Werfen einer Münze die beiden möglichen Ergebnisse gleich oft auf, weil die Münze regelmäßig gebaut ist.
   - ☐ b) Beim Galton-Brett fallen die Kugeln auf die Dauer häufiger in die mittleren Kästchen, weil die Erdanziehung sie in die Mitte zieht.
   - ☐ c) Beim Werfen mit zwei Würfeln erscheint die Augensumme 7 auf die Dauer häufiger als die Augensumme 6, weil 7 größer als 6 ist.

4. An einer Straßenkreuzung werden eine Stunde lang die vorbeikommenden Fahrzeuge bzw. Verkehrsteilnehmer gezählt. Dabei entsteht folgende Liste:

Pkw	Lkw	Fahrrad	Motorrad bzw.Mofa	Fußgänger	Sonstige
𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 |||

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch ?

☐ a) Die Anzahl der Lkw ist 13 .

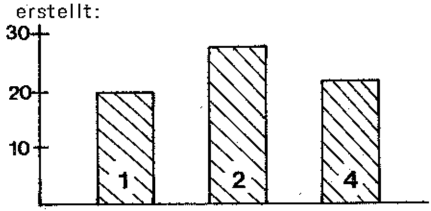
☐ b) Der Anteil der Fahrräder ist $\frac{1}{4}$.

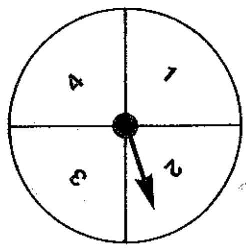
☐ c) Der Anteil der Fußgänger ist $\frac{56}{150}$.

5. Beim mehrmaligen Drehen dieses Ziffernrades ergab sich folgende Häufigkeitstabelle:

Ziffer	1	2	3	4
Anzahl	20	28	23	24

Dazu wurde folgendes Häufigkeitsdiagramm erstellt:



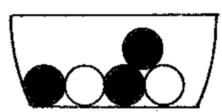


☐ a) Im Diagramm kommen alle Ergebnisse vor.

☐ b) Die Darstellung von "1" ist richtig.

☐ c) Die Darstellung von "4" ist richtig.

6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch ?



☐ a) Die Wahrscheinlichkeit, aus dieser Urne einen weißen Ball zu ziehen, ist $\frac{2}{3}$.

☐ b) Die Wahrscheinlichkeit, daß der große Zeiger deiner Armbanduhr zwischen 2 und 4 steht, wenn sie das nächste Mal stehen bleibt, ist $\frac{1}{3}$.

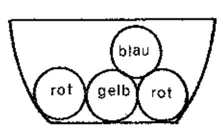
☐ c) Die Wahrscheinlichkeit, daß eine willkürlich hingeschriebene natürliche Zahl ungerade ist, ist $\frac{1}{2}$.

7. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch ?

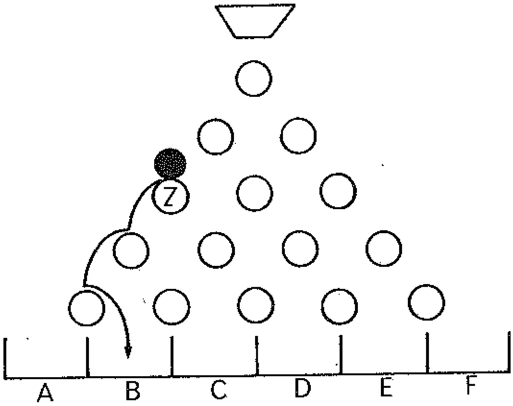
☐ a) Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, daß zweimal "Zahl" kommt, ist $\frac{1}{2}$.

☐ b) Ein Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Male dieselbe Augenzahl kommt, ist $\frac{1}{36}$.

☐ c) Aus dieser Urne wird ein Ball gezogen und nicht mehr zurückgelegt. Dann wird noch ein zweiter Ball gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Ball gelb und der zweite blau ist, ist $\frac{1}{12}$.



8. Eine in das Galton-Brett eingeworfene Kugel ist am Zapfen Z angelangt.

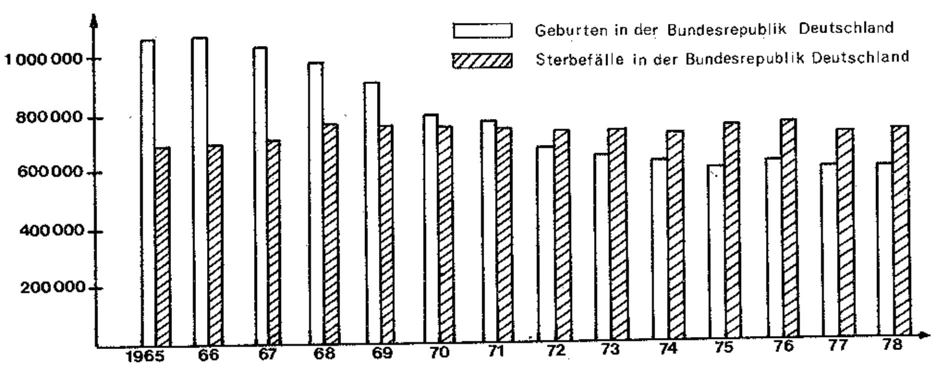


- [ ] a) Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Kugel von Z aus den eingezeichneten Weg nimmt, ist $\frac{1}{16}$.
- [ ] b) Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Kugel von Z aus in Fach C fällt, ist $\frac{3}{8}$.
- [ ] c) Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Kugel von Z aus in Fach E fällt, ist 0 .

9. Das Ehepaar Bauer beschließt, so lange Kinder zu kriegen, bis ein Mädchen geboren wird.
Rechne der Einfachheit halber mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für eine Knabengeburt und für eine Mädchengeburt.
Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ehepaar Bauer

- [ ] a) 1 Kind bekommt, ist $\frac{1}{2}$.
- [ ] b) 2 Kinder bekommt, ist $\frac{1}{4}$.
- [ ] c) 3 Kinder bekommt, ist $\frac{1}{8}$.

10. Sieh dir das folgende Diagramm an:



- [ ] a) Seit 1972 sterben mehr Leute in der Bundesrepublik, als geboren werden.
- [ ] b) Seit 1975 werden jährlich ungefähr 600 000 Kinder geboren.
- [ ] c) Seit 1966 nimmt die Einwohnerzahl der Bundesrepublik Deutschland ab.

4. CURRICULUM "STOCHASTIK 8"

4.1 Vorbemerkungen

Hinsichtlich der Gliederung dieses Kapitels und seines Gebrauchs durch den Lehrer gelten sinngemäß die Ausführungen an entsprechender Stelle in STOCHASTIK 7 (s. S.23) .

Das Curriculum STOCHASTIK 8 (= Teilcurriculum "Stochastik in der Hauptschulklasse 8") ist in 3 Phasen gegliedert, welche je etwa 3-5 Unterrichtsstunden umfassen:

1.Phase: Durchschnittswert
2.Phase: Erwarteter Durchschnittswert
3.Phase: Durchschnittliche (und erwartete) Abweichung

STOCHASTIK 8 setzt den sicheren Umgang mit den Leitbegriffen aus STOCHASTIK 7 voraus (Zufallsexperiment, Ergebnis, absolute und relative Häufigkeit (Anzahl und Anteil), Wahrscheinlichkeit, Verteilung, Gleichverteilung). Es empfiehlt sich, zunächst noch einmal den seinerzeitigen Abschlußtest (s. Unterkapitel 3.6) schreiben zu lassen und dann gemäß den festgestellten Schwierigkeitsindizes der 10 Items eine kurze, aber gezielte Wiederholung vorzunehmen.

Unter günstigeren Voraussetzungen ist selbstverständlich auch eine immanente Wiederholung möglich.

Sollte seinerzeit auf zusammengesetzte Ergebnisse (= Ereignisse) bzw. überhaupt auf mehrstufige Zufallsexperimente verzichtet worden sein, so muß deren Behandlung unbedingt vorausgeschickt werden. Dies sollte zeitlich getrennt geschehen (etwa zu Beginn des Schuljahres), um eine Überlänge des geschlossenen Kapitels zu vermeiden.

4.2 1. Phase: DURCHSCHNITTSWERT

Didaktische Begründung

Nachdem in Klasse 7 Häufigkeitsverteilungen ermittelt und dargestellt wurden, sollen sie nun aus Gründen der Übersichtlichkeit und des besseren Vergleichs sowie zum Zwecke begründeter Entscheidungen in Massensituationen durch geeignete Werte charakterisiert werden. Dies geschieht zunächst durch die Mittelwerte: Durchschnittswert, mittlerer Wert und häufigster Wert.

Wir beschränken uns allerdings der Einfachheit halber sowie aus Zeitgründen auf den Durchschnittswert als dem wichtigsten Mittelwert; der unmittelbar verständliche und ablesbare häufigste Wert wird vergleichend danebengestellt.

Ziele

1. den Durchschnittswert einer Werteliste bzw. einer Häufigkeitsverteilung berechnen können
2. erläutern können, wie man den Durchschnittswert berechnet
3. geeignete Sachprobleme durch Bilden des Durchschnittswertes lösen können
4. erläutern können, wozu man den Durchschnittswert braucht

Inhalte

Ausgehend von einer überschaubaren und motivierenden Situation wird der Begriff "Durchschnittswert" eingeführt, an weiteren Beispielen gefestigt und schließlich formuliert:

$$\text{Durchschnittswert} = \frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Anzahl aller Werte}}$$

Es schließen sich weitere Übungen an, in denen sowohl der Übersichts- als auch der Vergleichsaspekt des Durchschnittswertes herausgestellt und bewußt gemacht wird (s. Ziel 4).

Beispiele für geeignete Situationen (z.T. bereits aus STOCHASTIK 7 bekannt):

- durchschnittliche Körperlänge (Schuhgröße) in der Klasse
- durchschnittliches Körpergewicht in der Klasse
- durchschnittliches Monatseinkommen eines Vertreters
- Durchschnittsnote bei der letzten Mathematikarbeit (Vergleich mit der Durchschnittsnote der vorletzten Mathematikarbeit)
- durchschnittliche Leistung eines Schülers in den Mathematikarbeiten des letzten Schuljahres
- neuester durchschnittlicher Prozentsatz der Arbeitslosen im jeweiligen Bundesland (Vergleich mit entsprechenden Werten aus den Vorjahren, mit entsprechenden Werten für die gesamte Bundesrepublik)
- durchschnittliche Fernsehzeit aller Schüler einer Klasse am gestrigen Tag
- durchschnittlicher Benzinverbrauch eines Autos
- durchschnittliche Anzahl der gefahrenen Kilometer während der Arbeitszeit eines Taxifahrers
- durchschnittliche Brenndauer einer Glühbirne aus einer bestimmten Serie (Vergleich mit anderer Serie)
- Vergleich zweier Parallelklassen hinsichtlich einer sportlichen Leistung (z.B. 100m-Lauf, Weitsprung)
- Vergleich des durchschnittlichen Stundenlohns männlicher und weiblicher Industriearbeiter in der Bundesrepublik (im eigenen Bundesland)
- Vergleich des Alkoholkonsums einer bestimmten Person mit dem durchschnittlichen Alkoholkonsum eines Bewohners der Bundesrepublik .

Bei der Bestimmung des Durchschnittswerts ist zu beachten:

a) Bei Häufigkeitsverteilungen rechnet man vorteilhaft mit Teilprodukten.

Beispiel:

Wert	4	6	9	10
Anzahl	3	5	4	2

$$\text{Durchschnittswert: } \frac{3\cdot 4 + 5\cdot 6 + 4\cdot 9 + 2\cdot 10}{3+5+4+2} = \frac{98}{14} = 7$$

Schüler, welche diesen Vorteil (noch) nicht wahrnehmen, sollte man auf die vergleichsweise Umständlichkeit des Normalverfahrens hinweisen, jedoch nicht (etwa durch Vergabe von Minuspunkten) zum abgekürzten Verfahren drängen.

b) Bei Klassenbildung geht die Klassenmitte in die Rechnung ein.

Beispiel:

Klasse	0–3cm	3–6cm	6–9cm	9–12cm
Anzahl	1	3	4	2

$$\text{Durchschnittswert: } \frac{1\cdot 1{,}5\text{cm} + 3\cdot 4{,}5\text{cm} + 4\cdot 7{,}5\text{cm} + 2\cdot 10{,}5\text{cm}}{1+3+4+2}$$

$$= \frac{51\text{cm}}{10} = 5{,}1\text{cm}$$

Weiter ist herauszustellen, daß der Durchschnittswert keineswegs immer (wie etwa bei glockenförmigen Verteilungen) der häufigste Wert zu sein braucht, ja nicht einmal ein Ausgangswert sein muß.

Meist haben einige Schüler den Durchschnittswert bereits in früheren Klassen, z.T. schon in der Grundschule kennengelernt. Es ist jedoch nicht ratsam, auf diesem Wissen aufzubauen, da es erfahrungsgemäß nur recht selten mit einem Verständnis für die Sinnvollheit dieses Maßes oder gar für Wesen und Grenzen seiner Aussagekraft gekoppelt ist.

Methoden und Medien

Als Einstieg empfiehlt sich eine Situation, in der sich die Summen- und Mittelbildung anbietet (z.B. durchschnittliches Monatseinkommen), oder aber, als Problemeinstieg, der Vergleich zweier analoger Verteilungen (z.B.: Welche von zwei Parallelklassen ist im Weitsprung besser ? Sind die Mädchen oder die Buben der Klasse größer ?). Unter ungünstigen Bedingungen sollte man auch eine konkretere Situation nicht scheuen, etwa: 5 Schüler wollen Klicker spielen. Sie haben 12, 17, 20, 28, 33 Klicker. Am Anfang sollen aber alle Spieler gleichviele Klicker haben. Was ist zu tun ?

Jedenfalls muß deutlich werden, daß es sinnvoll ist, die gegebenen Werte zu addieren und die erhaltene Summe durch die Anzahl der Werte zu dividieren; und daß der Durchschnittswert angibt, wie groß die Einzelwerte wären, wenn sie (bei gleicher Summe) alle gleich wären.

Der Algorithmus der Durchschnittsbildung kann durch ein Flußdiagramm (Fig.19) vorteilhaft veranschaulicht werden:

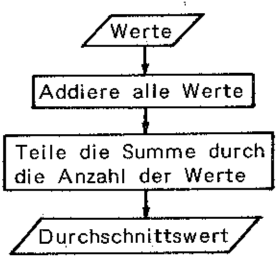


Fig.19

Es ist hilfreich, mindestens einmal zu einer Werteliste ein Balkendiagramm anzufertigen und darin den Durchschnittswert eintragen zu lassen. Beispiel (Fig.20):

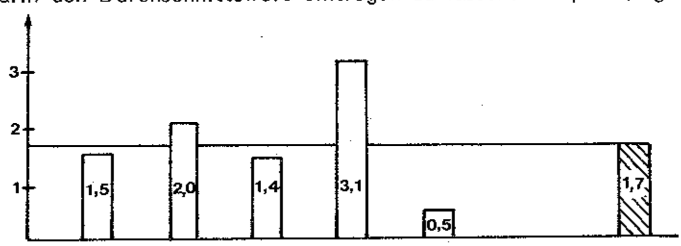


Fig.20

Der Name "Durchschnittswert" wird dabei auf ikonischer Ebene deutlich.

Auch eine physikalische Demonstration ist möglich: Wasserhöhe in Glasröhren vor und nach dem Kommunizieren (Fig.21).

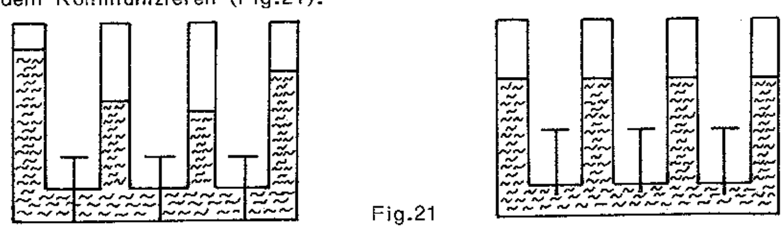


Fig.21

Statt "Durchschnittswert" kann man im Unterricht durchaus auch "Mittelwert" sagen, da auf andere Mittelwerte nicht eingegangen wird. Am besten sollte man beide Namen aufgreifen, weil sie beide auch im Alltag vorkommen ("im Durchschnitt", "im Schnitt", "im Mittel").

Erfahrungsgemäß assoziieren viele Schüler das "Mittel" mit der "Mitte", halten den Durchschnittswert also für den Wert auf halber Strecke zwischen Minimum und Maximum. Dieses mögliche Mißverständnis sollte man frühzeitig an einem Gegenbeispiel bewußt machen und abbauen. Man wehrt ihm auch dadurch, daß man nicht mit dem Durchschnittswert zweier Werte einsteigt, der ausnahmsweise die zu diskriminierende Eigenschaft hat.

Aus ökonomischen Gründen und in Betrachtung des Prinzips der Fortsetzbarkeit liegt die weitestgehende Benutzung des in STOCHASTIK 7 (2.Phase) erarbeiteten bzw. bereitgestellten Datenmaterials nahe, zumal dabei besonders deutlich wird, an welche Voraussetzungen (Addierbarkeit) die Durchschnittsbildung gebunden ist; und: welchen Informationsgewinn dieser Prozeß bringt (s. Richtziel 3 , S.20).

Ansonsten sollten die Schüler wiederum aufgefordert werden, ihnen bekannte Beispiele für Mittelbildungen aus ihrer Umwelt und den jeweiligen Zweck dieser Maßnahme zu nennen.

Vermeiden wird man hingegen Durchschnittsbildungen mit Zahlen, deren Zustandekommen und Sinn nicht erkennbar ist; sowie solche, die keinen Informationsgewinn bringen (z.B. durchschnittlicher Lohn der Beschäftigten in einem Großbetrieb). Ganz im Gegenteil muß auch auf Situationen aufmerksam gemacht werden, in denen es auf andere Kennwerte (z.B. Minimum oder Maximum) ankommt (z.B. Maximum der sportlichen Leistung bei Sprung- und Wurfdisziplinen in der Leichtathletik oder Minimum der Preise für einen bestimmten Artikel in verschiedenen Geschäften).

Die o.a. rechentechnischen Details sollten sukzessive, am besten in der angegebenen Reihenfolge erarbeitet werden (Prinzip von der Isolation der Schwierigkeiten).

Typische Aufgaben und Testitems

Wegen der Bekanntheit und leichten Erreichbarkeit des entsprechenden Materials beschränken wir uns hier auf wenige Beispiele.

Aufgaben

1. a) Herr Müller möchte wissen, wie viele Kilometer er mit einer Füllung seines Autotanks (40 l) fahren kann. Er macht fünf Versuche und erhält: 372 km, 358 km, 392 km, 365 km, 388 km .
   Wie weit kommt er also im Schnitt mit einer Tankfüllung ?
   b) Wie viele Liter Benzin verbraucht sein Auto im Mittel auf 100 km ?

2. Ein Vertreter hat im letzten Jahr folgende Monatsverdienste gehabt:

Januar	3 619,72 DM	Juli	3 615,28 DM
Februar	3 180,59 DM	August	2 820,71 DM
März	3 904,27 DM	September	3 266,36 DM
April	3 746,83 DM	Oktober	3 573,63 DM
Mai	4 088,42 DM	November	3 925,18 DM
Juni	3 839,05 DM	Dezember	4 211,35 DM

   Sein Bruder ist Beamter mit einem Monatsgehalt von 3 729,15 DM . Wer von den beiden Brüdern verdient mehr ?

3. Am 5. Mai nahmen 105 Personen am Gottesdienst in der Kirche von Kleinstadt teil und spendeten insgesamt 157,35 DM . Am 12.Mai waren es 146 Leute und es kamen 190,50 DM zusammen.
   Vergleiche.

Testitems

1. Bei folgenden Zufallsexperimenten kann man den Durchschnittswert der erhaltenen Werte bilden:

   [r] Messen der Länge eines ausgewachsenen Eichenblattes

   [f] Nennen des voraussichtlichen Meisters in der laufenden Saison der Fußball-Bundesliga

   [r] Aufschreiben der für die Hausaufgaben am gestrigen Tag benötigten Zeit

2. Eine Firma hat innerhalb einer Woche folgende Gebühren für Postsendungen bezahlt:

Wert	0,60 DM	0,80 DM	2,00 DM	4,60 DM	5,20 DM
Anzahl	6	4	3	5	1

   [f] Im Durchschnitt kostete eine Sendung 2,00 DM .

   [f] Am häufigsten waren die Postsendungen zu 4,60 DM .

   [r] Billigste und teuerste Sendung unterschieden sich um 4,70 DM .

Zeitbedarf

etwa 4 Stunden

Schulbücher

Denken und Rechnen 6, S.104 - 106 - Braunschweig: Westermann

Die Welt der Zahl - Neu 7, S.108, 8, S.88 - 89 - Hannover: Schroedel

GAMMA (Hauptschule) 8, S.114 - 118 - Stuttgart: Klett

Mathematik (Hahn;Dzewas) 6, S.186 - 189 - Braunschweig: Westermann

Mathematik (Kahle;Lörcher) 5, S.130 - 131 - Braunschweig: Westermann

PLUS 7, S.64 - 67 - Paderborn: Schöningh

4.3 2.Phase: ERWARTETER DURCHSCHNITTSWERT

Didaktische Begründung

Nach der Charakterisierung von Häufigkeitsverteilungen durch den Durchschnittswert liegt es nahe, in analoger Weise auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu charakterisieren. Dabei zeigt sich erneut die Ökonomie des Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Durch eine vergleichsweise einfache Rechnung ist es möglich, den Durchschnittswert zu bestimmen, der für die Werte erwartet werden kann, die bei vielen Versuchen innerhalb des Experiments entstehen; und das, ohne einen einzigen Versuch tatsächlich durchzuführen. Dieser zu erwartende Durchschnittswert hat im Bereich der Glücksspiele und in der Wirtschaft eine wichtige Voraussage- und Entscheidungsfunktion; sie soll an einfachen Beispielen aus dem Erfahrungsbereich der Schüler exemplarisch deutlich gemacht werden.

Diese Phase liefert demnach einen unmittelbaren Beitrag zum Fundamentalziel des gesamten Curriculums (s.Unterkapitel 2.7) .

Ziele

1. zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung den erwarteten Durchschnittswert bestimmen können
2. erläutern können, wie man den erwarteten Durchschnittswert berechnet
3. geeignete Sachprobleme durch Bilden des erwarteten Durchschnittswertes lösen können
4. erläutern können, wozu man den erwarteten Durchschnittswert braucht

Hinweis:
Nach unseren Erfahrungen lassen sich auch die vergleichsweise anspruchsvollen Ziele 2 und 4 in der Hauptschule erreichen, wenn man solche Reflexionen und Verbalisierungen unmittelbar mit den vorangehenden Handlungen (Ziele 1 und 3) verbindet.

Inhalte

An bekannten und übersichtlichen Zufallsexperimenten aus dem Glücksspielbereich werden zunächst Definition und Begriff des erwarteten Durchschnittswertes erarbeitet und nach kurzer Einübung zu prognostischen Aussagen innerhalb dieser Glücksspiele herangezogen. Schließlich erfolgt eine kontinuierliche Hinwendung zu "Spiel"situationen in anderen Bereichen.

Methoden und Medien

Bekanntlich gehört zu einem guten Spielwürfel die Wahrscheinlichkeitsverteilung

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

Führt man mit ihm etwa 120 Versuche durch, so erhält man z.B. die Häufigkeitsverteilung

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Anzahl	24	19	22	13	19	23

und als deren Durchschnittswert

$$\frac{24\cdot 1 + 19\cdot 2 + 22\cdot 3 + 13\cdot 4 + 19\cdot 5 + 23\cdot 6}{24 + 19 + 22 + 13 + 19 + 23} = 3{,}44 \quad .$$

War dies vorauszusehen ? Ja, denn 3,5 ist der Durchschnittswert der möglichen Ergebnisse 1; 2; 3; 4; 5; 6 und alle diese Ergebnisse sind gleichwahrscheinlich. In der Tat hätte sich der Durchschnittswert 3,5 ergeben, wenn alle sechs Augenzahlen genau 20-mal erschienen wären. Nach vielen Versuchen wird man also den Durchschnittswert 3,5 erwarten können.

Entsprechend ist beim Tetraederwürfel (s. S.48) der Durchschnittswert 2,5 , beim Groschen, wenn man Wappen als 0 rechnet, der Durchschnittswert 5 zu erwarten.

Wie sieht es nun bei Ungleichverteilungen aus, etwa beim Zahlenroulette in Fig.21 mit der Verteilung

1	2	3	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

?

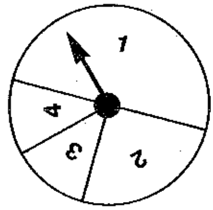


Fig.21

Stellt man sich jetzt viele, beispielsweise 1 000 Versuche vor, so ergibt sich etwa folgende Häufigkeitsverteilung:

Ergebnis	1	2	3	4
Anzahl	500	250	125	125

und als deren Durchschnittswert

$$\frac{500\cdot 1 \;+\; 250\cdot 2 \;+\; 125\cdot 3 \;+\; 125\cdot 4}{500 + 250 + 125 + 125} = \frac{1\,875}{1\,000} = 1{,}875 \quad .$$

Dieser Wert ist kleiner als der Durchschnittswert 2,5 der möglichen Ergebnisse 1; 2; 3; 4 , weil die kleineren Zahlen 1; 2 häufiger (wahrscheinlicher) sind als die beiden anderen.

Der folgenden Umformung

$$\frac{500\cdot 1 \;+\; 250\cdot 2 \;+\; 125\cdot 3 \;+\; 125\cdot 4}{500 + 250 + 125 + 125} = \frac{500}{1000}\cdot 1 + \frac{250}{1000}\cdot 2 + \frac{125}{1000}\cdot 3 + \frac{125}{1000}\cdot 4$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 3$$

(die zumindest beim ersten Beispiel vom Lehrer vorgeführt werden muß, da die Schüler das Umformungsziel nicht kennen) ist zu entnehmen, daß man den zu erwartenden Durchschnittswert einfach dadurch erhält, daß man jedes mögliche Ergebnis mit seiner Wahrscheinlichkeit multipliziert und diese Produkte addiert.

Der Lehrer mag entscheiden, ob er dieses Resultat (nach Durchrechnen mit einer weiteren Versuchezahl, etwa 2 000) für eine variable Anzahl n von Versuchen erarbeiten läßt und damit plausibel verallgemeinert:

$$\text{erwarteter Durchschnittswert} = \frac{\frac{n}{2}\cdot 1 \;+\; \frac{n}{4}\cdot 2 \;+\; \frac{n}{8}\cdot 3 \;+\; \frac{n}{8}\cdot 4}{n}$$

$$= \frac{n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 \;+\; \frac{1}{4}\cdot 2 \;+\; \frac{1}{8}\cdot 3 \;+\; \frac{1}{8}\cdot 4\right)}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 \;+\; \frac{1}{4}\cdot 2 \;+\; \frac{1}{8}\cdot 3 \;+\; \frac{1}{8}\cdot 4$$

Auf jeden Fall muß er die am Eingangsbeispiel gewonnene Erkenntnis auf eine breitere Basis stellen, d.h. auf andere geeignete Zufallsexperimente (anders gebautes Zahlen-Roulette, andere Würfel, Augensumme beim Werfen zweier Würfel, Anzahl der Wappen beim Werfen zweier Münzen, Anzahl der Sechsen beim Werfen zweier Würfel, Kästchennummer beim Galton-Brett usw.) ausdehnen, bevor formuliert werden kann:

Unter dem erwarteten Durchschnittswert versteht man den Durchschnittswert der Zahlen, die sich in vielen Versuchen bei einem Zufallsexperiment ergeben.
Man erhält ihn, ohne einen einzigen Versuch durchführen zu müssen, auf folgende Weise: Multipliziere jedes mögliche Ergebnis mit seiner Wahrscheinlichkeit; addiere dann alle diese Produkte.

Im Flußdiagramm:

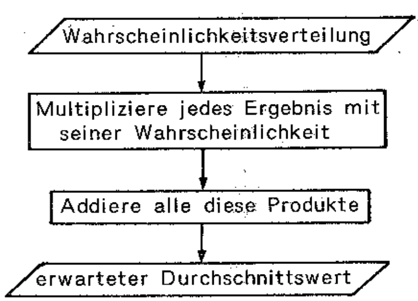


Fig.22

In der Erprobung zeigte sich, daß fast alle Schüler mit dem Erwartungswert umgehen lernen. Allerdings wählten sie oft nicht den eben angeführten ökonomischen Weg, sondern griffen auf die erwartete ("ideale") Häufigkeitsverteilung nach geeignet vielen Versuchen zurück (die sie sich anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung verschafften) und berechneten deren Durchschnittswert. Daß sie auf dieser – im Planungsentwurf nur als Zwischenstufe vorgesehenen – Ebene stehen blieben, macht deutlich, daß ie die an Beispielen vorgenommenen Umwandlungen (die ja erst zu $\sum x_i \cdot w(x_i)$ ührten) zwar möglicherweise nachvollzogen, aber nicht internalisiert hatten, so daß las kürzere Verfahren suspekt bleibt.

Vir schlagen deshalb vor, zwar weiterhin das abgekürzte Verfahren wegen seiner verjleichsweisen Einfachheit anzustreben, aber die Rekursion auf eine erwartete Häuigkeitsverteilung durchaus zuzulassen, weil der Schüler damit sein Verständnis des Zusammenhangs zwischen Durchschnittswert und erwartetem Durchschnittswert dokunentiert und überdies alle auftretenden Probleme auf diese Weise lösen kann. Auch daß der Schüler bei seinem Vorgehen die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ils dessen nach vielen Versuchen zu erwartende relative Häufigkeit interpretiert und damit die in STOCHASTIK 7 angebahnte frequentistische Wahrscheinlichkeitsaufassung konsequent anwendet), sollte willkommen sein, weil diese Interpretation den Weg frei macht für die Sicht der Wahrscheinlichkeit als Modellbegriff zur Lösung stochastischer Probleme.

Konsequenterweise wurde der noch im Erstentwurf benutzte fachwissenschaftliche Terminus "Erwartungswert" zugunsten des zwar längeren, aber weniger mißverständichen Terminus "erwarteter Durchschnittswert" aufgegeben; zudem wurde der "Erwartungswert" von manchen Schülern auf Befragen hin als Wert interpretiert, den man beim nächsten Versuch erwarten kann.

Hinsichtlich der Anwendungen dieses Kennwertes empfehlen sich Aufgaben der folgenden Art:

Entscheidungsfunktion

1. Tünnes zeigt Schäl ein Zahlen-Roulette (Fig.23) und schlägt ihm folgendes Spiel vor:
"Die Felder 1 und 2 gehören mir, die Felder 3 und 4 dir. Bleibt der Zeiger auf einem deiner Felder stehen, dann kriegst du so viele Pfennige von mir, wie auf diesem Feld draufsteht. Bleibt der Zeiger auf einem meiner Felder stehen, dann kriege ich so viele Pfennige von dir, wie draufsteht."
Soll Schäl dieses Spiel mitspielen ? Ist es für ihn günstig ?

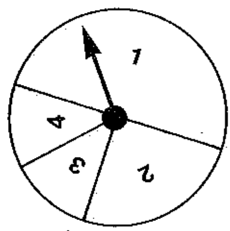


Fig.23

Neben der Spielsituation selbst ist hier reizvoll, daß offensichtlich zwei einander entgegenwirkende Einflüsse existieren: Schäl hat zwar die beiden größeren Zahlen, aber sie stehen in den beiden kleineren Feldern. Welcher Einfluß überwiegt ?

Wenn nachfolgende Lösung sich nicht gleich anbietet, kann man zuhause (in Partnerarbeit) je etwa 100 Runden spielen lassen. Es wird sich zeigen, daß Schäl mit fortschreitender Spielzeit in Rückstand gerät. Warum ? Läßt sich dies auch ohne Spielen einsehen ?
Für Schäl gibt es die Ergebnisse -1 (1 Pf Verlust), -2 (2 Pf Verlust), 3 (3 Pf Gewinn) und 4 (4 Pf Gewinn), je mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$; also kann er nach vielen Spielen im Durchschnitt pro Spiel

wegen $\frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot(-2) + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 4 = -\frac{1}{8}$

$\frac{1}{8}$ Pf Verlust erwarten. Das Spiel ist für Schäl ungünstig; er sollte es ablehnen.

Wenn man die negativen Zahlen vermeiden will (bzw. muß), bietet sich folgende Aufgaben und Lösungsvariante an: Tünnes und Schäl legen sich zunächst eine Kasse an, in die jeder gleichviel Startgeld gibt. Nach jedem Versuch wird der Gewinner aus dieser Kasse bezahlt. Dann gilt

für Tünnes der erwartete Durchschnittswert $\frac{1}{4}\cdot 0$ Pf $+ \frac{1}{2}\cdot 1$ Pf $+ \frac{1}{4}\cdot 2$ Pf $= 1$ Pf ,

für Schäl der erwartete Durchschnittswert $\frac{3}{4}\cdot 0$ Pf $+ \frac{1}{8}\cdot 3$ Pf $+ \frac{1}{8}\cdot 4$ Pf $= \frac{7}{8}$ Pf .

Das Spiel ist also für Schäl ungünstig.

Hinweis:
Die Schüler sollten im Unterricht aufgefordert werden, sich abgewandelte Spiele (auch mit anderen Medien) auszudenken und sie entsprechend zu analysieren. Nach unseren Erfahrungen tun sie dies gern und entwickeln dabei eine erhebliche Phantasie.

2. Ein einfacher Spielautomat besteht aus zwei sich unabhängig voneinander drehenden Scheiben mit den Zahlen 0 bis 7, sowie aus einem Schaufenster, in dem von jeder Scheibe eine Zahl erscheint (Fig.24).
Gewinnplan:
2 DM, wenn zweimal die 0 kommt
1 DM, wenn eine andere Zahl zweimal kommt
0,50 DM, wenn einmal die 0 kommt

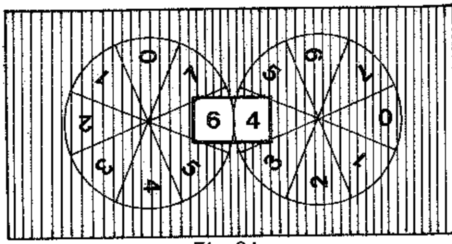


Fig.24

a) Welche durchschnittliche Auszahlung kann man erwarten ?
b) Ein Spiel kostet 0,50 DM. Würdest du an diesem Automaten spielen ?

Lösung:
a) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

0 DM	0,5 DM	1 DM	2 DM
$\frac{42}{64}$	$\frac{14}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

erwarteter Durchschnittswert:
$$\frac{42}{64}\cdot 0 \text{ DM} + \frac{14}{64}\cdot 0{,}5 \text{ DM} + \frac{7}{64}\cdot 1 \text{ DM} + \frac{1}{64}\cdot 2 \text{ DM} = 0{,}25 \text{ DM}$$
b) Nein, denn man verliert durchschnittlich pro Spiel 25 Pf .

3. Beim Roulette in den Spielkasinos der großen Kurorte erhält ein Spieler beim Setzen auf eine der 37 gleichwahrscheinlichen Zahlen 0; 1; 2; ...; 35; 36 das 36-fache seines Einsatzes zurück, falls diese Zahl kommt; er gewinnt dann also das 35-fache seines Einsatzes. Andernfalls verliert er seinen Einsatz.
Ist diese Regelung für ihn günstig ?

Lösung:

Ergebnis	35·Einsatz	– 1·Einsatz
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{37}$	$\frac{36}{37}$

erwarteter Durchschnittswert:
$$\frac{1}{37}\cdot 35 \text{ Einsatz} - \frac{36}{37}\cdot 1 \text{ Einsatz} = -\frac{1}{37} \text{ Einsatz}$$
(leichtere Variante: Es wird mit 1 000 DM Einsatz gespielt.)
Auf die Dauer wird also der Spieler $\frac{1}{37}$ seines Einsatzes verlieren (in Wirklichkeit noch mehr, da er meist nicht genügend Geld hat, um bei anfänglichen Verlusten genügend lange zu spielen). Das Roulette-Spielen in solchen Kasinos lohnt sich nicht.

4. Ein gelernter Kellner, der sich selbständig machen möchte, steht vor folgender Entscheidung: Er kann zu gleichem Preis eine Wirtschaft in der Innenstadt pachten, die einen durchschnittlichen Tagesgewinn von 250 DM bringt, oder aber ein Ausflugslokal am Rande der Stadt, das bei gutem Wetter täglich 600 DM, bei schlechtem Wetter aber nur 120 DM Gewinn abwirft. Die Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter beträgt erfahrungsgemäß $\frac{1}{3}$.
Wie soll sich der Kellner entscheiden ?

Lösung:

	gutes Wetter	schlechtes Wetter
Ertrag	600 DM	120 DM
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

erwarteter Durchschnittswert: $\frac{1}{3} \cdot 600$ DM $+$ $\frac{2}{3} \cdot 120$ DM $=$ 280 DM

Der Kellner sollte das Ausflugslokal pachten.

. In einem Fernsehapparat sind 6 Bauteile (Röhren, Widerstände usw.) hintereinandergeschaltet. Sie sind voneinander unabhängig und alle von gleicher Zuverlässigkeit. Soeben ist der Apparat kaputt gegangen. Es muß an diesen sechs Bauteilen liegen. Aber an welchem ?
Zur Beantwortung dieser Frage gibt es zwei Testmethoden. Für welche würdest du dich entscheiden ?
Methode I: Die sechs Bauteile werden der Reihe nach einzeln untersucht.
Methode II: Es werden zunächst die ersten drei Bauteile zusammen untersucht; und dann, falls notwendig, die letzten drei. In der Gruppe, welche den defekten Bauteil enthält, wird der Reihe nach jeder Bauteil untersucht.

Lösung (i = intakt, d = defekt):

Methode I:

Lage des Defektes	Anzahl der Untersuchungen	Wahrscheinlichkeit
d i i i i i	1	$\frac{1}{6}$
i d i i i i	2	$\frac{1}{6}$
i i d i i i	3	$\frac{1}{6}$
i i i d i i	4	$\frac{1}{6}$
i i i i d i	5	$\frac{1}{6}$
i i i i i d	5 (denn eine eigene Untersuchung des sechsten Bauteils ist in diesem Falle nicht erforderlich)	$\frac{1}{6}$

erwarteter Durchschnittswert für die Anzahl der Untersuchungen:

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3\frac{1}{3}.$$

Methode II:

Lage des Defektes	Anzahl der Untersuchungen	Wahrscheinlichkeit
d i i i i i	2	$\frac{1}{6}$
i d i i i i	3	$\frac{1}{6}$
i i d i i i	3 (s.o.)	$\frac{1}{6}$
i i i d i i	2	$\frac{1}{6}$
i i i i d i	3	$\frac{1}{6}$
i i i i i d	3 (s.o.)	$\frac{1}{6}$

erwarteter Durchschnittswert für die Anzahl der Untersuchungen:

$$2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Die zweite Methode ist also der ersten auf Dauer überlegen. Diese Feststellung ist trotz des geringen Unterschiedes wichtig, wenn eine solche Untersuchung sehr oft gemacht werden muß.

Die für Methode II chrakteristische Koppelung wird beispielsweise auch bei manchen Blutuntersuchungen durchgeführt, wenn der Verdacht besteht, daß in einer bestimmten Gruppe von Lebewesen eine bestimmte Krankheit sich breit macht.

rognosefunktion

. Beim Schießen auf eine Tontaube trifft ein Sportschütze erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 . Welche durchschnittliche Trefferzahl darf er bei einer Serie von 4 aufeinanderfolgenden Tontauben erwarten ?

Lösung:

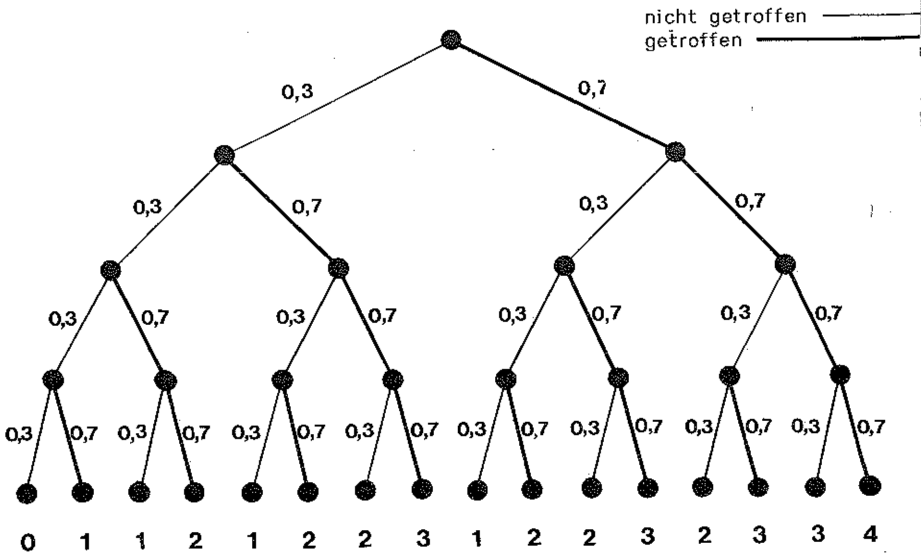


Fig. 25

Wahrscheinlichkeitsverteilung (s. Fig.25):

0	1	2	3	4
$0{,}3^4$	$4\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7$	$6\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^2$	$4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^3$	$0{,}7^4$

erwarteter Durchschnittswert:

$0\cdot 0{,}0081 + 1\cdot 0{,}0756 + 2\cdot 0{,}2646 + 3\cdot 0{,}4116 + 4\cdot 0{,}2401 = 2{,}800$

Dieses Ergebnis erhält man vergleichsweise einfach auch durch folgende Überlegung: Im Schnitt schießt der Sportler mit jedem der vier Schüsse 0,7 Tauben, insgesamt also $4\cdot 0{,}7$ Tauben = 2,8 Tauben.

2. Winfried erhält für jede gute Note (1 oder 2) von seinen Eltern 2 DM . In der letzten Woche hat er eine Mathematikarbeit, eine Deutscharbeit und eine Erdkundearbeit geschrieben. Seine Chance auf eine gute Note beurteilt er in allen drei Arbeiten auf 0,3 . Wie viele DM kann er erwarten ?

3. Auf einer Hühnerfarm werden die Eier in fünf Gewichtsklassen eingeteilt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein gelegtes Ei einer bestimmten Klasse angehört, entnimmst du der folgenden Tabelle. Sie enthält auch die zugehörigen Reingewinne pro Ei (in Pf).

Gewichtsklasse	1	2	3	4	5
Reingewinn pro Ei	3	2	1	0	-1
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Welcher Reingewinn pro Ei ist insgesamt zu erwarten ?

Lösung: $3\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}1 - 1\cdot 0{,}1 = 1{,}4$
Der pro Ei zu erwartende Reingewinn ist 1,4 Pf .

Es sind hier recht viele Beispiele aufgeführt worden (und weitere folgen unten), weil

- dieser Aufgabentyp noch nicht sehr verbreitet ist und entsprechende Aufgaben für den Lehrer weder leicht zu finden noch leicht zu konstruieren sind
- gerade solche Aufgaben einen wesentlichen Beitrag zur Realisierung des Fundamentalziels unseres Curriculums liefern

die Ersterprobung gezeigt hat, daß viele Schüler mit solchen Aufgaben erhebliche Schwierigkeiten haben.

(or allem der letztgenannten Tatsache muß Rechnung getragen, ihr muß entgegengeteuert werden. Einmal durch genügend viele Beispiele, an denen der Schüler das in er Tat nicht leichte Mathematisieren stochastischer Situationen (insbesondere noch inmal das Aufstellungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei mehrstufigen Experimenten) erlernen kann; und zum anderen durch eine wohlüberlegte Aufgabensequenierung:

instieg mit interessanten Spielsituationen, Übergang zu Glücksspielen aus der Umvelt des Schülers, weiter zu anderen Situationen aus diesem Bereich (Haus, Sport, reizeit) bis schließlich hin zu Problemen aus der Wirtschaft.

s hat sich gezeigt, daß auch Schüler der 8.Klasse an Fragen wirtschaftlicher Art och nicht sonderlich interessiert sind; man kann sie dafür wohl nur dann gewinnen, venn die gemeinsame Struktur aller dieser Anwendungsaufgaben klar hervortritt und venn deutlich wird, daß Spiel und Ernstfall keine Alternativen sind, daß vielmehr das Spiel als Simulation des Ernstfalls (in Gedanken, aber auch konkret im Klassenraum) ingesetzt werden kann.

Ein Beispiel: Die o.a. beiden Testmethoden beim defekten Fernsehapparat (s. S.67) assen sich simulieren durch Hineingreifen in eine Urne mit 5 weißen Bällen und einem schwarzen Ball, und zwar

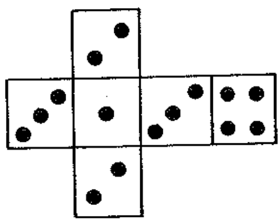
- bei Methode I durch aufeinanderfolgendes Ziehen je eines Balles ohne Zurücklegen
- bei Methode II durch verdecktes Aufteilen der Urne in zwei Urnen mit je 3 Bällen und anschließendem Ziehen aus den beiden Urnen analog zu Methode I .

Oder: Das o.a. Schießen auf Tontauben (s. S.67) kann simuliert werden durch ein schiefgestelltes Galton-Brett mit vier Zapfenreihen und den Trennwahrscheinlichkeiten 0,3 und 0,7 bei jedem Zapfen.

Die Simulation durch ein reales Experiment kann auch als einzig verbleibender Ausweg angesehen und verfolgt werden, wenn das Aufstellen der Wahrscheinlichkeitsverteilung oder das Rechnen im damit gewonnenen Modell der Ausgangssituation nicht gelingt.

Typische Aufgaben und Testitems

Aufgaben



1. Ein Würfel hat folgendes Netz:
   a) Welche Ergebnisse sind möglich und welche Wahrscheinlichkeit haben sie ?
   b) Welches ist der erwartete Durchschnittswert ?
2. Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen. Wie oft ist Wappen zu erwarten?
3. Für die Anzahl der Sechsen beim dreimaligen Werfen eines normalen Würfels gilt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Anzahl	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

   a) Bestätige diese Verteilung mit Hilfe eines Baumdiagramms.
   b) Bestimme den erwarteten Durchschnittswert. Was sagt er aus ?
   c) Zu Beginn des Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiels darf jeder Spieler dreimal werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er dabei ins Spiel kommt ?
4. Ist folgendes Spiel für dich günstig ?
   Du sollst 2 Münzen werfen. Wenn zweimal "Zahl" kommt, kriegst du 2 DM . Wenn einmal "Zahl" kommt, erhältst du 1 DM. Wenn "Zahl" garnicht kommt, verlierst du 5 DM .

5. Jemand bietet dir folgendes Spiel an:
Du würfelst und bekommst so viele Pfennige, wie der Würfel Augen zeigt. Bei "Sechs" darfst du noch einmal würfeln und bekommst noch einmal für jedes Auge einen Pfennig. Jedes erstmalige Würfeln kostet allerdings 4 Pfennig.
Ist das Spiel für dich günstig ?

6. Bei einem Tennis-Turnier wirken mehrere etwa gleichgute Spieler mit. Zum Gewinn eines Spiels braucht man drei gewonnene Sätze. Mit wie vielen Sätzen pro Spiel muß man durchschnittlich rechnen ?

7. Bei einer Wohltätigkeitslotterie werden 10 000 Lose ausgegeben, das Los zu 1 DM. Folgende Gewinne sind möglich:
Ein erster Preis zu 1 000 DM, zwei zweite Preise zu 500 DM, fünf dritte Preise zu 100 DM, zehn vierte Preise zu 10 DM und hundert fünfte Preise zu 5 DM.
Welchen Gewinn darf man pro Los erwarten ? Erläutere das Ergebnis.

8. 1974 hatten 38% aller Ehen in der Bundesrepublik Deutschland keine Kinder, 26% ein Kind, 22% zwei Kinder, 9% drei Kinder und 5% mehr als drei Kinder.
Welches war damals die durchschnittliche Kinderzahl ? Was folgt daraus für die Bevölkerungsentwicklung der Bundesrepublik ?
Anleitung: Rechne der Einfachheit halber für "mehr als drei Kinder" mit "fünf" Kindern.

9. Plattenspieler sind umso besser, je gleichmäßiger sie sich drehen. Die Stiftung Warentest überprüft die Antriebsmotoren von Plattenspielern der Firma A und der Firma B. Die Abweichungen von der Normaldrehung werden in vier Klassen gleicher Breite eingeteilt; hier ihre Wahrscheinlichkeiten:

Abweichung	0	1	2	3
Firma A	0,70	0,25	0,04	0,01
Firma B	0,75	0,20	0,05	0,00

Für welchen Plattenspieler würdest du dich (unter sonst gleichen Voraussetzungen) entscheiden ?

10. Bei einem bestimmten Geschäftsvorhaben kann ein Kaufmann 3000 DM mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 gewinnen und 4 000 DM mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 verlieren . Sollte er das Geschäft machen ?

11. Ein Zeitungshändler bezieht jede Woche 3 Exemplare einer selten gekauften Wochenzeitung. Die Nachfrage nach dieser Zeitung sieht erfahrungsgemäß so aus:

Anzahl	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,10	0,30	0,40	0,15	0,05

Der Händler erwirbt jedes Exemplar für 1,50 DM und verkauft es für 3 DM .
Nicht verkaufte Exemplare kann er nicht mehr zurückgeben.
a) Welches ist der zu erwartende wöchentliche Gewinn an dieser Zeitschrift ?
b) Könnte er diesen Gewinn erhöhen, wenn er nur 2 Exemplare bereithält ?

Testitems

1. $\frac{3}{4}$ ist der erwartete Durchschnittswert der Verteilung

$\boxed{r}$

$\frac{1}{3}$	2
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\boxed{r}$

0	3	6
$\frac{13}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$\boxed{f}$

1	2	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Damit ein erwarteter Durchschnittswert gebildet werden kann, ist notwendig, daß

$\boxed{r}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt .

$\boxed{f}$ ein bestimmtes Ergebnis erwartet wird .

$\boxed{r}$ die möglichen Ergebnisse Zahlen sind .

3. Herr und Frau Weber legen folgende Familienplanung fest: Sie wollen solange Kinder kriegen, bis ein Junge geboren wird. Sie wollen aber höchstens 3 Mädchen haben.
Mit dieser Planung können sie 2 Kinder erwarten. $\boxed{f}$

Herr und Frau Schneider planen anders: Sie wollen Kinder kriegen, bis sie darunter einen Jungen und ein Mädchen haben. Aber auch sie wollen nicht mehr als 3 Kinder.
Sie können 3 Kinder erwarten. $\boxed{f}$

Beide Verhaltensweisen führen, wenn sie allgemein angewandt werden, zum Bevölkerungsrückgang. $\boxed{f}$

Zeitbedarf

etwa 5 Stunden

Schulbücher

GAMMA (Hauptschule) 9, S.101 - 103 - Stuttgart: Klett

Mathematik in der Sekundarstufe 8A, S.92 - 110, 8B, S.155 - 166 - Düsseldorf: Schulbuchverlag Vieweg

PLUS 9, S.224 - 230 - Paderborn: Schöningh

4.4 3. Phase: DURCHSCHNITTLICHE (UND ERWARTETE) ABWEICHUNG VOM DURCHSCHNITTSWERT

Didaktische Begründung

Nachdem anhand einleuchtender Beispiele erkannt ist, daß der Durchschnittswert zur Charakterisierung einer Verteilung nicht ausreicht, wird ein leistungsfähiges Streumaß erarbeitet. Wir konzentrieren uns dabei auf die durchschnittliche Abweichung, weil sie im Anschluß an die Beschäftigung mit dem Durchschnittswert naheliegt und für unsere Zwecke durchaus genügt. Die Spannweite zwischen größtem und kleinstem Wert ist ein zu grobes Maß, weil sie die Verteilung nur ungenügend berücksichtigt. Die Standardabweichung hingegen ist kaum zu motivieren und (scheinbar) schwieriger zu berechnen; ihre Vorzüge erweisen sich erst jenseits des geplanten Gesamtlehrgangs.

Auf eine Ausnahme ist allerdings hinzuweisen. Wenn ein Klassensatz von Taschenrechnern vorhanden ist, auf denen Durchschnittswert und Standardabweichung festprogrammiert sind, wird man selbstverständlich dieses Streumaß benutzen und erläutern. Ansonsten bleibt der Aufbau der 3.Phase unberührt .

Wie schon beim Durchschnittswert soll versucht werden, die außermathematische Bedeutung des gewählten Streumaßes aufzuzeigen. Dabei tritt der wahrscheinlichkeitstheoretische hinter den statistischen Aspekt zurück.

Ziele

1. die durchschnittliche (erwartete) Abweichung einer Werteliste bzw. einer Häufigkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsverteilung) vom (erwarteten) Durchschnittswert berechnen können
2. erläutern können, wie man die durchschnittliche (erwartete) Abweichung berechnet
3. geeignete Sachprobleme durch Bilden des (erwarteten) Durchschnittswertes und der durchschnittlichen (erwarteten) Abweichung lösen können
4. erläutern können, wozu man die durchschnittliche (erwartete) Abweichung braucht

Hinweis:
Bei ungünstigen Voraussetzungen bzw. unter Zeitdruck sollte man sich in dieser Phase mit der durchschnittlichen Abweichung begnügen, also auf das analoge wahrscheinlichkeitstheoretische Streumaß verzichten.

Inhalte

Es werden zwei vergleichbare Häufigkeitsverteilungen betrachtet, die zwar im Durchschnittswert übereinstimmen, aber dennoch ganz verschieden ausfallen. Offensichtlich unterscheiden sie sich im Ausmaß der Abweichung vom Durchschnittswert (d.h. der Differenz Wert – Durchschnittswert (falls Wert $\geqq$ Durchschnittswert) oder Durchschnittswert – Wert (andernfalls)). Da es bei beiden Verteilungen größere und kleinere Abweichungen gibt und zudem unterschiedlich viele, empfiehlt es sich, jeweils den Durchschnittswert der Abweichungen zu nehmen und diese beiden Werte miteinander zu vergleichen.

durchschnittliche Abweichung = Durchschnittswert der Abweichungen vom Durchschnittswert

Gegenüber dieser schon recht komplexen Formulierung nimmt sich das zugehörige Flußdiagramm besonders vorteilhaft aus:

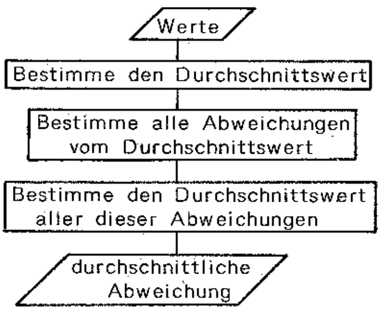


Fig. 26

Beispiel:

Wert	4	6	9	10
Anzahl	3	5	4	2

Durchschnittswert: 7

durchschnittliche Abweichung:

$$\frac{3\cdot(7-4) + 5\cdot(7-6) + 4\cdot(9-7) + 2\cdot(10-7)}{3+5+4+2} = \frac{28}{14} = 2$$

Analog ergibt sich für Wahrscheinlichkeitsverteilungen (mit dem in der 2.Phase festgehaltenen schrittweisen Übergang):

erwartete Abweichung = erwarteter Durchschnittswert der Abweichungen vom erwarteten Durchschnittswert der Ausgangswerte

Beispiel: Augensumme beim Doppelwürfel

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

erwarteter Durchschnittswert: 7
erwartete Abweichung:

$$(7-2)\cdot\frac{1}{36} + (7-3)\cdot\frac{2}{36} + (7-4)\cdot\frac{3}{36} + (7-5)\cdot\frac{4}{36} + (7-6)\cdot\frac{5}{36} + (7-7)\cdot\frac{6}{36}$$
$$+ (8-7)\cdot\frac{5}{36} + (9-7)\cdot\frac{4}{36} + (10-7)\cdot\frac{3}{36} + (11-7)\cdot\frac{2}{36} + (12-7)\cdot\frac{1}{36} = 2\frac{17}{18}$$

Zwei Beispiele für die Relevanz des erarbeiteten Streumaßes:

1. Der Durchschnittswert der Noten einer Klassenarbeit gibt Aufschluß über die momentane Leistungsstärke der Klasse. Ist die durchschnittliche Abweichung gering, so kann der Lehrer auf der erreichten Basis weiterarbeiten. Ist sie groß, weist die Klasse also relativ viele gute Schüler und viele schlechte Schüler auf, so muß er versuchen, mit der schlechten Gruppe gezielt zu wiederholen, für die nächste Zeit eine (partielle) Binnendifferenzierung durchzuführen, usw.

2. Erwartete Abweichung beim Tagesgewinn für die Stadtwirtschaft (s. S.66): 0 DM, erwartete Abweichung beim Tagesgewinn für das Ausflugslokal:

   $\frac{1}{3}\cdot(600\text{ DM} - 280\text{ DM}) + \frac{2}{3}\cdot(280\text{ DM} - 120\text{ DM}) = 213\text{ DM}$

   Wenn der Kellner die starke Schwankung des Tagesgewinns beim Ausflugslokal scheut, weil sie ein größeres Risiko bedeutet, wird er sich trotz des höheren erwarteten Durchschnittswertes gegen das Ausflugslokal entscheiden.

Die Anwendungssituationen in dieser Phase und die hierzu erarbeiteten Lösungen sollten immer wieder Anlaß geben, Durchschnittswert und durchschnittliche Abweichung in ihrer unterschiedlichen Aussage einander gegenüberzustellen:

Der Durchschnittswert weist auf die Höhe, die Stärke, das Ausmaß einer (ständig wiederholten) Leistung, einer Produktion, eines Merkmals hin (groß-klein, hoch-tief, lang-kurz, viel-wenig usw.), die durchschnittliche Abweichung hingegen auf das Ausmaß der zugehörigen Schwankungen (gleichmäßig-ungleichmäßig, beständig-unbeständig, konstant-sprunghaft usw.). Die Schüler müssen schließlich mit eigenen Worten und anhand geeigneter Beispiele sagen können, wozu solche stochastischen Kennwerte dienen (s. Ziele 4 in allen Phasen dieses Kapitels). Und sie müssen instandgesetzt werden, einer noch in der Situation formulierten Fragestellung zu entnehmen, welcher Kennwert Hilfe bringt. Dazu gehört insbesondere die Vertrautheit mit den o.a. Adjektiven und die Fähigkeit, von ihnen auf das zugehörige Maß überzugehen, d.h. sachgemäß zu modellieren.

Methoden und Medien

Die Detailstrategie des Unterrichts kann sich eng an diejenige in der 1.Phase anlehnen. Dies gilt auch für die auszuwählenden Beispiele.

Es ist deshalb auch durchaus möglich, Durchschnitt und durchschnittliche Abweichung in der 1.Phase zusammenzufassen und erwarteten Durchschnittswert sowie erwartete Abweichung in die 2.Phase zu geben. Hierzu liegen positive Erfahrungen vor.

Eine geeignete Einstiegssituation:

vorletzte Klassenarbeit

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	6	4	5	5	4	1

letzte Klassenarbeit

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	1	6	12	4	2	0

Durchschnittswert beider Arbeiten: 3
Worin unterscheiden sie sich ? –

Beispiele für Situationen, in denen das Streumaß von besonderer Wichtigkeit ist:

- Klimadaten (z.B. Temperatur und Niederschlag (Charakterisierung von Land- und Seeklima))
- Monatsverdienste
- Wettkampfleistungen von Sportlern (konstante oder schwankende Form)
- Körperlängen bei etwa gleichalten Kindern (Anteile der jeweiligen Größen bei der Kindermode)
- Angebote verschiedener Kaufhäuser und Supermärkte, die dasselbe Produkt betreffen (Lohnt es sich bei Bedarf, die Kaufhäuser abzuklappern ?)

Für die rechentechnisch schwerfällige Bestimmung der durchschnittlichen Abweichung empfiehlt sich, wie auch schon beim Durchschnittswert, der Taschenrechner. Die Erprobung hat allerdings gezeigt, daß dieses Medium nicht ohne weiteres die bekannten Rechenschwächen der Hauptschüler kompensieren kann, daß vielmehr bei den ersten Beispielen eine sorgsame Anleitung des Lehrers erforderlich ist.

Typische Aufgaben und Testitems

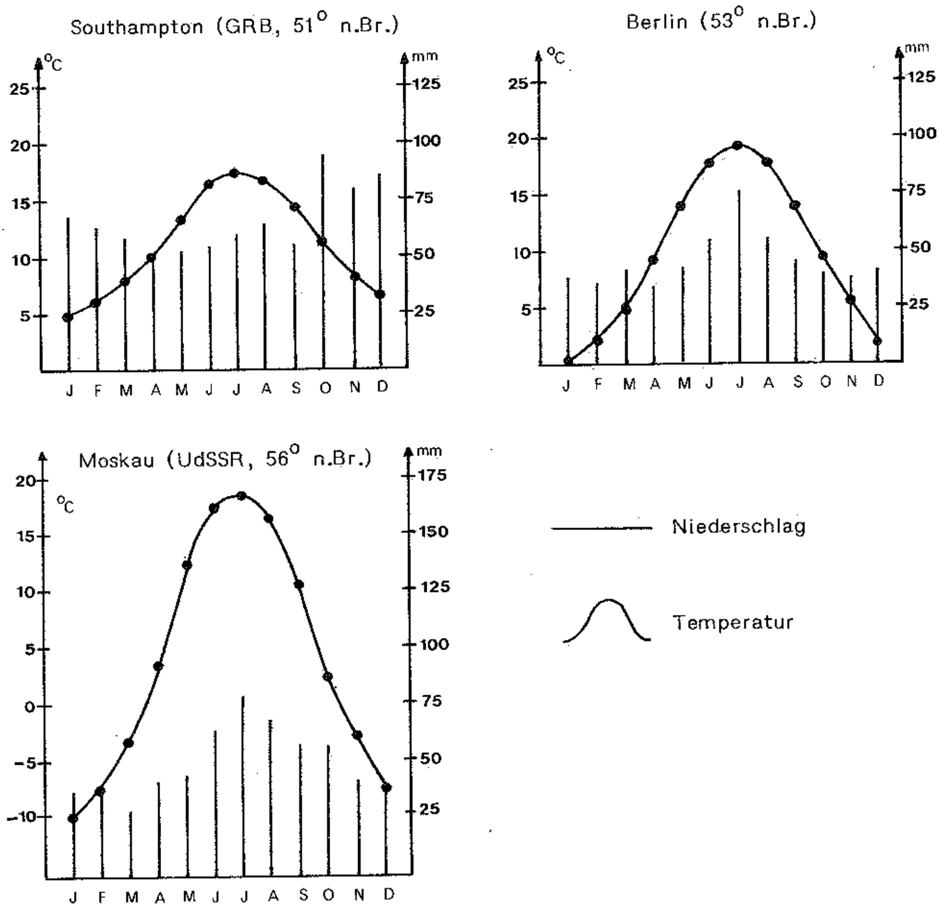
Aufgaben

1. Bestimme Durchschnittswert und durchschnittliche Abweichung für den Preis desselben Waschmittelpaketes, den man in 15 Kaufhäusern einer Großstadt festgestellt hat:

Preis	3,60 DM	3,70 DM	3,90 DM	4,10 DM	4,20 DM	4,30 DM
Anzahl	1	3	4	4	2	1

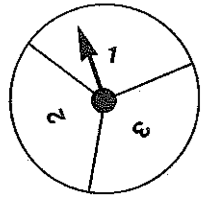
Diskutiere die Ergebnisse.

2. Hier siehst du drei Klimadiagramme.



a) Bestimme jeweils Durchschnittswert und durchschnittliche Abweichung bei Temperatur und Niederschlag.
b) Wie erklärst du die Unterschiede dieser Werte bei Orten, die doch annähernd gleiche Breite haben ?
(Stichworte: Land- und Seeklima, Einfluß des Golfstroms)

3. Das nebenstehende Roulette wird so lange gedreht, bis eine Zahl zum zweiten Mal erscheint.
   a) Welche Ergebnisse für die Anzahl der Versuche sind möglich und wie wahrscheinlich sind sie ?
      Anleitung:
      Zeichne ein Baumdiagramm.
   b) Bestimme den erwarteten Durchschnittswert und die erwartete Abweichung für diese Anzahl.



4. In der Bundesrepublik Deutschland galt für die Kinderzahl einer Familie folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

   1962

Kinderzahl	0	1	2	3	4 und mehr
Wahrscheinlichkeit	0,21	0,28	0,26	0,13	0,12

   1974

Kinderzahl	0	1	2	3	4 und mehr
Wahrscheinlichkeit	0,38	0,26	0,22	0,09	0,05

   Bestimme jeweils den erwarteten Durchschnittswert und die erwartete Abweichung.
   Diskutiere die Ergebnisse.
   Hinweis:
   Setze für "4 und mehr" einfach "fünf" .

5. Zwei Maschinen A und B schneiden Stahlstife auf die Länge 20 mm zu. Für die tatsächlichen Stiftlängen gilt erfahrungsgemäß folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

   Maschine A

Länge	19,8	19,9	20,0	20,1	20,2
Wahrscheinlichkeit	0,10	0,20	0,40	0,20	0,10

   Maschine B

Länge	19,8	19,9	20,0	20,1	20,2
Wahrscheinlichkeit	0,05	0,30	0,30	0,30	0,05

   Welche Maschine arbeitet zuverlässiger ?

Testitems

1. Die Verteilung

2,0 cm	4,0 cm	5,0 cm
3	1	1

   [f] hat den Durchschnittswert 4,0 cm .
   [r] hat die durchschnittliche Abweichung 1,2 cm .
   [f] hat den häufigsten Wert 5,0 cm .

2. Wenn sämtliche Ausgangswerte um 1 cm erhöht werden, dann

   [r] erhöht sich auch der Durchschnittswert um 1 cm .
   [r] erhöht sich auch der häufigste Wert um 1 cm .
   [f] erhöht sich auch die durchschnittliche Abweichung um 1 cm .

3. Hans und Heinz springen je fünfmal weit. Hier die Ergebnisse.
   Hans: 4,70 m; 4,90 m; 4,80 m; 4,90 m; 4,80 m
   Heinz: 4,50 m; 4,80 m; 5,00 m; 4,60 m; 4,90 m

$\boxed{r}$ Hans springt im Schnitt weiter als Heinz.

$\boxed{r}$ Heinz springt unbeständiger als Hans.

$\boxed{r}$ Heinz springt am weitesten von beiden.

4. Es werden drei Münzen geworfen.

$\boxed{f}$ Für die Anzahl der Wappen gilt die Verteilung

0	1	2	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

$\boxed{r}$ Der erwartete Durchschnittswert ist 1,5 .

$\boxed{f}$ Die erwartete Abweichung ist 1.

Zeitbedarf

4 Stunden

Schulbücher

Die Welt der Zahl - Neu 7, S.109, 8, S.88 - Hannover: Schroedel

Neue Mathematik 9, S.188 - 193 - Hannover: Schroedel

PLUS 7, S.68 - 69, 9, S.228 - 231 - Paderborn: Schöningh

Welt der Mathematik 8, S.116 - 117 - Hannover: Schroedel

4.5 Abschlußtest

Vorbemerkung

Der nachfolgende Test ist ein lernzielorientierter Leistungstest; er soll zum Abschluß des Kapitels STOCHASTIK 8 geschrieben werden.

Eine Erstfassung dieses Tests wurde 1978 und 1979 in 13 Hauptschulklassen mit insgesamt 332 Schülern erprobt und nach intensiver Auswertung (auch der Erfahrungen im vorangegangenen Jahrescurriculum) wesentlich verbessert. Die Zweitfassung wurde 1980 und 1981 einer weiteren Erprobung unterzogen: in 10 Hauptschulklassen mit insgesamt 257 Schülern. Sie führte nur noch zu einigen sprachlichen Vereinfachungen.

Lernziele

Im Test werden folgende Lernziele abgeprüft:

Item 1: zu einer Werteliste den Durchschnittswert, die durchschnittliche Abweichung und die Spannweite bestimmen können

Item 2: zu einer Häufigkeitsverteilung den häufigsten Wert, den Durchschnittswert und die durchschnittliche Abweichung bestimmen können

Item 3: ein Sachproblem durch Bilden des Durchschnittswertes lösen können

Item 4: ein Sachproblem durch Bilden der durchschnittlichen Abweichung lösen können

Item 5: erläutern können, was der Durchschnittswert aussagt

Item 6: den Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen können

Item 7: ein Sachproblem durch Bilden des Erwartungswertes lösen können

Item 8: erläutern können, was der Erwartungswert aussagt

Hinsichtlich der Taxonomiestufen

- wissen (w)
- verstehen (v)
- anwenden (a)
- analysieren (y)
- synthetisieren (s)
- bewerten (b)

und der Sachthemen in STOCHASTIK 8

- Durchschnittswert (D)
- Erwartungswert (E)
- durchschnittliche und erwartete Abweichung (A)

sind diese 8 Ziele folgendermaßen zu lokalisieren:

Taxonomiestufe / Sachthema	w	v	a	y	s	b
D	1;2	5	3			
E	6	8	7			
A	1;2		4			

Testkonstruktion

s.Unterkapitel 3.6

Lösungen

	1	2	3	4	5	6	7	8
a)	r	r	r	r	f	f	r	f
b)	f	r	f	f	f	r	r	f
c)	f	r	r	f	f	r	f	r

Auswertung

Für die Benotung (zu deren Problematik s.Unterkapitel 3.6) wird folgender Vorschlag unterbreitet:

1. Man gibt für jede zutreffend beurteilte Aussage 1 Punkt.
2. Man gibt weiterhin für jede vollständig gelöste Aufgabe 1 Punkt.
3. Man addiert alle Punkte eines Schülers und hat damit seine Rohpunktzahl. Maximal kann er $8 \cdot 4$ Punkte = 32 Punkte erreichen.
4. Schüler, die lediglich raten, würden durchschnittlich 13 Punkte erreichen.
   Denn die Ratewahrscheinlichkeit für jede Aussage ist $\frac{1}{2}$, für jede Aufgabe also $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Und schließlich $24 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{8} = 13$.
   Man gibt nun für alle Rohpunktzahlen unter diesem Erwartungswert 13 die Note 6 und teilt die anderen Rohpunktzahlen gemäß den übrigen fünf Noten in fünf gleichbreite Klassen ein. Dies führt zu folgendem Schlüssel:

Punkte	Note
0–12	6
13–16	5
17–20	4
21–24	3
25–28	2
29–32	1

Schule: ....

Klasse: ....

Name: ....

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK
Klasse 8

ABSCHLUSSTEST

Liebe Schülerin, lieber Schüler !

Durch den folgenden Test sollen deine Kenntnisse und Fähigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik überprüft werden.

Schreibe in ein Kästchen den Buchstaben r hinein, wenn du die dahinterstehende Aussage für richtig hältst. Schreibe den Buchstaben f hinein, wenn du diese Aussage für falsch hältst.

Merke:

Jedes Kästchen muß entweder mit r oder mit f ausgefüllt werden; ein leeres Kästchen zählt als Fehler.

In einer Aufgabe können alle drei, oder zwei, oder eine, oder garkeine Aussagen richtig sein.

Du hast insgesamt 45 Minuten Zeit.

Rechne bitte auf Schmierpapier!

Viel Erfolg !

1. Von Montag bis Freitag einer Woche hat Karl für seine Hausarbeiten gebraucht: 30 Minuten, 60 Minuten, 65 Minuten, 45 Minuten, 50 Minuten .

☐ a) Er hat im Durchschnitt 50 Minuten gebraucht.
☐ b) Die durchschnittliche Abweichung beträgt 15 Minuten.
☐ c) Größter und kleinster Wert unterscheiden sich um 30 Minuten.

2. In einer Sportgruppe liegt folgende Altersverteilung vor:

Alter in Jahren	14	15	16	17	18	19
Anzahl der Schüler	1	2	4	4	7	2

☐ a) Am häufigsten sind die Sportler, die 18 Jahre alt sind.
☐ b) Das Durchschnittsalter der Sportler beträgt 17 Jahre.
☐ c) Die durchschnittliche Abweichung beträgt 1,1 Jahre.

3. Zwei Parallelklassen haben denselben Test geschrieben. Die erreichten Punkte verteilen sich so:

Klasse I

Punkte	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Schüler	0	1	3	8	8	6	4

Klasse II

Punkte	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Schüler	1	3	5	5	5	5	1

☐ a) Klasse I hat besser abgeschnitten als Klasse II .
☐ b) Beide Klassen haben zusammen im Durchschnitt 7,8 Punkte erreicht.
☐ c) Peter, der in Klasse II geht, hat im Test 8 Punkte geschrieben. Er lag damit über dem Durchschnitt seiner Klasse.

4. Herr Bauer und Herr Wagner kegeln. Es kommt darauf an, möglichst viele der 9 Kegel umzuwerfen. Sie machen 10 Runden. Hier ihre Leistungen:

Herr Bauer: 8; 7; 5; 9; 6; 3; 8; 7; 2; 5 Kegel
Herr Wagner: 3; 8; 9; 4; 7; 8; 3; 9; 1; 8 Kegel

☐ a) Insgesamt haben beide Herren gleich gut gekegelt.

☐ b) Beide Herren haben gleich viele Runden gewonnen.

☐ c) Beide sind in ihren Leistungen gleich beständig.

5. ☐ a) Über dem Durchschnittswert liegen immer genau so viele Werte wie unter ihm .

☐ b) Der Durchschnittswert liegt immer genau in der Mitte zwischen größtem und kleinstem Wert.

☐ c) Der Durchschnittswert ist immer der häufigste Wert.

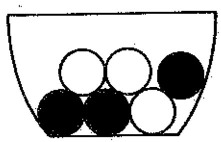
6. Hinweis: Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in a), b) und c) sind richtig. Du sollst nur nachprüfen, ob aus ihnen die erwarteten Durchschnittswerte richtig berechnet worden sind.

☐ a) Wirft man zwei Münzen, so gilt

Anzahl der Wappen	0	1	2
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Der erwartete Durchschnittswert für die Anzahl der Wappen ist $\frac{1}{2}$.

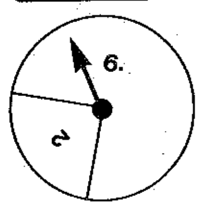
☐ b) Aus der Urne werden 3 Bälle herausgeholt. Für die Anzahl der weißen Bälle unter ihnen gilt:



Anzahl	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

Der erwartete Durchschnittswert für die Anzahl der weißen Bälle ist 1,5 .

☐ c) Für dieses Glücksrad gilt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:



Zahl	2	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Sie hat den erwarteten Durchschnittswert 5 .

7. Auf dem Jahrmarkt ist eine Glücksbude, an der folgendes Spiel angeboten wird: Du darfst mit zwei gewöhnlichen Würfeln werfen. Zeigen beide 6, dann kriegst du 10 DM. Zeigt nur ein Würfel 6, dann kriegst du 1 DM . Sonst kriegst du nichts.

☐ a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das vom Budenbesitzer ausbezahlte Geld ist

Betrag	0 DM	1 DM	10 DM
Wahrscheinlichkeit	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

☐ b) Der erwartete Durchschnittswert dieser Verteilung ist $\frac{5}{6}$.

☐ c) Jeder Wurf der beiden Würfel kostet 1 DM . Das Spiel ist also für dich günstig.

8. ☐ a) Der erwartete Durchschnittswert ist immer der für dich günstigste Wert.

☐ b) Er gibt den Wert mit der höchsten Wahrscheinlichkeit an .

☐ c) Er gibt annähernd an, welchen Durchschnittswert die Werte haben, wenn man viele Versuche gemacht hat.

5. CURRICULUM "STOCHASTIK 9"

5.1 Vorbemerkungen

Zum Aufbau des Curriculums

Das Curriculum STOCHASTIK 9 ist wesentlich anders strukturiert als seine Vorgänger STOCHASTIK 7 und STOCHASTIK 8 .

Wir stellen keine neuen stochastischen Methoden mehr vor. Das bedeutet jedoch nicht, daß wir eine Wiederholung im klassischen Sinne vorschlagen; vielmehr streben wir eine Vertiefung im Sinne einer letzten Windung des spiraligen Weges zum Ziel des Gesamtcurriculums an: Der Schüler soll nun lernen, bei der Bewältigung komplexer Realsituationen stochastische Methoden sinnvoll einzusetzen.

Als Orientierungshilfe, nicht als verbindliche Vorgabe, skizzieren wir vier Unterrichtsprojekte aus verschiedenen Bereichen (Technik, Wissenschaft, Wirtschaft, Unterhaltung), die uns als Abschluß geeignet erscheinen.

Aus Zeitgründen dürfte es kaum möglich sein, im Unterricht der 9.Klasse (und später eventuell der 10.Klasse) mehr als ein Projekt aufzugreifen. Welches, wird entscheidend von der Interessenlage der Schüler und des Lehrers sowie auch von unterrichtstechnischen Voraussetzungen abhängen. Selbstverständlich kann auch ein anderes, aus der Literatur bekanntes oder vom Lehrer geplantes Projekt bearbeitet werden, wenn nur gesichert ist, daß dies mit den in STOCHASTIK 7 und STOCHASTIK 8 erworbenen Mitteln möglich ist. Dies trifft für unsere Projekte jedenfalls zu.

Zur didaktischen Funktion von Unterrichtsprojekten

Kennzeichnung von Unterrichtsprojekten

Unter einem Unterrichtsprojekt verstehen wir eine Unterrichtseinheit, die durch folgende Merkmale gekennzeichnet ist:

- Im Zentrum des Unterrichts steht ein größeres reales Problem aus dem Lebens- und Erfahrungsbereich der Schüler.
- Das Thema orientiert sich nicht an irgendeiner Fachstruktur. Es kann fächerübergreifend sein und außerschulische Komponenten enthalten.
- Die Analyse des Problems, die Erarbeitung von Lösungsstrategien und schließlich die Lösung selbst wird im wesentlichen von den Schülern geleistet. Der Lehrer nimmt eine koordinierende und beratende, notfalls auch eine lenkende Funktion ein. Informationen gibt er nur dort, wo es unumgänglich erscheint.

Bei der Durchführung solcher Projekte müssen Schwierigkeiten bewältigt werden, die aus der bestehenden Einteilung des Unterrichts in Schulfächer, aus den Rollenfixierungen von Lehrern und Schülern und schließlich aus schulischen und curricularen Rahmenbedingungen erwachsen.

Ziel

Die Entscheidung zugunsten der Projektform bedarf angesichts der damit verbundenen Schwierigkeiten einer besonderen Rechtfertigung.

Leitziel des Gesamtcurriculums ist "rationales Verhalten in stochastischen Situationen" . Die Festlegung auf stochastische Situationen ist durch die fachliche Beschränkung des Curriculums impliziert. Rationales Verhalten hingegen stellt ein Leitziel des gesamten Unterrichts dar. Nimmt man das Ziel ernst, so wird man es nicht bei der Darstellung realer Anwendungssituationen der Stochastik bewenden lassen können. Vielmehr muß der Schüler auf die Konfrontation mit einem komplexen Problem ohne einen bestimmten fachlichen Hintergrund) vorbereitet werden, dessen stochastische Bestandteile nicht offensichtlich sind und deren Analyse i.a. noch nicht zur Lösung des Problems ausreicht.

Strebt man also rationales Verhalten an, so muß der Schüler Erfahrungen in der Auflösung der Komplexität realer Situationen sammeln; er muß eine spezifische Sensibilität für stochastische Problembestandteile entwickeln und gegebenenfalls in der Lage sein, stochastische Methoden zur Problemlösung heranzuziehen.

Solche Erfahrungen wird der Schüler im Rahmen konventioneller Unterrichtsformen kaum erwerben können, während die Projektarbeit gute Möglichkeiten bietet.

Anwendungsorientierung

Gerade ein Curriculum für die Abschlußklasse(n) der Hauptschule sollte der Anwendung von Mathematik in der Praxis besondere Rechnung tragen. Gemeint ist hier allerdings nicht die klassische "Anwendung", die meist nichts anderes darstellt als die Einkleidung eines mathematischen Sachverhalts und in erster Linie für Mathematik motivieren soll, sondern ein Unterricht, in dessen Mittelpunkt reale Situationen und Probleme stehen, bei deren Analyse die Mathematik als Hilfsmittel fungiert.

Nun ist aber auch eine derartige Auseinandersetzung mit realen Situationen wenig erfolgreich, wenn der Schüler keinen Bezug zu den darin diskutierten Problemen hat und wenn deren Lösung ihm nicht wichtig erscheint. Er wird zu einer ernsthaften Mitarbeit nicht motiviert sein und kaum zur Problemlösung beitragen. Von zentraler Bedeutung ist also die Einstellung des Schülers zu den erörterten Anwendungssituationen.

Emanzipation

Unter dem Gesichtspunkt der Anwendungsorientierung erscheint "rationales Verhalten" in einem neuen Licht: Diese zunächst mehr formale Qualifikation muß im Zusammenhang gesehen werden mit der Fähigkeit zu emanzipiertem Verhalten im Sinne einer Fähigkeit zu verantwortlichem und - im Rahmen sozialer Verantwortung - selbstbestimmtem Handeln in realen Problemsituationen. Es ist unmittelbar einleuchtend, daß unter den Rahmenbedingungen des gegebenen Schulsystems gerade die Dimension der Selbstbestimmung und die daraus resultierende Verantwortlichkeit nur schwer in die Schulpraxis eingebracht werden können.

Hier bieten Unterrichtsprojekte neue Möglichkeiten: Die Wahl des Projektthemas erfolgt nach Diskussion der Schüler und des Lehrers über verschiedene Vorschläge, ebenso die Problemanalyse, die Erarbeitung von Lösungsstrategien und schließlich die Lösung selbst sowie ihre Interpretation.

Der Lehrer begrenzt nur, insoweit er allgemeine curriculare und durch die örtlichen Bedingungen gegebene Schranken beachten muß; er koordiniert und berät.

Nicht unerwähnt soll bleiben, daß der Projektunterricht in besonderem Maße soziales Verhalten fördert, z.B. die Bereitschaft, gemeinsam an einem Problem zu arbeiten.

Schwierigkeiten

Der Erfolg eines solchen Unterrichts hängt wesentlich von der Reflexion der damit verbundenen Schwierigkeiten ab:

- Die Fähigkeit zu weitgehend selbstbestimmtem Handeln ist - insbesondere im Rahmen der Sozialgemeinschaft Schulklasse - sicher nicht gegeben, wenn zum ersten Mal ein Unterrichtsprojekt durchgeführt werden soll. Dazu sind die Rollen von Schüler und Lehrer und die gegenseitigen Erwartungen durch langjährige Erfahrungen zu stark fixiert. Der Schüler wird zunächst weder bereit noch in der Lage sein, den neuen Freiheitsspielraum in einem Projekt sinnvoll auszufüllen, und auch der Lehrer wird wohl bald in überkommene Verhaltensmuster zurückfallen.

- Unterrichtsprojekte sind ihrer Natur nach fächerübergreifend. Sie werden daher erfolgreicher zu bearbeiten sein, wenn sich mehrere Fachlehrer daran beteiligen. Dies macht oft noch Schwierigkeiten, die in den Fachcurricula, den schulorganisatorischen Möglichkeiten und schließlich in der Kooperationsbereitschaft der Lehrer zu suchen sind. Auch die Schüler sind an die Trennung des Unterrichts in meist recht zusammenhanglose Fächer (leider) schon sehr gewöhnt.

Zum Umgang mit den Projektdarstellungen

Aus der skizzierten didaktischen Bedeutung von Unterrichtsprojekten resultieren einerseits Schwierigkeiten für die Curriculumautoren, andrerseits aber auch für die Curriculumbenutzer. Mit der Auswahl der Projekte, die anschließend kommentiert werden, und insbesondere mit den zugehörigen Sequenzierungen entsteht folgender Zwiespalt:

Ein Thema und seine Sequenzierung präformieren den Unterrichtsablauf, obwohl unter dem Gesichtspunkt maximaler Schüleraktivität Offenheit zu wünschen ist. Andrerseits kann vom möglichen Ablauf des Projekts keine Vorstellung vermittelt werden, wenn nicht ein Thema vorgegeben und ein möglicher Unterrichtsablauf grob skizziert wird.

Der Lehrer sollte daher die Projektskizzen als unverbindliche Themenvorschläge mit denkbaren Sequenzierungen verstehen.

Eine weitere Schwierigkeit erwächst daraus, daß in einem Fachcurriculum vorwiegend diejenigen Aspekte geschildert werden, die sich unmittelbar auf das Fach, hier also auf die Stochastik beziehen, während im Unterricht der Fachbezug gegenüber einer fächerübergreifenden Sicht zurücktreten sollte.

Skizze der vorgestellten Projekte

Wir stellen vier Projekte vor:

- Abfüllen von Fertigpackungen
- Vererbung von Merkmalen
- Arbeitslosigkeit
- Chancen bei öffentlichen Glücksspielen .

Die Projektbeschreibung enthält jeweils (Ausnahme s.u.) eine Liste der Ziele und eine didaktische Begründung des Themas, die insbesondere die Einordnung in das Gesamtcurriculum erlaubt; darüber hinaus in sinnvollem Umfang eine Darstellung sachlicher Hintergründe sowie eine mögliche Sequenzierung des Projekts.

In den ersten drei Projekten ist die Rolle der Stochastik nicht von vornherein klar, was in einer gewissen Weise typisch ist für stochastische Komponenten in realen Problemstellungen.

Beim ersten Projekt geht es um drei Fragen: Wie genau sind Fertigpackungen abgefüllt ? Welche Konsequenzen ergeben sich aus der prinzipiellen Ungenauigkeit des Abfüllvorganges für Hersteller und Käufer ? Wie kann der Verbraucher vor Übervorteilung geschützt werden ? Stochastik spielt hier an zwei Stellen eine wesentliche Rolle: bei der Analyse der Ungenauigkeit des Abfüllvorganges und den darauf basierenden Regelungen, und bei dem sich anschließenden Problem der statistischen Qualitätskontrolle. Die sachlichen Hintergründe werden ausführlich dargestellt.

Das ist auch beim zweiten Projekt der Fall. Das Thema wird im Biologieunterricht i.a. verkürzt, da die zur Problemklärung notwendigen stochastischen Methoden nicht vorhanden sind bzw. nicht eingesetzt werden. Der zentrale stochastische Prozeß, aus dem sich fundamentale Regeln (wie die Mendel'schen Gesetze) und Erscheinungsformen (wie die Normalverteilung bei der Körperlänge) ergeben, ist die Beschickung einer Keimzelle mit Chromosomen. Während die stochastische Analyse mit elementaren, den Schülern bekannten Methoden auskommt, stellt das Projekt insgesamt auf Grund seiner Wissenschaftsbezogenheit gehobene Ansprüche. Es läßt sich wohl kaum vermeiden, daß der Lehrer hier stärker hervortritt (insbesondere als Informand über biologische Sachverhalte) als in den anderen drei Projekten.

Das dritte Projekt strebt eine differenzierte Betrachtung des Problemfeldes Arbeitslosigkeit (und darin insbesondere der Jugendarbeitslosigkeit) an, das gerade für die Abschlußklasse der Hauptschule von besonderer Bedeutung ist. Im Sammeln, Ordnen, Darstellen und Interpretieren entsprechender Daten kommen zuvor erworbene statistische Methoden zum Tragen.

Das vierte Thema spricht erfahrungsgemäß die Schüler in besonderem Maße an, auch wenn die reale Bedeutung gegenüber anderen Themen gering erscheinen mag. Die stochastischen Bestandteile sind hier offenkundig. Bemerkenswert erscheinen zwei Tatsachen: Mit vergleichsweise leicht erlernbaren Strategien (wie der Verwendung von Baumdiagrammen) lassen sich Fragen beantworten, für die gewöhnlich relativ starke kombinatorische Hilfsmittel herangezogen werden. Und: In beeindruckender Weise wird die Bedeutung von Simulationen realer Zufallsprozesse transparent.

Außer durch die Inhalte unterscheiden sich die vorgestellten Projekte auch durch Auswahl und Präsentation der Vorgaben. Dies ist einmal eine Folge des unterschiedlichen Charakters der Projektinhalte, geschieht aber auch, um dem Lehrer die ihm gemäße bzw. optimal erscheinende Form der Eigenplanung zu ermöglichen.

5.2 Projekt ABFÜLLEN VON FERTIGPACKUNGEN

5.2.1 Inhalt

5.2.1.1 *Diskussion von Eich- und Abfüllproblemen aus der Sicht des Verbraucherschutzes*

Das Leitinteresse, welches gesetzlichen Regelungen zum Eichen und zum Abfüllen von Fertigpackungen zugrunde liegt,ist der Schutz des Verbrauchers vor zufälliger oder absichtlicher Übervorteilung.

Als die Packungen noch vor den Augen des Käufers abgefüllt wurden, genügte es dazu, die Waagen (oder sonstigen Meßgeräte) zu eichen. Bei Fertigpackungen hat der Verbraucher jedoch keine unmittelbaren Kontrollmöglichkeiten mehr. Er muß sich auf die Auszeichnung der Nennfüllmenge auf der Packung verlassen können. Aus diesem Grunde sind gesetzliche Regelungen erforderlich, die sich unmittelbar auf die Fertigpackungen beziehen. Im deutschen Recht geschieht dies durch die Fertigpackungsverordnung.

5.2.1.2 *Verschiedene Modelle für Fertigpackungsverordnungen*

Da dem Hersteller auch nach dem Eichen der Abfüllanlagen noch gewisse Manipulationsmöglichkeiten bleiben, sollten sich gesetzliche Regelungen direkt auf die produzierten Fertigpackungen beziehen. Eine Eichung der Anlagen könnte dann sogar entfallen.

Alle Regelungen müssen unter folgenden Gesichtspunkten betrachtet werden:

- Inwieweit schützen sie den Verbraucher ?
- Sind sie den Eigenheiten des Abfüllvorgangs angemessen ?
- Welche Folgen haben sie für den Hersteller ?
- Welche indirekten Folgen haben sie für den Verbraucher ?

Das Abfüllen von Fertigpackungen ist ein stochastischer Prozeß, denn Abfüllmaschinen dosieren selten ganz genau. Die tatsächlichen Füllmengen streuen um einen Mittelwert, der mit der an der Maschine eingestellten Füllmenge übereinstimmt, sofern nicht die Maschine einen systematischen Fehler hat.

Die Erfahrung zeigt, daß die tatsächlichen Füllmengen normalverteilt sind. Für eine konkrete Serie von Packungen heißt das, daß das zugehörige Stabdiagramm sich der Gauß'schen Glockenkurve etwa so anpaßt, wie es Fig.27 zeigt.

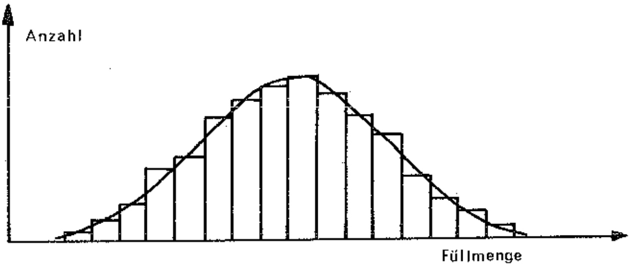


Fig.27

Daß Abfüllanlagen "normalverteilt" arbeiten, läßt sich mit einer Simulation am Galton-Brett begründen (viele relativ kleine Ursachen (Zapfen) für die Streuung).

Da die Normalverteilung durch Erwartungswert und Standardabweichung gekennzeichnet ist, genügen für die Beschreibung einer Abfüllanlage im wesentlichen diese beiden Kennwerte.

Das Mindestwertmodell

Vorschrift:
Die Füllmenge keiner einzigen Fertigpackung darf die angegebene Nennfüllmenge unterschreiten.

Folgen für den Hersteller:
Diese Vorschrift zwingt ihn, seine Packungen systematisch zu überfüllen. Die eingestellte Füllmenge muß also wesentlich über der Nennfüllmenge liegen:

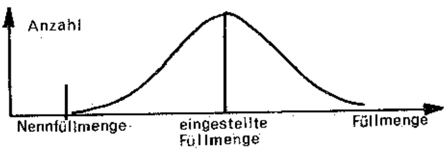


Fig.28

Es hängt von der für die Abfüllanlage charakteristischen Streuung ab, wie groß die Überfüllung sein muß. Der Hersteller hat nun zwei Möglichkeiten:

- Er überfüllt z.B. eine 500 g - Packung durchschnittlich um 20 g und kalkuliert seinen Preis entsprechend höher.
- Er gibt auf den Packungen, die vom Käufer als 500 g - Packungen gekauft werden, eine kleinere Nennfüllmenge an, etwa 480 g .

Folgen für den Verbraucher:
Vordergründig scheint diese Regelung den Verbraucherinteressen am ehesten zu entsprechen. Allerdings wird hier die für den Hersteller notwendige Überfüllung über einen entsprechend höheren Preis an den Käufer abgewälzt; dabei hat dieser keine Kenntnis vom tatsächlichen Ausmaß der Überfüllung. Es wäre z.B. denkbar, daß zwei Hersteller des gleichen Produkts unterschiedlich überfüllen müssen, um die Auflage einzuhalten: der erste etwa um 10 g, der zweite um 20 g. Bei gleichem Preis würde der Käufer beim ersten Hersteller im Schnitt einen geringeren Gegenwert bekommen; bei einem entsprechend geringeren Preis für das Produkt des ersten Herstellers würde der Käufer möglicherweise getäuscht.

Kontrollmöglichkeiten:
Prinzipiell kann die Einhaltung der Mindestwertforderung nur durch Überprüfen aller Packungen festgestellt werden. Das ist immer dann ausgeschlossen, wenn der Packungsinhalt durch diesen Vorgang unbrauchbar wird (z.B. bei Bierflaschen). Aber auch sonst wäre eine solch totale Überprüfung wegen des finanziellen Aufwandes unvertretbar.

)as Mittelwertmodell

/orschrift:
Hier wird verlangt, daß der Durchschnittswert der Füllmengen aller produzierten ?ackungen die Nennfüllmenge nicht unterschreitet.

Folgen für den Hersteller:
Er muß seine Abfüllanlage nur geringfügig über der Nennfüllmenge einstellen:

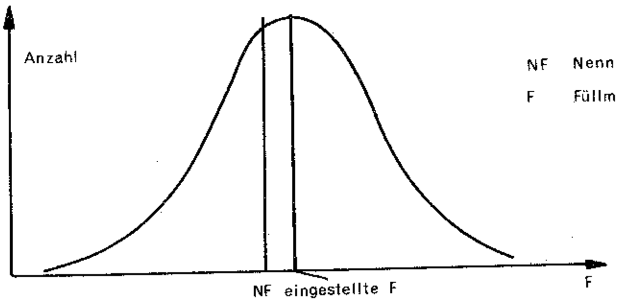


Fig.29

Folgen für den Verbraucher:
Er muß hier nicht mit beträchtlichen Preiserhöhungen rechnen. Es ist allerdings nicht ausgeschlossen, daß er (u.U. sogar weit) unterfüllte Packungen kauft. Im Einzelfalle könnte das unzumutbar sein.Kauft der Verbraucher das gleiche Produkt häufiger, so kann er damit rechnen, im Mittel wenigstens die der Nennfüllmenge entsprechende Warenmenge zu erhalten. In diesem Falle sind seine Interessen gewahrt.

Kontrollmöglichkeiten:
Auch jetzt ist eine genaue Überprüfung der Einhaltung der Forderung an eine Kontrolle aller Packungen gebunden. Mit der Kontrolle relativ kleiner Stichproben ist es jedoch möglich, die Einhaltung bzw. Nichteinhaltung der Mittelwertforderung mit hoher Wahrscheinlichkeit festzustellen.

Das Mittelwertmodell mit Streuungsbegrenzung

Vorschrift:
Zu der Mittelwertforderung tritt eine zweite Forderung, welche die Streuung nach unten begrenzt. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten:

a) Angabe eines Mindestwertes für die tatsächliche Füllmenge
b) Angabe eines Höchstwertes für die Standardabweichung (oder durchschnittliche Abweichung)
c) Angabe eines maximalen prozentualen Anteils in einem Toleranzbereich

In der bundesrepublikanischen Fertigpackungsverordnung ist a) mit c) gekoppelt. Die Bestimmung wird durch Fig.30 erläutert.

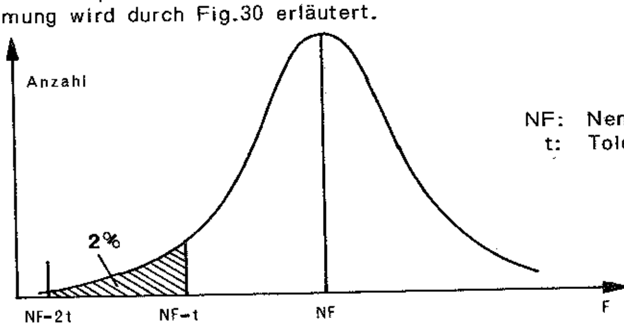


Fig.30

Unterhalb von NF - 2t darf keine Packung liegen (NF - 2t ist Mindestwert); im Toleranzbereich von NF - 2t bis NF - t dürfen höchstens 2% der Packungen anzutreffen sein (2%-Forderung).

Diese Form der Streuungsbegrenzung ist im wesentlichen äquivalent mit einer Begrenzung der Standardabweichung. Geht man nämlich davon aus, daß die tatsächlichen Füllmengen normalverteilt sind, und zwar mit dem Durchschnittswert $\bar{x}$ und der Standardabweichung s, so gilt: Unterhalb von $\bar{x}$ - 2,055s liegen 2% der Werte. Ist also t vorgegeben, so gilt für das maximal zulässige s: $s = \frac{t}{2,055}$. Ist die 2%-Forderung eingehalten, so ist es außerordentlich unwahrscheinlich, daß die Mindestforderung verletzt wird: Bei Normalverteilung ist nämlich der Anteil der Werte unterhalb von $\bar{x} - 2 \cdot 2,055s$ etwa 0,00002 .

Folgen für den Hersteller:
Auch hier muß er i.a. nicht wesentlich überfüllen; er muß allerdings entweder den Maximalwert der Standardabweichung beachten oder entsprechend mehr überfüllen.

Folgen für den Verbraucher:
Ähnlich wie beim Mittelwertmodell kann der Käufer erwarten, im Mittel wenigstens die Nennfüllmenge zu erhalten. Er muß nun aber nicht mehr mit wesentlich unterfüllten Packungen rechnen: Unterhalb von NF - t liegen etwa nur 2 von 100 Packungen, unter NF - 2t keine.

Kontrollmöglichkeiten:
Die Einhaltung der Mittelwertforderung und der 2%-Forderung sind wiederum auf einem hohen Verläßlichkeitsniveau mit Stichproben zu kontrollieren. Für die Mindestwertforderung gilt, was bereits beim Mindestwertmodell gesagt wurde; allerdings ist die Forderung aus den oben genannten Gründen jetzt unproblematisch.

Vergleich der drei Modelle:
Eine Analyse der Modelle zeigt, daß die Interessen des Verbrauchers wohl am besten durch das Mittelwertmodell mit Streuungsbegrenzung geschützt werden. Das Modell enthält darüber hinaus keine unzumutbaren Forderungen an den Hersteller und ist auf Grund seines stochastischen Charakters besser überprüfbar als das Mindestwertmodell. Es zeigt sich hier exemplarisch, daß einem stochastischen Problem - hier dem Problem der Abfüllung - eine stochastische Lösung am angemessensten ist.

5.2.1.3 *Gesetzliche Regelungen*

Die gesetzlichen Bestimmungen präzisieren auf der einen Seite das Mittelwertmodell mit Streuungsbegrenzung; insbesondere werden Sonderregelungen für Sonderfälle festgelegt. Auf der anderen Seite werden dort auch die Kontrollbestimmungen fixiert.

In § 14 des Eichgesetzes wird der Begriff "Fertigpackung" definiert: "Fertigpackungen im Sinne dieses Gesetzes sind Erzeugnisse in Verpackungen beliebiger Art, die in Abwesenheit des Käufers abgepackt und verschlossen werden, wobei die Menge der darin enthaltenen Erzeugnisse ohne Öffnen oder merkliche Änderung der Verpackung nicht verändert werden kann."

Die Fertigpackungsverordnung unterscheidet dann drei Arten von Erzeugnissen:

- leicht abfüllbare (z.B. Kristallzucker)
- schwer abfüllbare (z.B. Mandelkerne)
- schwerst abfüllbare (z.B. Backwaren, Weichkäse) .

In § 17 der Fertigpackungsverordnung werden Mittelwertforderung und Streuungsbegrenzung formuliert. Diese Forderungen beziehen sich auf die Gesamtheit aller Packungen, so daß für die Kontrolle mittels Stichprobenentnahme nochmals Erläuterungen notwendig sind. Der für den Toleranzbereich charakteristische Wert t wird differenziert nach der Größe der Füllmenge und der Abfüllbarkeit des verpackten Materials. Die folgende Tabelle gibt darüber Aufschluß.

	Toleranzwert t			
	leicht abfüllbar		schwer abfüllbar	
Nennfüllmenge in g oder ml	in % der Nennfüllmenge	g oder ml	in % der Nennfüllmenge	g oder ml
5 – 24	–	–	9	–
25 – 49	4,5	–	9	–
50 – 99	–	2,25	–	4,5
100 – 199	2,25	–	4,5	–
200 – 299	–	4,5	–	9
300 – 499	1,5	–	3	–
500 – 999	–	7,5	–	15
ab 1000	0,75	–	1,5	–

Für schwerst abfüllbare Güter wird t so berechnet wie für schwer abfüllbare; es wird aber auf die 2%-Forderung verzichtet.

Die Toleranzbereiche für schwer abfüllbare Güter sind gegenüber denen für leicht abfüllbare verdoppelt (s. Tabelle).

t läßt sich als Funktion der Nennfüllmenge auffassen. t wächst zwar mit der Nennfüllmenge, aber nicht proportional, sondern schwächer. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, daß große Mengen eines Füllgutes mit relativ größerer Genauigkeit abgefüllt werden können als kleine.

Fig.31 veranschaulicht t als Funktion der Nennfüllmenge für leicht abfüllbare Güter.

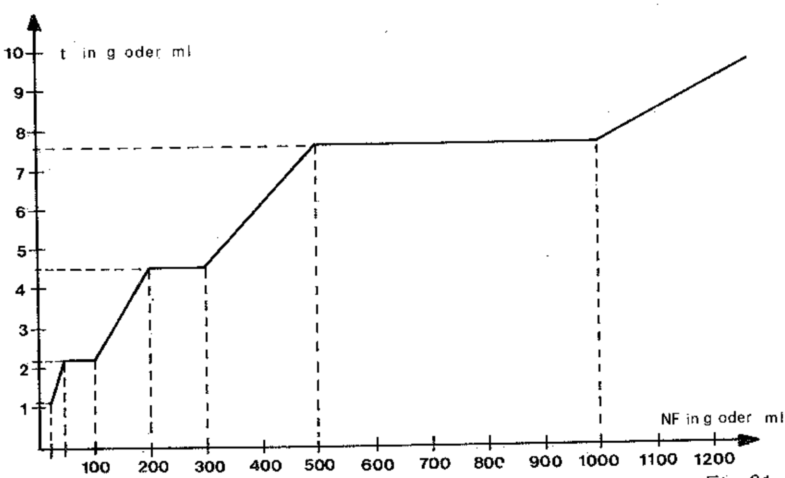


Fig.31

Wird die Nennfüllmenge als Stückzahl angegeben, so wird t folgendermaßen ermittelt:

Stückzahl	1–30	31–100	101–200	...	(n–1)·100 + 1 bis n·100	...
t	0	1	2	...	n	...

Beispiele:

a) Kristallzucker ist leicht abfüllbar. Bei einer 1 000 g – Packung ist t = 7,5 g . Höchstens 2% der Packungen dürfen also weniger als 1 000 g – 7,5 g = 992,5 g wiegen. Keine Packung darf weniger als 1 000 g – 2·7,5 g = 985 g wiegen.

b) Mandelkerne sind schwer abfüllbar. Bei einer 125 g – Packung beträgt t 4,5% von 125 g, also t = 5,625 g. Die 2%-Grenze liegt demnach bei 125 g – 5,625 g = 119,375 g und der Mindestwert ist 125 g – 2·5,625 g = 113,75 g .

5.2.1.4 *Kontrollvorschriften*

Fehlerquellen bei der Kontrolle der Einhaltung gesetzlicher Vorschriften sind:

- Meßungenauigkeiten bei der Kontrollmessung
- Fehlschlüsse von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit .

Meßungenauigkeiten werden durch entsprechende Eichvorschriften für die Kontrollmeßgeräte auf ein akzeptables Maß reduziert. Die Meßungenauigkeit bei Waagen darf höchstens $\frac{1}{5}$ des jeweiligen Toleranzwertes t betragen. Bei Packungen, die nach Volumen, Länge, Flächeninhalt oder Stückzahl verpackt sind, ist die Meßungenauigkeit der Meßgeräte zu begrenzen auf $\frac{1}{400}$ der Füllmenge. Stückzahlen werden häufig mittels Wägen der gesamten Füllmenge und Bestimmen des mittleren Stückgewichts berechnet.

Eine weitere Fehlerquelle bei Wägungen besteht im Mitwiegen der Verpackung. Falls das Verpackungsgewicht höchstens 10% der Nennfüllmenge beträgt, wird durch Wiegen von maximal 10 Packungen die mittlere Tara bestimmt und das Nettogewicht als Differenz von Bruttogewicht und Tara errechnet.

Hinsichtlich des Rückschlusses von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit sind zwei Fehler möglich:

- Der Mittelwert der Stichprobe ist größer oder gleich der Nennfüllmenge, der Mittelwert der Grundgesamtheit dagegen nicht.
  In solchen Fällen kann die Verletzung der Mittelwertforderung nicht festgestellt werden.

- Der Mittelwert der Stichprobe ist kleiner als die Nennfüllmenge; der Mittelwert der Grundgesamtheit entspricht dagegen den Anforderungen.
  In diesem Fall kann die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, mit der die Mittelwertforderung eingehalten ist. In der Fertigpackungsverordnung wird diese Wahrscheinlichkeit auf 0,999 festgelegt und daraus mit Methoden der schließenden Statistik ausgerechnet, um welchen Betrag a der Stichprobenmittelwert unterhalb der Nennfüllmenge liegen darf. Dabei ist $a = k \cdot s$, wobei k der u.a. Tabelle entnommen werden kann und s die Standardabweichung der Stichprobe ist.
  Gilt also: Stichprobenmittelwert $\geq$ Nennfüllmenge $-$ a , so wird mit 99,9%iger Sicherheit die Mittelwertforderung eingehalten.
  Für die Streuung werden ähnliche Überlegungen angestellt.

Der Stichprobenumfang n ergibt sich aus dem Losumfang N (= z.B. Anzahl der Pakkungen einer Stundenproduktion).

Im einzelnen gilt:

N	n	k
101 - 500	32	0,597
501 - 1200	50	0,462
1201 - 3200	80	0,357
ab 3201	125	0,282

Bei $N \leq 100$ muß eine Vollprüfung erfolgen.

5.2.2 Zielsetzung und didaktische Begründung

In diesem Projekt geht es um eine komplexe Anwendungssituation: das Abfüllen von Ferigpackungen. Hier soll unter dem Leitinteresse des Verbraucherschutzes das Problem der Abfüllgenauigkeit erörtert werden.

Das Unterrichtsprojekt setzt sich aus einem Diskussionsteil, einem Analyseteil und einer von den Schülern selbst durchgeführten Untersuchung zusammen.

Folgende Gründe sprechen für ein solches Projekt:

- Es liefert einen unmittelbaren Beitrag zum Fundamentalziel des Gesamtcurriculums

(s. S.20). Dieses Ziel kann zweifellos nur erreicht werden, wenn auch solche alltäglichen Situationen analysiert werden, deren stochastischer Gehalt nicht unmittelbar einsichtig ist.

- Das Projekt trägt folgendem Leitprinzip des Curriculums Rechnung: Aufgreifen praxisrelevanter Situationen unter Berücksichtigung der Interessenlage der Schüler (s. S.19).
- Das Projekt ermöglicht Schüleraktivitäten auf allen Repräsentationsstufen. Diese Tätigkeiten reichen von konkreten Messungen (enaktive Stufe) über die Aufbereitung der Daten in tabellarischer und graphischer Form (ikonische Stufe) bis hin zur Analyse stochastischer Situationen und zur Interpretation der gewonnenen Ergebnisse (symbolische Stufe) .
- Das Projekt leistet eine Integration verschiedener Unterrichtsthemen in doppeltem Sinne: einmal nämlich die Integration der in den vorangegangenen Phasen erworbenen stochastischen Kenntnisse, Methoden und Einsichten, zum anderen die Integration von Themen der Mathematik, der Physik/Chemie (Messen von Größen) und der Arbeitslehre (Verbraucherschutz).
- Das Projekt beinhaltet stochastische Fragestellungen auf unterschiedlichen Anspruchniveaus, die eine differenzierte Behandlung im Unterricht ermöglichen (Stochastik beim Abfüllen, in den gesetzlichen Vorschriften, beim Messen, bei den Kontrollverfahren) .

Im einzelnen streben wir mit dem Projekt folgende Ziele an:

1. das Abfüllen von Fertigpackungen als stochastischen Vorgang interpretieren können
   - wissen, daß das Abfüllen nur selten mit beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden kann
   - Gründe für die beim Abfüllen auftretenden Schwankungen nennen können
   - die Form der beim Abfüllen auftretenden Häufigkeitsverteilungen charakterisieren können
   - mittels einer Simulation am Galton-Brett diese Verteilungsform erklären können
2. Probleme des Eichens und Abfüllens aus der Sicht des Verbraucherschutzes erörtern können
   - begründen können, daß allein mit dem Eichen von Waagen der Verbraucher nicht hinreichend vor Übervorteilung geschützt ist
   - erläutern können, warum Regelungen für die Genauigkeit beim Abfüllen von Fertigpackungen nötig sind
3. das Mindestwertmodell, das Mittelwertmodell und das Mittelwertmodell mit Streuungsbegrenzung erläutern können
   - diese Modelle beschreiben können
   - die Folgen dieser Modelle für Verbraucher und Hersteller erläutern können
   - die Modelle unter dem Gesichtspunkt des Verbraucherschutzes und der Kontrollierbarkeit vergleichen können
   - die stochastischen Komponenten dieser Modelle erläutern können
4. eine eigene Versuchsreihe zum Mittelwertmodell mit Streuungsbegrenzung planen und durchführen können
   - eine eigene Meßreihe unter Beachtung des Problems der Meßgenauigkeit erstellen können
   - die Meßreihe nach den Methoden der beschreibenden Statistik aufbereiten können
   - die entstehende Häufigkeitsverteilung charakterisieren können
   - statistische Kennwerte für diese Verteilung berechnen können

5. die Versuchsreihe auswerten können

- einsehen, daß Rückschlüsse von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gezogen werden können
- mit diesem Vorbehalt Rückschlüsse aus der Versuchsreihe ziehen können
- die Einhaltung der gesetzlichen Vorschriften im untersuchten Fall überprüfen können

5.2.3 Vorschläge für eine Sequenzierung

Das Unterrichtsprojekt kann sich in folgende Abschnitte gliedern:

1. Diskussion von Abfüllproblemen
2. Entwicklung von Modellen für eine Fertigpackungsverordnung
3. Planung, Durchführung und Auswertung einer Versuchsreihe

In den ersten beiden Abschnitten sollte das freie Unterrichtsgespräch vorherrschen. Als Einstieg empfiehlt es sich, Fertigpackungen vorzustellen und nach ihrer Füllmenge zu fragen. Das Unterrichtsgespräch wird ergeben, daß Unterschiede zwischen Nennfüllmenge und tatsächlicher Füllmenge auftreten können. Diese Differenzen sollten dann durch eine Erörterung des Abfüllvorgangs geklärt werden. Dabei kann man die Möglichkeiten zur Steuerung von Abfüllvorgängen auch aus physikalischer Sicht erörtern.

Der Lehrer wird nun anhand einer Meßreihe die für Abfüllvorgänge typische Verteilungsform (Normalverteilung) vorstellen und eventuell durch eine Simulation mit dem Galton-Brett klären. Daran schließt sich eine Erörterung des Problems aus der Sicht des Verbraucherschutzes an. Die Schüler sollen dazu angeregt werden, selbst Modelle für eine Fertigpackungsverordnung zu entwerfen und unter den folgenden Gesichtspunkten zu diskutieren: Folgen für Hersteller und Verbraucher, Kontrollmöglichkeiten.

Der Lehrer kann im Rahmen dieser Diskussion - falls entsprechende Vorschläge nicht von den Schülern eingebracht werden - die drei hier diskutierten Modelle vorschlagen. Dabei sollte Wert auf die Verbindung zwischen dem stochastischen Charakter des Abfüllprozesses und einer entsprechenden gesetzlichen Regelung gelegt werden. Zum Schluß wird das Mittelwertmodell mit Streuungsbegrenzung im einzelnen vorgestellt. Eventuell kann auf den Zusammenhang zwischen Streuungsbegrenzung durch Maximalwerte für Standardabweichung bzw. durchschnittliche Abweichung und durch die 2%-Forderung eingegangen werden.

Bei der Planung einer Versuchsreihe stellt die Auswahl eines geeigneten Produkts wohl das Hauptproblem dar. Folgende Faktoren müssen dabei beachtet werden:

- Die Schüler sollten ein unmittelbares Interesse an dem Produkt haben.
- Die einzelnen Packungen dürfen nicht zu teuer sein (immerhin müssen mindestens 30 Packungen besorgt werden).
- Es müssen hinreichend genaue Meßinstrumente zur Kontrolle der Packungen verfügbar sein.

Unter diesen Aspekten könnten etwa Packungen von Schrauben, Reißnägeln, Zündhölzern o.ä. verwendet werden.

Das Problem des Nachmessens sollte durchaus mit den Schülern erörtert werden. Der Umfang der Stichprobe braucht dabei nicht unbedingt mit den gesetzlichen Vorschriften in Einklang zu stehen. Die Prüfbedingungen der Eichbehörden sind ohnehin von den in der Schule gegebenen verschieden; z.B. kann i.a. der Losumfang nicht ermittelt werden.

Trotzdem sollte man das Problem des Stichprobenumfangs erörtern, und zwar unter folgenden Gesichtspunkten:

- Was kann man aus der Stichprobe hinsichtlich der Grundgesamtheit schließen ?
- Wie hängt die Sicherheit solcher Schlüsse vom Stichprobenumfang ab ?

Es ist nicht notwendig, daß die genauen, sich aus der Stichprobentheorie ergebenden, noch akzeptablen Abweichungen von der Nennfüllmenge vorgestellt werden. Die Schüler sollten jedoch einsehen, daß z.B. eine geringe Abweichung des Stichprobenmittelwertes von der Nennfüllmenge nicht notwendig auf eine Verletzung der Mittelwertforderung hindeutet.

Beim Kauf der Fertigpackungen muß darauf geachtet werden, daß es sich wirklich um gleichartige Packungen desselben Herstellers handelt. Die Kontrollmessungen sind mit demselben geeichten Meßinstrument vorzunehmen; lediglich die Anzahlbestimmung kann jeder Schüler allein, auch zuhause durchführen. Die Meßwerte sollten im Unterricht zusammengetragen und aufbereitet werden (Häufigkeitstabelle, eventuell Klassenbildung, Stabdiagramm, Durchschnittswert, durchschnittliche Abweichung); der 2%-Toleranzbereich kann nach den gesetzlichen Vorschriften bestimmt werden.

Bei der Auswertung sollte die Einhaltung der gesetzlichen Vorschriften dann bestätigt werden, wenn die Vorschriften - angewandt auf die genommene Stichprobe - annähernd eingehalten sind (Hinweise auf die Stichprobenproblematik!).

Abschließend wird man mögliche Maßnahmen für den Fall der Nichteinhaltung erörtern.

5.3 Projekt VERERBUNG VON MERKMALEN

5.3.1 Inhalt

5.3.1.1 *Erbanlage und Erbbild*

Jedes Lebewesen (Pflanze, Tier, Mensch) weist bestimmte *Merkmale* auf (z.B. Haarfarbe, Blütenfarbe, Blattform, Blutgruppe, Geschlecht), die - zumindest nach dem Aufwachsen - zeitlich stabil sind. Häufig zeigen Nachkommen die Merkmale ihrer Eltern (oder doch eines Elters). Man kann daher annahmen, daß solche Merkmale nicht so sehr von äußeren Einflüssen abhängen als vielmehr im Lebewesen an bestimmter Stelle festgelegt sind; und: daß solche *Erbanlagen* von den Eltern an die Nachkommen weitergegeben werden.

Trotz dieser Festlegung handelt es sich dabei um ein stochastisches Phänomen; denn jedes Merkmal kann mehrere *Zustände* (Ergebnisse) haben (z.B. blau oder braun bei der Augenfarbe des Menschen) und es ist i.a. durchaus ungewiß, welchen Zustand das Merkmal bei einem der Nachkommen einnimmt. Alle Schlüsse von der Beschaffenheit des Merkmals bei den Eltern auf seinen Ausfall bei den Kindern sind also stochastischer Art.

Heute weiß man, daß für solche Merkmale *Gene* verantwortlich sind. Für ein Merkmal kann ein Gen, können aber auch mehrere Gene zuständig sein. Solche Gene sitzen innerhalb des *Zellkerns* einer jeden *Zelle* des Lebewesens auf fadenförmigen *Chromosomen* . Ein bestimmtes Gen hat dabei auf seinem Chromosom in jedem Zellkern denselben Platz.

Wichtig ist nun, daß bei den meisten Lebewesen jedes Chromosom doppelt vorkommt (und dies wiederum in allen Zellkernen). Dabei stammt ein Chromosom vom Vater, das andere von der Mutter. Beim Menschen etwa gibt es in jedem Zellkern 23 Chromosomenpaare.

Da die beiden Chromosome eines Paares verschiedenen Ursprungs sind, kann es durchaus vorkommen, daß ein bestimmtes Gen dort in unterschiedlichen Zuständen auftritt. Dann heißt das Lebewesen (in bezug auf dieses Gen) *mischerbig*, sonst *reinerbig* .

Beispiel: Hat das Gen für die Blütenfarbe einer bestimmten Pflanze die beiden Zustände ‚weiß' (kurz: w) und ‚rot' (kurz: r), so sind folgende Fälle möglich:

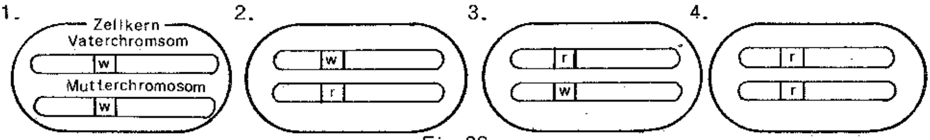


Fig.32

Die Fälle 2 und 3 zeigen mischerbige Pflanzen an, sie können de facto nicht unterschieden werden, da die Herkunft eines Chromosoms i.a. nicht auszumachen ist (Ausnahmen s.u.). Die Fälle 1 und 4 weisen auf reinerbige Pflanzen hin.

Verallgemeinerung: Sind für ein bestimmtes Gen zwei Zustände A und a möglich, so kann das betreffende Chromosomenpaar bezüglich dieses Gens drei *Erbbilder (Genotypen)* aufweisen:

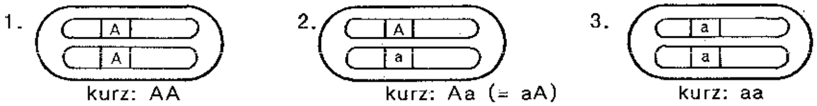


Fig.33

5.3.1.2 *Vererbung*

Was geschieht nun mit diesen Chromosomen bzw. Genen bei der Erzeugung von Nachkommen ?

Vater und Mutter bilden *Keimzellen* aus; diese Zellen haben im Unterschied zu den Stammzellen keine Chromosomenpaare, sondern von jedem Paar nur ein Exemplar. Welches, hängt vom Zufall ab; genauer: Bildet eine ursprüngliche Zelle eine Keimzelle aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, in diese Keimzelle hineinzugelangen, für jedes einzelne Chromosom (und damit für jedes Gen auf ihm) $\frac{1}{2}$. Vereinigt sich nun eine männliche Keimzelle (*Samenzelle*) mit einer weiblichen Keimzelle (*Eizelle*), so entsteht eine *befruchtete Eizelle*, die wiederum Chromosomenpaare (Partner je von Vater und Mutter) aufweist und aus der das neue Lebewesen (mit der von der befruchteten Eizelle festgelegten Zellstruktur) entsteht.

Beispiel 1: Blütenfarbe der o.a. Pflanze

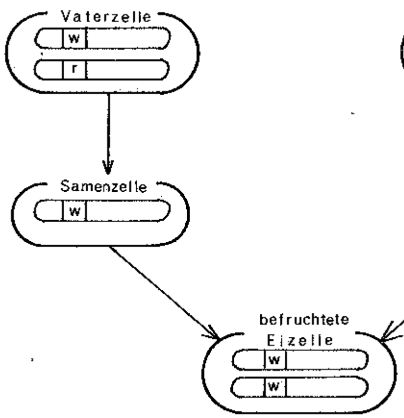


Fig.34

Beispiel 2: Beim Menschen (und vielen anderen Lebewesen) ist eines der Chromosomenpaare u.a. für das Geschlecht zuständig. Der Mann hat in diesem Paar zwei verschiedene Chromosome X und Y; die Frau hingegen hat zwei X-Chromosome.

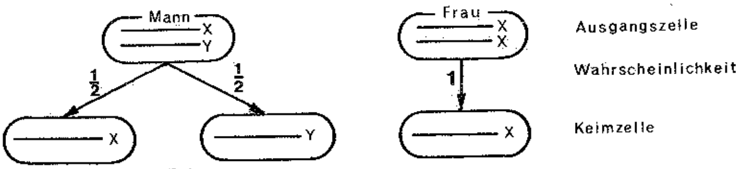


Fig.35

1.Möglichkeit des Erbganges:

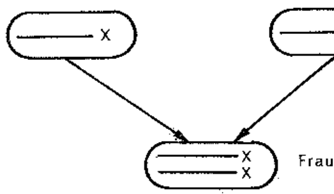


Fig.36

2.Möglichkeit des Erbgangs:

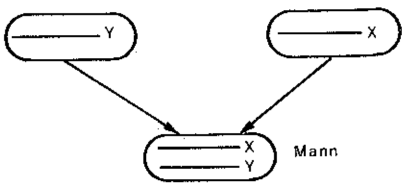


Fig.37

Beide Möglichkeiten sind gleichwahrscheinlich; sie haben die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. (Warum beim Menschen die Knabengeburten tatsächlich überwiegen (Wahrscheinlichkeit 0,51), ist noch nicht vollständig geklärt.)

Zusammenfassung im Baumdiagramm:

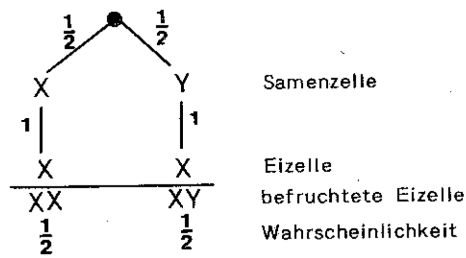
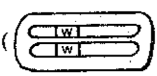
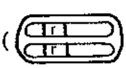
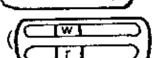


Fig.38

Das Aussehen reinerbiger Lebewesen ist (bezüglich des betreffenden Gens) durch den Genotyp eindeutig bestimmt: Im Falle AA ist das Lebewesen im Zustand A, bei aa im Zustand a.

Im Beispiel: Die Pflanze ww () blüht weiß, die Pflanze rr () rot.

Wie aber blüht die Pflanze wr () ? Allgemein: In welchem äußeren Zustand befindet sich das mischerbige Lebewesen Aa ?

Hier gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten:

a) *intermediäre* Vererbung

Kreuzt man eine rotblühende mit einer weißblühenden Japanischen Wunderblume (beide reinerbig, so daß die Tochterpflanze mischerbig sein muß), dann entsteht immer eine blaßrosa Spielart dieser Pflanze. Die *Mischlinge* (*Bastarde*) wr nehmen also in ihrem *Erscheinungsbild* (*Phänotyp*) eine Mittelstellung zwischen den beiden

Erscheinungsbildern der reinerbigen Lebewesen ein.

Was entsteht, wenn man nun die Exemplare der Tochtergeneration der Wunderblume paart ?

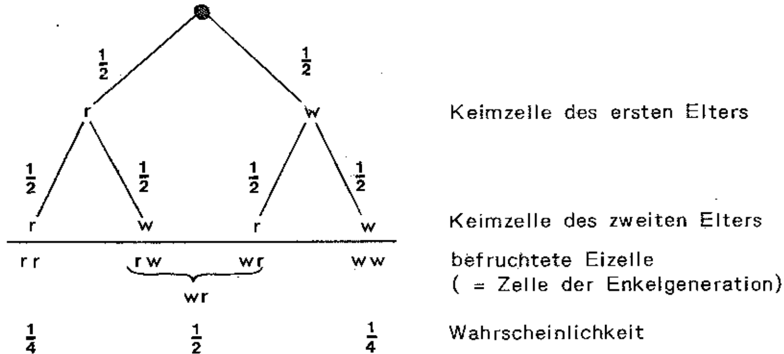


Fig.39

Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ $(\frac{1}{2};\frac{1}{4})$ entsteht eine rote (rosafarbene; weiße) Wunderblume. Eine weitere Differenzierung der Farbe findet also nicht statt.

b) *dominant-rezessive* Vererbung

Kreuzt man eine bestimmte rotblühende mit einer weißblühenden Erbsenrasse, so entstehen in der Tochtergeneration nur rotblühende Pflanzen. Deren Kreuzung erbringt in der Enkelgeneration rotblühende und weißblühende Pflanzen, und zwar im Verhältnis 3:1 .

Da der in Fig.39 dargestellte Erbgang unverändert gilt, ist dieses Ergebnis nur möglich unter der Annahme, daß auch die mischerbigen Pflanzen (wr) in diesem Falle rot blühen, daß also die rote Farbe über die weiße dominiert. Der Zustand r heißt deshalb *dominant* bezüglich w und w *rezessiv* bezüglich r.

Allgemein: Hat ein Gen die beiden möglichen Zustände A und a, und ist A dominant bezüglich a, so gibt es zwar drei Genotypen (AA, Aa, aa), aber nur zwei Phänotypen (A und a), da die Genotypen AA und Aa dasselbe Erscheinungsbild A zeigen.

Die Kreuzung zweier reinerbiger Eltern AA und aa erbringt in der Tochtergeneration mit Sicherheit einen Bastard des Genotyps Aa und demzufolge des Phänotyps A (Fig.40).

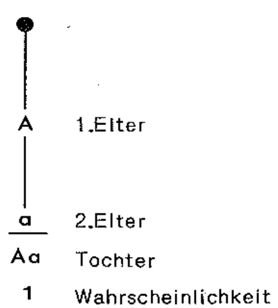


Fig.40

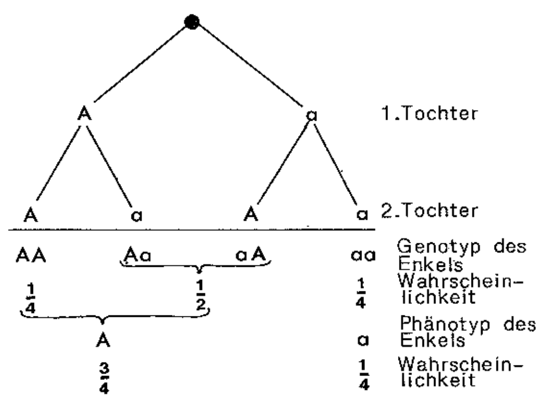


Fig.41

Auch das Verhältnis 3:1 ($\frac{3}{4}$ gegenüber $\frac{1}{4}$) bei den Enkeln wird durch die Dominanz des Zustandes A erklärlich.

Die dominant-rezessive Form der Vererbung ist die bei weitem häufigere. Beispielsweise dominieren

- beim Mais die Körnerfarbe blau über gelb, glatte Körnerwand über gerunzelte
- beim Weizen Rostanfälligkeit über Rostresistenz
- beim Rind schwarz über rotbraun, Einfarbigkeit über Mehrfarbigkeit
- beim Meerschweinchen Kurzhaarigkeit über Langhaarigkeit
- beim Hund Dackelbeinigkeit über Normalbeinigkeit
- beim Schaf umgekehrt Normalbeinigkeit über Dackelbeinigkeit .

5.3.1.3 *Die Mendel'schen Gesetze*

Als Gemeinsamkeiten beider Vererbungsformen können wir festhalten:

1. Mendel'sche Regel (Uniformitätsregel): Kreuzt man zwei in bezug auf ein Merkmal reinerbige Individuen, so sind alle Exemplare der Tochtergeneration bezüglich dieses Merkmals (in Geno- und Phänotyp) gleich.

2. Mendel'sche Regel (Spaltungsregel): Kreuzt man die Exemplare der so entstandenen Tochtergeneration untereinander, so spaltet sich das Merkmal im Verhältnis 1:2:1 (Genotyp und Phänotyp bei intermediärer Vererbung sowie Genotyp bei dominant-rezessiver Vererbung) bzw. 3:1 (Phänotyp bei dominant-rezessiver Vererbung) auf.

Diese Regeln wurden 1865 von dem Brünner Lehrer und späteren Augustiner-Abt GREGOR MENDEL (1822-1864) veröffentlicht. Mendel arbeitete mit Erbsen, die gelbe oder grüne Körner haben können, wobei gelb über grün dominiert. In der Enkelgeneration erhielt er das Verhältnis gelb : grün = 6 022 : 2 001 .

Woher weiß man eigentlich, ob ein Lebewesen vom Phänotyp A den Genotyp AA oder den Genotyp Aa hat, ob es also reinerbig oder gemischterbig ist ? Am einfachsten klärt man dies durch Kreuzung mit einem entsprechenden Lebewesen vom Phänotyp a (und demzufolge Genotyp aa).

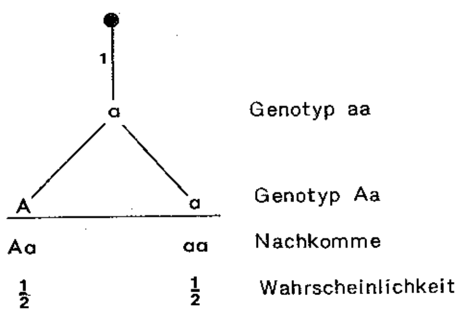


Fig.42

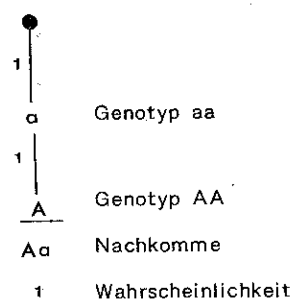


Fig.43

Je nachdem, ob die Nachkommen sämtlich oder nur etwa zur Hälfte das Erscheinungsbild A haben, kann man auf Reinerbigkeit oder Gemischterbigkeit des fraglichen Lebewesens zurückschließen.

Allgemein sind folgende 6 Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei einer Tochtergeneration möglich:

	AA	Aa	aa
AA	AA Aa aa 1 0 0	AA Aa aa $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0	AA Aa aa 0 1 0
Aa	———	AA Aa aa $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	AA Aa aa 0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
aa	———	———	AA Aa aa 0 0 1

Alle bisherigen Kreuzungen fanden mit Lebewesen statt, die sich höchstens in einem einzigen Merkmal unterscheiden. Wir wenden uns nun der Paarung von Individuen zu, die sich in zwei Merkmalen (A-a und B-b) unterscheiden können, wobei A über a und B über b dominiert.

Beginnen wir mit der Kreuzung eines zweifach reinerbigen dominanten Lebewesens (kurz: AABB) mit einem zweifach reinerbigen rezessiven Lebewesen (kurz: aabb). Es entstehen mit Sicherheit nur Töchter vom Genotyp AaBb und demzufolge vom Phänotyp AB (Fig.44).

Kreuzen wir nun diese Tochterlebewesen miteinander, so erhalten wir das Bild in Fig.45 .

Fig.44

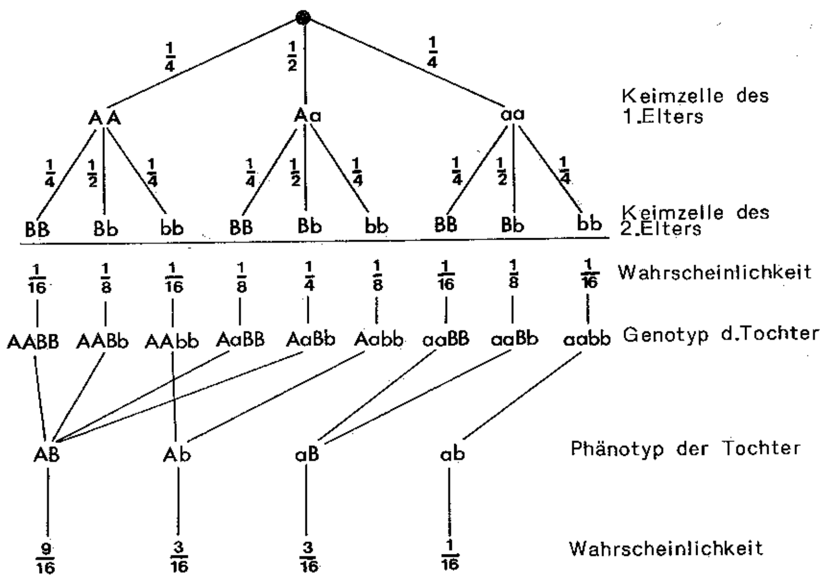


Fig.45

Beispiel: Mendel kreuzte zwei Erbsenarten mit gelb-runden und grün-kantigen Samen, wobei gelb über grün und rund über kantig dominierte. In der Tochtergeneration erhielt er nur gelb-runde Erbsen, in der Enkelgeneration gelb-runde, gelb-kantige, grün-runde und grün-kantige etwa im Verhältnis 9:3:3:1 .

Das erhaltene Ergebnis ist nur möglich, wenn die beiden Anlagen A-a und B-b sich unabhängig voneinander vererben, wenn also das Kreuzungsexperiment als zweistufiges Zufallsexperiment mit voneinander unabhängigen Stufen gedeutet werden kann.

Dies ist der Inhalt der

3. Mendel'schen Regel (Unabhängigkeitsregel): Die einzelnen Merkmale werden unabhängig voneinander vererbt und können bei der Keimzellenbildung und Befruchtung neu zusammentreten.

Diese Regel, welche die Züchtung von neuen Rassen ermöglicht, hat natürlich ihre Grenze bei denjenigen Genen, die auf demselben Chromosom liegen. (Die Chromosomentheorie der Vererbung war Mendel noch nicht bekannt.)

5.3.1.4 *Geschlechtsgebundene Vererbung*

Bisher war es gleichgültig, ob bestimmte Gene von Vater oder Mutter stammen. Das ist anders bei jenen Genen, die auf den geschlechtsbestimmenden X-Y-Chromosomen sitzen; denn diese sind ja ungleichverteilt (XY beim Vater, XX bei der Mutter).

So ist z.B. auf dem X-Chromosom des Menschen ein Gen vorhanden, welches für das Farbensehen verantwortlich ist. Dieses Gen kann zwei Zustände haben: F (normal) und f (farbenblind), wobei der häufigere Zustand F ($w(F) = 0{,}95$) über den selteneren Zustand f ($w(f) = 0{,}05$) dominiert.

Frauen vom Genotyp FF und vom Genotyp Ff sehen normal, solche vom Genotyp ff sind farbenblind. Nun ist $w(ff) = w(f) \cdot w(f) = 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$. Es leiden also nur 0,25 % aller Frauen an Farbenblindheit, dagegen 5% aller Männer. Denn dort sind die Genotypen YF (kurz für Y-Chromosom und X-Chromosom mit Gen im Zustand F) und Yf möglich, wobei $w(YF) = 0{,}95$ und $w(Yf) = 0{,}05$.

Den gleichen Erbgang wie die Farbenblindheit hat die Bluterkrankheit.

5.3.1.5 *Sonderfall: Blutgruppenvererbung*

Ein wichtiges Beispiel für ein Merkmal, das mehr als zwei Zustände haben kann, ist die Blutgruppe beim Menschen. Das die Blutgruppe bestimmende Gen hat die drei Zustände A,B und 0. Dabei dominieren A und B über 0 und sind unter sich gleichwertig.

Die folgende Tabelle zeigt, daß 6 Genotypen existieren, von denen AA und A0 einerseits und BB sowie B0 andrerseits zum gleichen Phänotyp zusammenfallen.

Genotypen	A	B	0
A	AA	AB	A0
B	–	BB	B0
0	–	–	00

Es gibt also die vier *Blutgruppen* (Phänotypen) A (= AA oder A0), B (= BB oder B0), AB und 0 (= 00) .

Blut der Gruppen A und B ist nicht untereinander austauschbar; denn Blut der Gruppe A enthält den Bestandteil Anti-B, der Blut der Gruppe B zusammenklumpt und damit in seiner biologischen Funktion beeinträchtigt. Ebenso enthält Blut der Gruppe B den Bestandteil Anti-A . Blut der Gruppe AB enthält keine Antistoffe, Blut der Gruppe 0 hingegen enthält sowohl Anti-A als auch Anti-B.

Bei einer Bluttransfusion muß verhindert werden, daß das gespendete Blut verklumpt. Das aufnehmende Blut steht wegen seiner größeren Menge nicht in dieser Gefahr. Demnach sind nur die in Fig.46 angedeuteten Transfusionen (⟶) möglich.

Für die Wahrscheinlichkeit der 4 Blutgruppen gilt: $w(A) = 0{,}43$; $w(B) = 0{,}14$; $w(AB) = 0{,}06$; $w(0) = 0{,}37$.

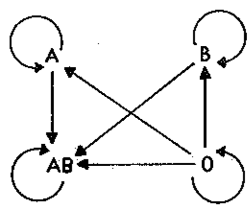


Fig.46

Betrachten wir nun die möglichen Paarungen und die möglichen Blutgruppen der Kinder:

x	A	B	AB	0
A	A,0	A,B,AB,0	A,B,AB	A,0
B	——	B,0	A,B,AB	B,0
AB	——	——	A,B,AB	A,B
0	——	——	——	0

Beispiele: a) A × B b) B × AB

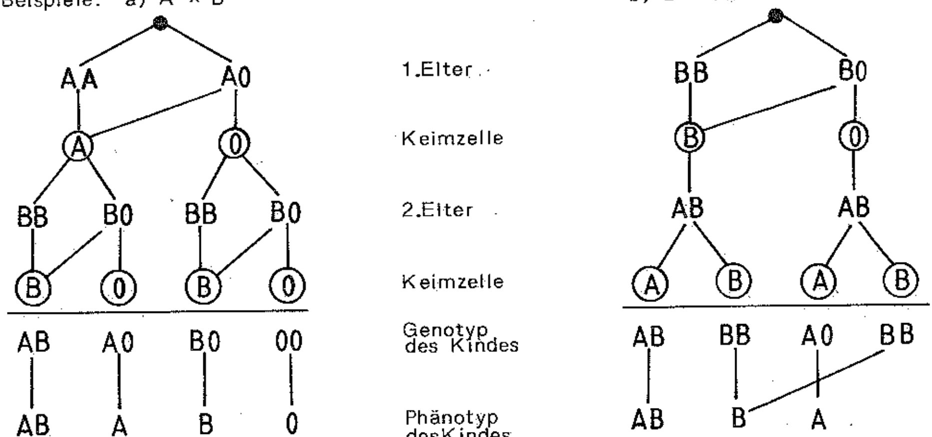


Fig.47 Fig.48

Die letzte Tabelle erlaubt einen gewissen Rückschluß von der Blutgruppe des Kindes und der der Mutter auf die Blutgruppe des Vaters.

Vater ↘		Mutter A	Mutter B	Mutter AB	Mutter 0
Kind	A	A,B,AB,0	A,AB	A,B,AB,0	A,AB
Kind	B	B,AB	A,B,AB,0	A,B,AB,0	B,AB
Kind	AB	B,AB	A,AB	A,B,AB	nicht möglich
Kind	0	A,B,0	A,B,0	nicht möglich	A,B,0

Wenn etwa das Kind die Blutgruppe A hat und die Mutter die Blutgruppe B, so kann nur ein Mann der Blutgruppe A oder AB als Vater in Frage kommen. Solche Überlegungen, die sich durch weitere Blutmerkmale noch erheblich verfeinern lassen, sind wichtig bei Vaterschaftsuntersuchungen.

5.3.1.6 *Vererbung kontinuierlich-variabler Merkmale*

Bei höheren Tieren und beim Menschen gibt es zahlreiche Merkmale (z.B. Körperlänge, Schuhgröße, Intelligenz), die wie die bisher untersuchten Merkmale stochastischer Natur sind, aber im Unterschied zu diesen jeden Wert innerhalb eines bestimmten Intervalls annehmen können. Dabei sind mittlere Werte häufiger als Randwerte.

Beispiel: Körperlänge der erwachsenen Männer in der Bundesrepublik Deutschland

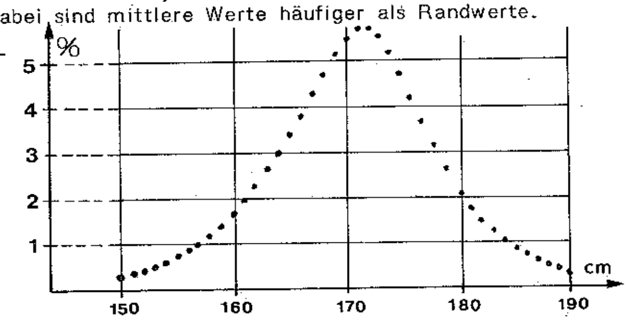


Fig. 49

Die *Genetik* (Lehre von der Vererbung) hat nachweisen können, daß auch solche Merkmale von Genen gesteuert werden, allerdings von mehreren oder vielen, deren Wirkung sich kombiniert.

Dies soll an einem einfachen Beispiel (Zusammenwirken zweier Gene) erläutert werden. Nehmen wir an, daß die Hautfarbe einer Tierart von zwei Genen mit den Zuständen A_0, A_1 bzw. B_0, B_1 bestimmt wird, wobei A_0, B_0 die Färbewirkung 0 und A_1, B_1 die Färbewirkung 1 haben.

Paart sich ein weißes Tier ($A_0A_0B_0B_0$, Färbegrad 0) mit einem schwarzen Tier ($A_1A_1B_1B_1$, Färbegrad 4), so entstehen Bastarde $A_0A_1B_0B_1$ mit dem Färbegrad 2.

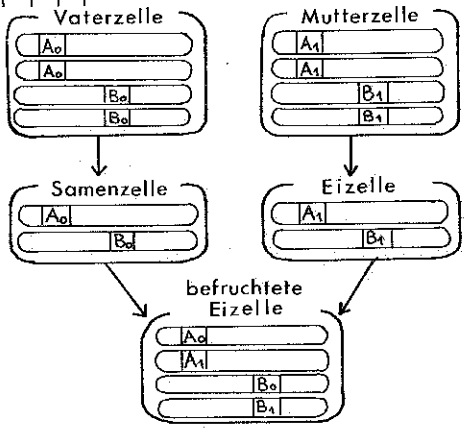


Fig.50

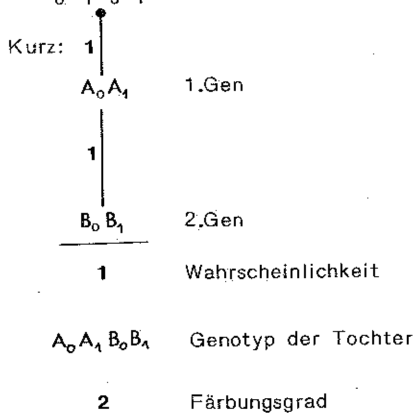


Fig.51

Die Verbindung solcher Bastarde untereinander erbringt folgende Möglichkeiten:

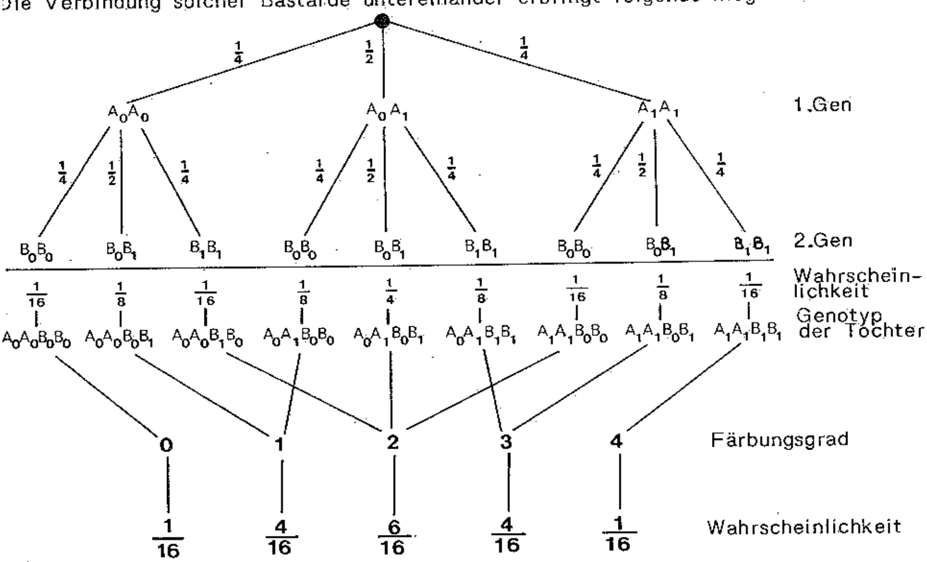


Fig.52

Diese Wahrscheinlichkeiten und die an ihnen abzulesende Bevorzugung der Mitte erinnern an das Galton-Brett.

Tatsächlich kann man das Zusammenspiel der Gene am Galton-Brett simulieren, indem man jedes Elterngen als Zapfen, den Zustand 0 als Fall der Kugel an diesem Zapfen nach links und den Zustand 1 als Fall nach rechts interpretiert:

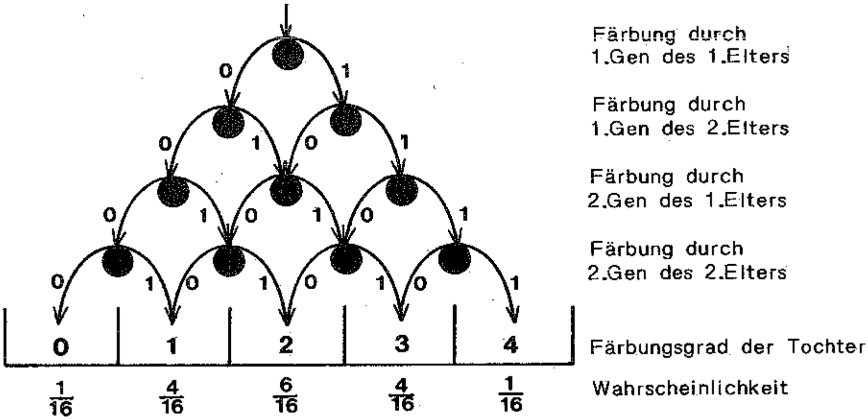


Fig. 53

erwarteter Färbungsgrad: $0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\frac{6}{16} + 3\cdot\frac{4}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = 2$

erwartete Abweichung: $2\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{4}{16} + 0\cdot\frac{6}{16} + 1\cdot\frac{4}{16} + 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{4}$

Entsprechend kann die Vererbung von Merkmalen, die von 3 (n) Genen abhängen, an einem Galton-Brett mit 6 (2n) Zapfenreihen simuliert werden. Mit wachsendem n nähert sich dabei die Wahrscheinlichkeitsverteilung immer mehr der Normalverteilung (Gauß'sche Glockenkurve) an.

5.1.3.7 *Modifikation eines Merkmals durch Umwelteinflüsse*

Die kontinuierliche Variation eines Merkmals kann genetisch begründet sein (s.o.), sie kann aber auch dadurch zustande kommen, daß Umwelteinflüsse die Ausprägung dieses Merkmals mehr oder minder begünstigen bzw. beeinträchtigen. In diesem Falle spricht man von der umweltbedingten *Modifikation* des Merkmals und nennt die Spannweite zwischen den beiden extremen Ausprägungen die *Modifikationsbreite*.

Beispiele dafür sind:
- die Länge der ausgewachsenen Blätter (Nadeln) auf demselben Baum
- das Gewicht der Kartoffeln an derselben Staude
- das Gewicht (die geistige Entwicklung) bei eineiigen Zwillingen .

Wie in 5.3.1.6 sind dabei extreme Beeinflussungen und zugehörige Ausprägungen seltener als Reize und Reaktionen mittlerer Stärke. Und wie dort können wir dieses Phänomen am Galton-Brett simulieren.

Eine bestimmte Pflanze wachse normalerweise 50 cm hoch. Außer dieser genetischen Vorgabe hänge das Wachstum dieser Pflanze noch von folgenden fünf äußeren Faktoren ab: Boden, Feuchtigkeit, Licht, Luft, Schädlingsbefall. Vereinfachend nehmen wir an, daß jeder dieser Faktoren mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ günstig (g) oder ungünstig (u) ausfallen kann; und weiter: daß jeder günstige (ungünstige) Faktor die Pflanzenhöhe um 4 cm erhöht (vermindert).

Dann gilt:

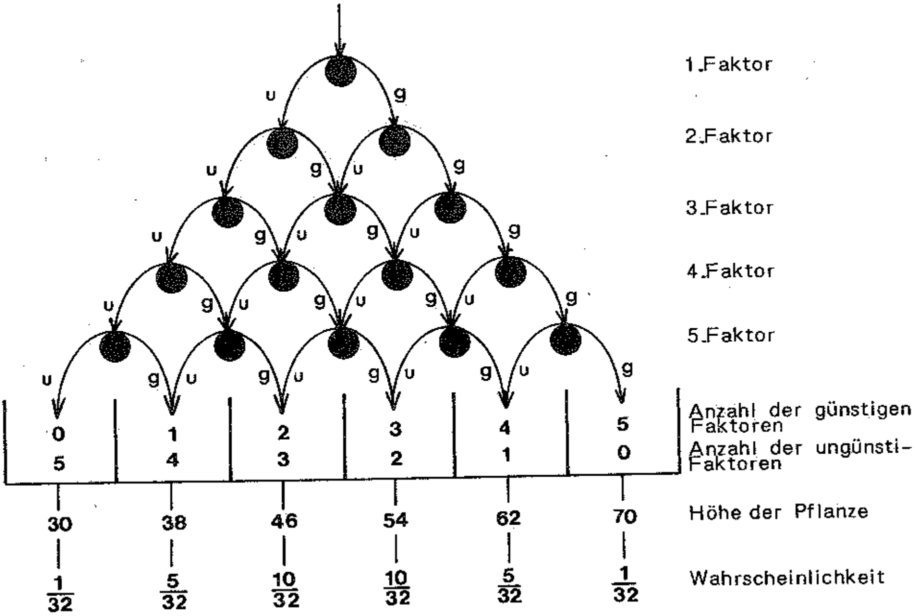


Fig.54

erwartete Pflanzenhöhe: $30\cdot\frac{1}{32} + 38\cdot\frac{5}{32} + 46\cdot\frac{10}{32} + 54\cdot\frac{10}{32} + 62\cdot\frac{5}{32} + 70\cdot\frac{1}{32} = 50$

erwartete Abweichung: $20\cdot\frac{1}{32} + 12\cdot\frac{5}{32} + 4\cdot\frac{10}{32} + 4\cdot\frac{10}{32} + 12\cdot\frac{5}{32} + 20\cdot\frac{1}{32} = 7\frac{1}{2}$

In Wirklichkeit setzt sich der Umwelteinfluß meist aus sehr vielen Faktoren mit je relativ kleiner Wirkung zusammen. Deshalb erbringt er in der Regel eine Normalverteilung des modifizierten Merkmals.

5.3.2 Zielsetzung und didaktische Begründung

Im Projekt sollen folgende Ziele angestrebt werden:

1. einfache und grundlegende Gesetzmäßigkeiten bei der Vererbung von Merkmalen erläutern können
2. solche Gesetzmäßigkeiten mit stochastischen Mitteln begründen können
3. biologische Phänomene und Prozesse durch stochastische Modelle simulieren können
4. erkennen, daß stochastische Mittel geeignet sind, Phänomene und Prozesse der Vererbung zu klären bzw. zu lösen

Damit leistet das Projekt einen spezifischen Beitrag zum Fundamentalziel des Curriculums (s. S.20) und zu dem wichtigen Gesamtziel eines jeden Mathematikunterrichts (s. S.21)

Situationen (insbesondere solche aus unserer Umwelt) mathematisieren können

Für das Projekt sprechen folgende Gründe:

a) Sowohl die älteren als auch die neuen Biologie-Lehrpläne für die Hauptschule sehen eine Einführung in die Grundlagen der Vererbung vor. Dies entspricht einmal der Bedeutung, welche diesem Thema beim Aufbau eines Grundverständnisses für die Gesetzmäßigkeiten in der belebten Natur zukommt; zum anderen wird sie dem gesteigerten Interesse der Jugendlichen dieser Altersstufe für Probleme der Fortpflanzung und der Vererbung gerecht.

b) Die in den Biologie-Büchern der Sekundarstufe I übliche Darstellung des Themas kann durch die Verwendung des Wahrscheinlichkeitskonzepts zugleich präzisiert und vereinfacht werden.

c) Mit der Genetik erschließt sich für den Schüler ein wichtiger, nichttrivialer Anwendungsbereich der Stochastik; es kann exemplarisch deutlich werden, welchen Gewinn auch andere Wissenschaften aus der Benutzung stochastischer Methoden ziehen.

d) Für die Durchführung des Projekts sind biologische und mathematische Fachkenntnisse erforderlich. Sieht man von dem günstigen Sonderfall ab, daß ein Lehrer sowohl Mathematik als auch Biologie unterrichtet, wird in aller Regel eine Kooperation zwischen den entsprechenden Fachlehrern erforderlich sein. Diese umfaßt

- ein gezieltes Hinarbeiten auf das Projekt (Schaffen der jeweiligen Voraussetzungen in den beiden Fächern)
- team-teaching während des Projekts oder aber intensive Beratung des Projektleiters (dies kann durchaus auch der Biologie-Lehrer sein !) durch den anderen Fachlehrer
- Übung, Erweiterung und Vertiefung des Lehrstoffes nach Projektdurchnahme (etwa in der Biologie: Selektion, Mutation, Vererbung beim Menschen (Zwillingsforschung); in der Mathematik: Hardy-Weinberg-Gesetz, Einführung der Normalverteilung und Umgang mit ihr)

Eingestandenermaßen leidet der Unterricht in den Abschlußklassen der Sekundarstufe I an der starren Aufteilung in einzelne Fächer und am isolierten Arbeiten in diesen Fächern. Komplexe Phänomene und Probleme bedürfen, wenn sie nicht einseitig und damit oberflächlich behandelt werden sollen, eines entsprechend reichhaltigen Instrumentariums. Das Projekt kann dazu einen bescheidenen Beitrag leisten.

e) Der Unterricht kommt mit den in den Teilcurricula 7 und 8 entwickelten stochastischen Begriffen und Methoden völlig aus. In der Hauptsache genügt sogar das Arbeiten am Baumdiagramm.

f) Daß bei der Analyse kontinuierlich-variabler Merkmale und bei der Variation von Merkmalsausprägungen durch Umwelteinflüsse mit dem Galton-Brett wieder auf das Leitmedium des Teilcurriculums STOCHASTIK 7 zurückgegriffen werden kann, ist ein besonderer Vorzug des Projekts. Hierbei wird exemplarisch deutlich, daß das in Klasse 7 aufgerollte Problem der Mittenbevorzugung und ihres häufigen Auftretens in der Wirklichkeit sich aus dem stochastischen Zusammenwirken vieler kleiner Ursachen erklärt.

Als Schwächen des Projekts muß man anführen:

a) Es sind nur wenige biologische Primärerfahrungen (über Beobachtungen oder Versuche) möglich, da entsprechende Experimente meist eine Vielzahl von Lebewesen erfordern und erhebliche Zeit benötigen. Die Aktivitäten der Schüler entfalten sich also bevorzugt auf der ikonischen und der symbolischen Ebene.

Umso wichtiger sind daher die möglichen Simulationen durch konkrete Urnen- und Galton-Experimente.

b) Die in der Klasse 8 erarbeiteten charakteristischen Werte einer Verteilung lassen sich im Projekt nur in der letzten Phase (s. 5.3.1.6 und 5.3.1.7) anwenden, da die Gen- bzw. Genotypzustände i.a. keine Zahlen sind.

Im Vergleich überwiegen jedoch die Vorteile bei weitem.

5.3.3 Vorschläge für eine Sequenzierung

5.3.3.1 *1. Phase: Merkmale und ihre Vererbung*

Ziele

1. wissen, daß viele Merkmale bei Menschen, Tieren und Pflanzen nicht umwelt-, sondern anlagebedingt sind und daß solche Anlagen vererbt werden können
2. erläutern können, wie solche Merkmale in den Zellen der Lebewesen gespeichert und wie die Merkmalträger bei der Zeugung neuer Lebewesen weitergegeben werden
3. erläutern können, wieso diese Weitergabe ein Zufallsexperiment ist

Didaktische Begründung

In dieser Phase soll das biologische Vorwissen der Schüler über Merkmale und ihre Vererbung aufgenommen und (gegebenenfalls unter Durchführen eigener Experimente) so weit vertieft werden, daß der stochastische Charakter der Erbanlagen-Weitergabe klar hervortritt.

Verlaufsskizze

Als Einstieg empfiehlt sich das Eingehen auf bestimmte Körpermerkmale des Menschen (z.B. Körperlänge, Haarfarbe, Augenfarbe, Gesichtsform) und auf die Abhängigkeit von deren Ausprägung bei den Eltern.

Es muß deutlich werden, daß

- diese Abhängigkeit wohl auf vererbbaren Anlagen beruht
- sie trotzdem nicht zu sicher vorherbestimmten Merkmalen bei den Nachkommen führt.

Wo sind solche Erbanlagen bei den Lebewesen zu finden ? Wie werden sie vererbt ?

Mit diesen beiden Fragen wird der Kenntnisstand der Schüler offengelegt, können unterschiedliche Meinungen gegenübergestellt und offensichtlich falsche Antworten zurückgewiesen werden.

Der Lehrer sollte dann in einem durch geeignete Medien (s.u.) unterstützten und mit Beispielen veranschaulichten Vortrag entlang der Linie Zelle - Zellkern - Chromosom - Gen - Genzustand - Erbbild - Keimzelle - befruchtete Eizelle auf zunächst lediglich qualitative Weise in den Prozeß der Merkmalsvererbung einführen, wobei vor allem die Zufälligkeit bei der Chromosomenauswahl für die Keimzelle hervorgehoben werden muß. Besonders deutlich wird dies bei der Betrachtung des Geschlechtschromosoms.

Der Vortrag sollte durch Arbeitsaufträge an die Schüler unterbrochen werden, wie sie in allen Biologiebüchern für die Sekundarstufe I zu finden sind (s. (5), (6) und (7)).

Mögliche Versuche

- tabellarische Erfassung der Abhängigkeit eines menschlichen Merkmals (z.B. Augenfarbe, Form der Nasenlöcher, des Mundes, Fähigkeit zum seitlichen Rollen der Zunge) von seiner Ausprägung bei den Eltern (Stichprobe: Klasse)
- PTH (= Phenylthioharnstoff) - Schmecktest
  Dieser Test ist billig über jede Apotheke zu beziehen. Die PTH-Plättchen werden je nach Genzustand als bitter empfunden oder nicht ($w(\text{bitter}) = \frac{2}{3}$, $w(\text{nicht bitter}) = \frac{1}{3}$). Neben den Schülern sollten auch die Eltern und Großeltern als Probanden herangezogen und Zusammenhänge in der Generationenfolge ermittelt werden.
- Züchtungsversuche mit Wildtyp und Zuchtstämmen der Taufliege (Drosophila), die sich rasch vermehrt und schnell zu mehreren Generationen führt.

Dazu gibt es einen Experimentierkasten (mit Gebrauchs- und Versuchsanleitung) der Firma Phywe.

Wildtyp und Zuchtstämme werden in kleinen Kulturgefäßen im Larven- oder Puppenstadium geliefert. Sofort nach Eintreffen werden die Stämme in eigenen Kulturgläsern (mindestens 3 Gläser pro Stamm) bei zunächst 25° C, später bei Zimmertemperatur weitergezüchtet. Vorhandene Fliegen kann man entfernen, sobald die Maden zu sehen sind. Wenn dies jede Woche geschieht, kann man ein Glas 4-6 Wochen benutzen.

Als Kulturglas kann ein Marmeladenglas dienen; der Nährboden besteht aus 90 g Zucker, 70 g Mais- oder Weizengries, 15 g Trockenhefe und 15 g Agar-Agar-Pulver, die in einem Liter Wasser zum Quellen gebracht werden. Diese Mischung wird mehrfach 1 - $1\frac{1}{2}$ Stunden im Dampfkochtopf erhitzt. Dazwischen wird etwas Nipagin zugesetzt, um Schimmelbildung zu vermeiden.

Der heiße Futterbrei wird in die heißen (sterilisierten) Gläser etwa 2 cm hoch eingefüllt. Die Gläser müssen in einem trockenen Raum (Backofen) auskühlen, damit das Kondenswasser verdunstet, ohne daß der Boden infiziert wird. Auf den abgekühlten Nährboden gibt man etwas Hefesuspension als Nährmittel für die Larven. Weiterhin drückt man einen Filterpapierkegel hinein, um zu verhindern, daß die Fliegen auf dem Nährboden festkleben. Endlich verschließt man das Glas mit einem gazeumwickelten Wattepfropfen.

Es gibt u.a. folgende Stämme (die sich vom Wildtyp jeweils in einem (oder mehreren gekoppelten) Merkmalen unterscheiden):

e: dunkle Körperfarbe; dunkelbraune Augenfarbe; kleine, nicht ausgebreitete Flügel
Cy: Stummelflügel
w: gelbe Körperfarbe; weiße Augenfarbe

Alle Abweichungen vom Wildtyp sind rezessiv. Die Abweichung w ist geschlechtsgebunden.

In dieser ersten Phase züchtet man nur innerhalb der Stämme weiter. Dazu bringt man zunächst alle Fliegen eines Stammes in ein leeres Glas und verschließt es mit einem äthergetränkten Wattebausch. Nachdem die Fliegen betäubt sind, kann man Männchen und Weibchen (größer, mehr Bänder am Hinterleib) trennen. Zum Erzeugen der Tochtergeneration werden 5 Pärchen in ein fertiges Kulturglas gesetzt.

Zeitplan:
14 Tage vor Beginn der Kreuzung: Anzucht der Fliegen des Stammes
4-6 Stunden vor Beginn der Kreuzung: Ausschüttung aller geschlüpften Fliegen
Beginn der Kreuzung: Einsetzen von 5 Pärchen
8 Tage nach Beginn der Kreuzung: Entfernen der Elterntiere
12-14 Tage nach Beginn der Kreuzung: Tochtergeneration schlüpft aus

Die Schüler stellen fest, daß alle Exemplare der Tochtergeneration genau so aussehen wie die Eltern, und führen diese Beobachtung auf die Tatsache zurück, daß sich die Eltern offensichtlich in keiner Anlage unterscheiden.

Hinweis:
Wem diese Versuche zu kostspielig und aufwendig sind, kann sich mit Fruchtfliegen begnügen, die er im Sommer fängt, wenn sie (Name !) sich von überreifem Obst ernähren. Anleitungen dazu und zu diesbezüglichen Versuchen gibt (5).

Zeitbedarf

etwa 3-5 Stunden je nach dem Ausmaß der Fliegen-Versuche (wobei deren Vorbereitung außerhalb des Unterrichts und zeitlich vor dem Projekt geschehen muß)

Medien

Fotos oder Skizzen von Riesenchromosomen sowie vom Chromosomensatz des Menschen (in einschlägigen Schul- oder Sachbüchern);

entsprechende Dias oder Folien, z.B. Feinbau der Zelle – Braunschweig: Westermann (Best.-Nr. 35 67 00)

Charakteristische Aufgaben

1. Welche Merkmale können beim Menschen vererbt werden ? Welche Zustände können diese Merkmale haben ?
2. Was kann bei Tieren (Pflanzen) vererbt werden ? Mit welchen Zuständen ?
3. Nenne Merkmale bei Mensch, Tier und Pflanze, die sicher nicht anlage-, sondern umweltbedingt sind ?
4. Wieso handelt es sich bei der Weitergabe von Erbanlagen an die Nachkommen um ein Zufallsexperiment ?
5. Warum benutzt man bei der Untersuchung der Vererbungsvorgänge hauptsächlich Pflanzen und niedere Tiere ?
6. Was wird passieren, wenn man Fliegen desselben Stammes sich vermehren läßt ? Wie macht man das ? Wie wird die Tochtergeneration, wie die Enkelgeneration aussehen ?
7. (Nach Durchführen der in 6. vordiskutierten Versuche:) Wie ist das Ergebnis zu erklären ?

5.3.3.2 *2.Phase: Erstes und zweites Mendel'sches Gesetz*

Ziele

1. erläutern, am Urnenmodell simulieren und mit Wahrscheinlichkeiten quantifizieren können, wie ein Merkmal sich vererbt
   a) bei intermediärem
   b) bei dominant-rezessivem Erbgang
   wenn beide Eltern in bezug auf dieses Merkmal reinerbig sind
2. ...
   wenn beide Eltern in bezug auf dieses Merkmal mischerbig sind
3. erläutern können, wie man bei dominant-rezessivem Erbgang die Reinerbigkeit eines Lebewesens feststellen kann

Didaktische Begründung

In Erweiterung und Vertiefung der 1.Phase bringt dieser Abschnitt die Erfassung des Erbgangs einer Anlage durch das Wahrscheinlichkeitskonzept. Dabei erweist sich der dominant-rezessive Erbgang in stochastischer Sicht als Vergröberung des intermediären.

Verlaufsskizze

Der Lehrer schildert die Untersuchungen von C.E.CORRENS (1864–1933) an der Japa-

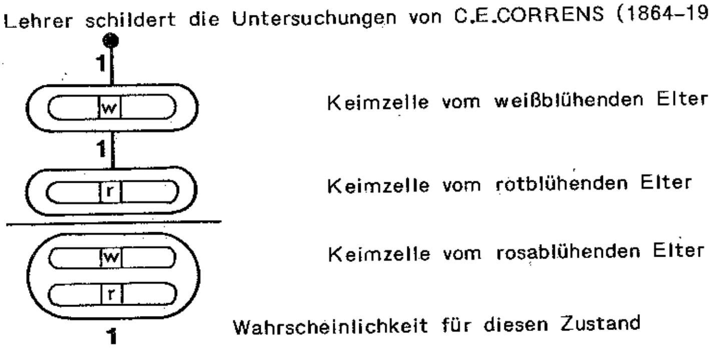


Fig.55

nischen Wunderblume (um 1900). Bei der "Kreuzung" (dieser Begriff sollte kurz erläutert und veranschaulicht werden, s.Medien) einer weißblühenden mit einer rotblühenden Art entstand in allen Fällen eine rosablühende Tochterpflanze.

Die Schüler erarbeiten die Deutung dieses Phänomens (etwa gemäß Fig.33) und fassen wie in Fig. 55 zusammen.

Es folgt ein Lehrerhinweis auf weitere Beispiele dieser Art, etwa:

- rot blühendes und gelblich blühendes Löwenmäulchen; intermediär: rosa blühendes Löwenmäulchen
- schwarzes Huhn und weißes, fein dunkel gesprenkeltes Huhn; intermediär: stark schwarz und weiß gesprenkeltes Huhn,

sowie auf die relative Seltenheit und den Namen dieses Erbgangs: "vermischend" oder "intermediär" .

Anschließend kreuzte Correns die rosa blühenden Mischlinge. Was passierte da wohl ?

Beim Sammeln und Diskutieren der Meinungen sollte der Lehrer seine Schüler wiederum zu der bewährten Darstellung führen:

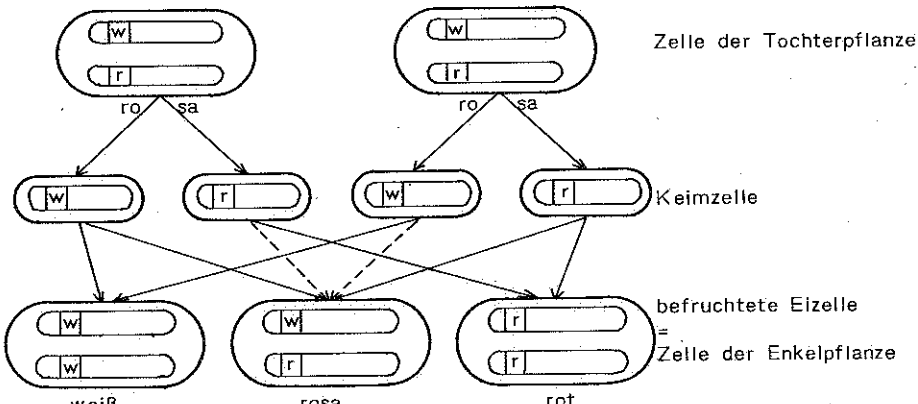


Fig.56

Es können also rote, weiße und rosafarbene Enkelpflanzen entstehen. Die Erzeugung dieser Pflanzen ist (und dies im Unterschied zum Zustandekommen der Tochterpflanzen) ein Zufallsexperiment.

Welches sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ? M.a.W.: Welche Anteile kann man (bei genügend vielen Versuchen) für die drei Farben erwarten ? Dazu wird der Erbvorgang durch zwei Urnen mit je einem roten und einem weißen Ball simuliert.

Es entsprechen sich dabei

Modell	*Wirklichkeit*
1. (2.) Urne	Zelle der 1. (2.) Pflanze
Inhalt der 1. (2.) Urne	Genpaar der 1. (2.) Pflanze
Herausholen eines Balles aus der 1. (2.) Urne	zufälliges Bilden einer Keimzelle der 1. (2.) Pflanze
Zusammenlegen der beiden herausgeholten Bälle in einer 3.Urne	Bilden einer befruchteten Eizelle, aus der dann eine Tochterpflanze entsteht

Unsere Frage lautet nun: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der zufällige Inhalt der 3.Urne einfarbig weiß, einfarbig rot, gemischt weiß und rot ?

Sie kann am Baumdiagramm (s.o.) auf einfache Weise beantwortet werden: Die Verteilung ist

weiß	rosa	rot
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

.

In der Tat erhielt Correns nach vielen Kreuzungen etwa 50% Mischlinge und je 25% weiße bzw. rote Blumen.

An dieser Stelle sollte daran erinnert werden, daß Wahrscheinlichkeitsverteilungen nur "Idealfälle" von Häufigkeitsverteilungen sind, die man nach vielen Versuchen erhält. Die Verteilung 1:2:1 bedeutet also nicht, daß von 4 Tochterpflanzen eine rot, zwei rosa und eine weiß sein müssen, wie von manchen Biologie-Büchern (unbewußt) vermittelt wird.

Nun erfolgt der Hinweis auf die Mendel'schen Versuche (von denen Correns nichts wußte) an Erbsen mit gelbem und grünem Samen. Er hat bei deren Kreuzung in der Tochtergeneration nicht etwa gelblich-grüne oder gelb-grün gestreifte Erbsenkörner (oder gar in derselben Schote gelbe und grüne Körner) erhalten, sondern durchgehend gelbe. Und als er diese Tochterpflanzen unter sich kreuzte, gelbe und grüne etwa im Verhältnis 3:1 .

Es wird herausgearbeitet, daß hier offensichtlich nicht nur die reinerbig gelben Pflanzen, sondern auch die Mischlinge (mit Genotyp Gg , wobei G = gelb und g = grün) gelbe Körner haben, daß also gelb über grün dominiert. So kommt es in der Enkelgeneration zu folgender Farbverteilung:

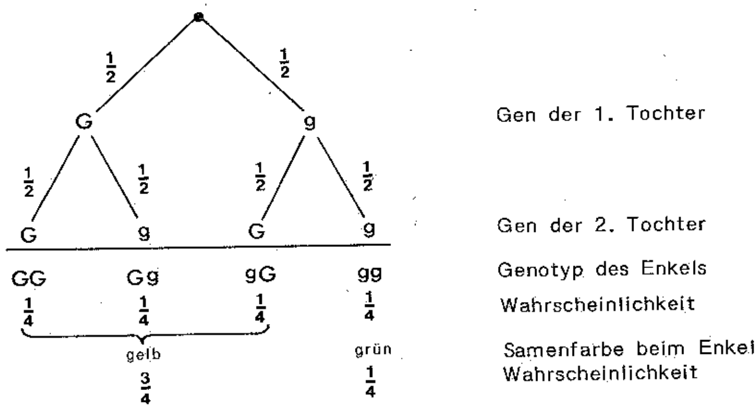


Fig.57

Bei solchen "überdeckenden" (dominant-rezessiven) Erbgängen muß man also zwischen dem "Erbbild" (Genotyp) und dem "Erscheinungsbild" (Phänotyp) eines Lebewesens unterscheiden: Lebewesen mit verschiedenem Erbbild können durchaus dasselbe Erscheinungsbild haben.

Anders als bei der Lehrerinformation (s. S.94ff), wo Genvariablen benutzt wurden, sollte im Unterricht stets mit konkreten Merkmalen argumentiert werden. Allerdings muß deutlich sein, daß die dabei erzielten Einsichten auch für alle anderen intermediären bzw. dominant-rezessiven Erbgänge eines Merkmals zutreffen. Der Lehrer wird deshalb weitere Beispiele nennen und dabei die wesentlich größere Häufigkeit überdeckender Erbgänge hervorheben.

Die beiden ersten Mendel'schen Gesetze erscheinen dann als Zusammenfassung aller bisherigen Beobachtungen und Untersuchungen.

Nun erhebt sich die Frage, wie man einer Erbsenpflanze mit gelbem Samen überhaupt ansehen kann, ob sie rein- oder mischerbig ist (insbesondere: woher Mendel wußte, daß die gelben Erbsen, mit denen er seine Versuche begann, reinerbig waren). Sie wird gelöst durch die Häufigkeitsverteilung der Nachkommen beim Kreuzen mit einer grünen (und daher sicher reinerbigen) Rasse (s. 5.3.1.3). Kurz: Der Pflanze selbst kann man den Genotyp nicht entnehmen, wohl aber dem Ausfall ihrer Nachkommen bei geeigneter Kreuzung.

Abschließend sollte der Lehrer erwähnen, daß erbbiologische Experimente und Untersuchungen beim Menschen aus vielerlei Gründen (Menschenwürde, lange Generationsdauer, geringe Nachkommenzahl, große Zahl der Chromosomen und Gene) sehr schwierig sind. Trotzdem weiß man, vor allem durch die Familien- und Zwillingsforschung, daß auch dort die Mendel'schen Gesetze gelten und daß sie bei der Erfassung anlagebedingter Krankheiten und ihrer Verläufe durch die Generationen eine große Hilfe sind.

Mögliche Versuche

Zu diesem Abschnitt gehören Kreuzungen des Wildtyps der Taufliege mit den verschiedenen Zuchtstämmen. Das unterscheidende Merkmal sollte (zunächst) nicht geschlechtsgebunden sein, so daß der Stamm w hier nicht in Frage kommt.

In ein Zuchtglas setzt man 5 Männchen des Wildtyps und 5 Weibchen des Zuchtstamms; in einem anderen Zuchtglas geht man umgekehrt vor. Da mit den Fliegen der Tochtergeneration weitergezüchtet werden muß (um die Enkelgeneration zu erhalten), umfaßt das Experiment etwa 6 Wochen. Es ist daher zu empfehlen, das Experiment bereits in der 1.Phase anzusetzen und die 2.Phase erst dann zu beginnen, wenn seine Ergebnisse qualitativ (Aussehen der Generation) und quantitativ (Häufigkeitsverteilung der Zustände des unterscheidenden Merkmals) vorliegen. Gleiches gilt auch für die Drosophilaversuche in den nächsten Phasen.

Es bleibt dem Lehrer überlassen, ob er mit dem Ergebnis der Auszählungen die zuvor theoretisch gewonnenen Ergebnisse bestätigen läßt oder aber mit diesem Ergebnis die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen überhaupt erst motiviert. Der zweite Weg ist wohl der interessantere, aber auch schwierigere.

Zeitbedarf

etwa 3-5 Stunden

Medien

Filme:
Natürliche und künstliche Bestäubung der Erbsenblüte (FWU 8F 95);
Kreuzung von zwei Erbsenrassen (Uniformitätsregel) (FWU 8F 96);
Kreuzung von zwei Erbsenrassen (Spaltungsregel) (FWU 8F 97)

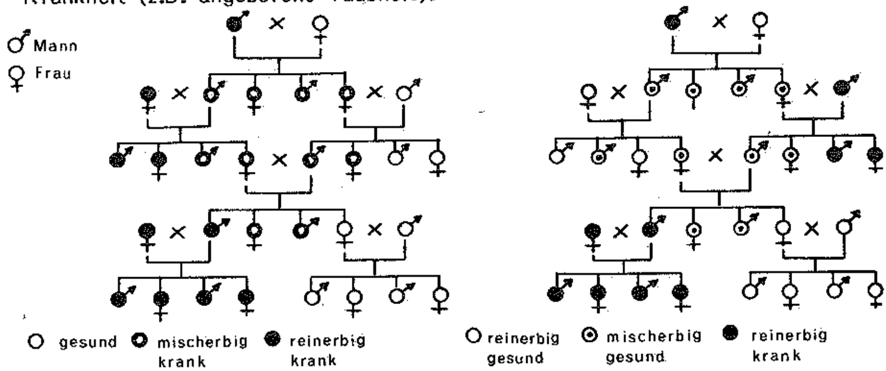
Folien:
Die Gesetzmäßigkeiten der Vererbung (Foliensatz); hier:
17 21 20: Das Kreuzen von Pflanzen
17 21 21: Mendel 1 und 2 (intermediär)
17 21 22: Mendel 1 und 2 (dominant-rezessiv)
17 21 27: Dominanter Erbgang beim Menschen
17 21 28: Rezessiver Erbgang beim Menschen
Düsseldorf: Hagemann

entsprechende Zeichnungen in Biologie-Sachbüchern und -Schulbüchern

Charakteristische Aufgaben

1. Veranschauliche auch das Zustandekommen der Tochtergeneration am Urnenmodell.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht eine rote (weiße, rosafarbene) Wunderpflanze, wenn man
   a) eine rosafarbene mit einer roten
   b) eine rosafarbene mit einer weißen
   c) eine rote mit einer roten
   Wunderpflanze kreuzt ?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entstehen Erbsenpflanzen mit grünen bzw. gelben Körnern, wenn man
   a) zwei Pflanzen mit grünen Erbsen kreuzt
   b) eine Pflanze mit gelben Erbsen mit einer Pflanze mit grünen Erbsen kreuzt (Vorsicht: zwei Fälle !)

4. Die linke untere Figur zeigt den Verlauf einer dominanten menschlichen Krankheit (z.B. Nachtblindheit) über 5 Generationen hinweg, die rechte den einer rezessiven Krankheit (z.B. angeborene Taubheit).



a) Erläutere die beiden Figuren.
b) Zeige, daß die beiden Verläufe mit den Mendel'schen Regeln in Einklang stehen.
c) Warum sind rezessive Krankheiten (rechte Figur) besonders tückisch ?
d) Warum sollten nahe Verwandte (z.B. Cousin und Cousine) einander nicht heiraten bzw. im Falle einer Heirat kinderlos bleiben ?

5. Was wird passieren, wenn man den Zuchtstamm e mit dem Wildtyp der Taufliege kreuzt ? Wie macht man das ? Wie wird die Tochtergeneration, wie die Enkelgeneration aussehen ?

6. (Nach Durchführung des Versuchs in 5.) Wie sind die Ergebnisse zu erklären ?

5.3.3.3 *3. Phase: Kombination und Koppelung von Merkmalen*

Ziele

1. erläutern, am Urnenmodell simulieren und mit Wahrscheinlichkeiten quantifizieren können, wie zwei voneinander unabhängige Merkmale sich bei dominant-rezessivem Erbgang vererben, wenn beide Eltern in bezug auf diese Merkmale reinerbig sind

2. ..., wenn beide Eltern in bezug auf diese Merkmale mischerbig sind

3. erläutern können, welche Bedeutung der Merkmalkombination bei der Züchtung neuer Pflanzen- und Tierrassen zukommt

4. am Beispiel erläutern können, wie sich ein geschlechtsabhängiges Merkmal bei dominant-rezessivem Erbgang vererbt

Didaktische Begründung

In diesem Abschnitt findet eine für das genetische Sequenzieren typische Problemerweiterung statt. An die Stelle der isolierten Betrachtung einzelner Merkmale tritt deren Kombination; dabei wird zunächst das schon von Mendel untersuchte Zusammenspiel zweier unabhängiger Merkmale (3.Mendel'sches Gesetz) geklärt und dann als wichtigstes Beispiel für Abhängigkeit (Koppelung) der Erbgang eines geschlechtsgebundenen Merkmals verfolgt.

Aus beiden Gesetzmäßigkeiten lassen sich wichtige Folgerungen ziehen: im ersten Falle für das Züchten neuer, besserer Rassen und im zweiten Falle für ein sinnvolles genetisches Verhalten des Menschen.

Verlaufsskizze

Die Schüler werden zunächst mit dem zugehörigen Mendel-Experiment und seinen Ergebnissen bekannt gemacht (s.o.): In der Tochtergeneration erhielt Mendel nur Pflanzen mit gelb-rundem Samen, bei deren Kreuzen in der Enkelgeneration 315-mal gelb-rund, 108-mal grün-rund, 101-mal gelb-kantig und 32-mal grün-kantig. Dies führt zur (gerundeten) Häufigkeitsverteilung

Samen	gelb-rund	grün-rund	gelb-kantig	grün-kantig
Anteil	0,57	0,19	0,18	0,06

Während das Aussehen der Tochterpflanzen nicht erstaunt (die Schüler wissen ja, daß gelb über grün und rund über kantig dominiert), fällt bei den Enkeln auf, daß Rassen erscheinen, die es anfänglich garnicht gegeben hat (gelb-kantig und grün-rund). Weiterhin verwundert die Häufigkeitsverteilung .

Das folgende Diagramm erläutert das Entstehen der Tochterpflanzen. Es sollte von den Schülern möglichst selbständig entwickelt werden.

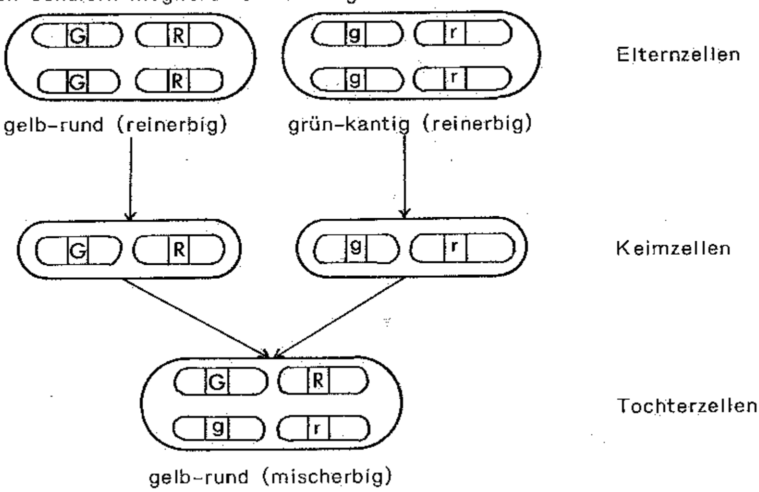


Fig.58

Und weiter:

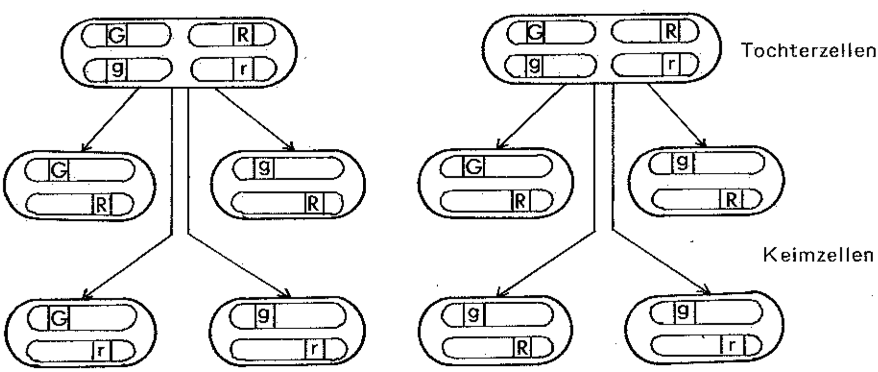


Fig.59

Es gibt demnach 4·4 = 16 Möglichkeiten für die Vereinigung einer der 4 Keimzellen der ersten Pflanze mit einer der 4 Keimzellen der zweiten Pflanze. Die Schüler können sie mit ihren Resultaten in der folgenden Übersichtsmatrix darstellen:

1.Pfl. / 2.Pfl.	GR	gR	Gr	gr
GR	GGRR	GgRR	GGRr	GgRr
gR	GgRR	ggRR	GgRr	ggRr
Gr	GGRr	GgRr	GGrr	Ggrr
gr	GgRr	ggRr	Ggrr	ggrr

Jeder dieser 16 Fälle hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$.

Die Schüler bestimmen nun jeweils das Erscheinungsbild und fassen gleiche Bilder (samt ihren Wahrscheinlichkeiten) zusammen. Dies ergibt die Verteilung:

Samen	gelb-rund	grün-rund	gelb-kantig	grün-kantig
Wahrscheinlichkeit	$\frac{9}{16} = 0{,}56$	$\frac{3}{16} = 0{,}19$	$\frac{3}{16} = 0{,}19$	$\frac{1}{16} = 0{,}06$

.

Selbstverständlich erhält man diese Verteilung auch über ein Urnenexperiment. Man muß dazu aber alle Urnen unterteilen (2 Merkmale !) und bei den beiden Ausgangsurnen in je eine Hälfte eine grüne und eine gelbe Kugel, in die andere Hälfte eine weiße Kugel und einen weißen Würfel (Samenform) geben. Bilden der Keimzelle heißt dann aus beiden Farbenhälften einen Gegenstand ziehen und diese beiden Gegenstände in eine Hälfte der dritten Urne geben sowie aus beiden Formhälften einen Gegenstand ziehen und diese beiden Gegenstände in die zweite Hälfte der dritten Urne geben. Diese Simulation ermöglicht die Anlage eines Baumdiagramms gemäß Fig.45 und führt zur Lösung.

Für weitere Beispiele genügt dann allerdings die o.a. ökonomische Kreuzungsmatrix.

Nun kann die 3.Mendel'sche Regel formuliert werden. Es schließt sich ein kurzer Lehrervortrag an über ihre Bedeutung für das Züchten: Man kann mit ihr günstige Merkmalsausprägungen, die bisher auf verschiedene Rassen verteilt waren (z.B. geringe Frostanfälligkeit und hoher Ertrag bei der Weinrebe, Schnelligkeit und Ausdauer beim Pferd), auf einer neuen Rasse vereinigen. Auf diese Weise sind im Laufe der Zeit unsere Nutzpflanzen und unsere Haustiere entstanden.

Es müssen aber auch die Grenzen dieser Regel zur Sprache kommen: Sie gilt nur für voneinander unabhängige Merkmale. Merkmale auf demselben Chromosom sind stets, d.h. auch im Erbgang miteinander gekoppelt.

Als Beispiel für eine Vererbung abhängiger Merkmale wird nun der Erbgang der Rot-Grün-Blindheit beim Menschen untersucht.

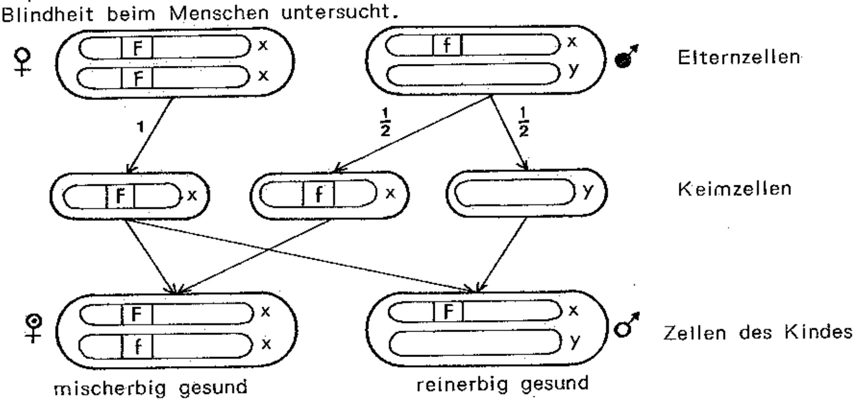


Fig.60 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ Wahrscheinlichkeit

Heiratet ein rot-grün-blinder Mann eine reinerbig gesunde Frau (nach 5.3.1.4 der bei weitem wahrscheinlichste Fall: w = $0{,}95^2 = 0{,}90$), so ist keines der Kinder rot-grün-blind, aber die Mädchen unter ihnen sind nur mischerbig gesund (Fig.60).

Es genügt hierbei, wenn der Lehrer die Rot-Grün-Blindheit und ihre genetische Verankerung vorstellt. Den Erbgang können die Schüler selbst untersuchen.

Dies gilt auch für die nächste Stufe: Die mischerbig gesunde Tochter heiratet einen reinerbig gesunden Mann (wiederum der wahrscheinlichste Fall).

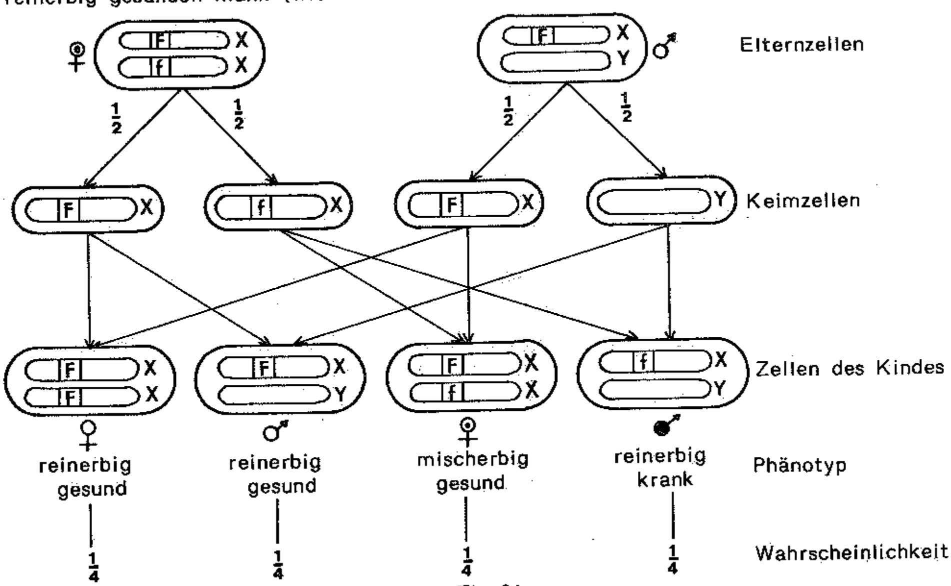


Fig.61

Erstaunlicherweise ist also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ ein rot-grün-blinder Sohn zu erwarten.

Allgemein gilt: Die Rot-Grün-Blindheit wird von der Frau verdeckt weitergegeben, während sie beim Mann ausbricht.

Mögliche Versuche

- Auszählen an einem Maiskolben mit blauen (dominant) oder gelben sowie glatten (dominant) oder runzligen Körnern. Dies kann eventuell auch an einem Foto (wie in (8), S.242) geschehen.
- Kreuzung zwischen den Zuchtstämmen e und Cy der Drosophila (5 e-Männchen und 5 Cy-Weibchen in ein Zuchtglas, 5 e-Weibchen und 5 Cy-Männchen in ein anderes). Es ergibt sich annähernd folgende Verteilung:

Wildtyp	dunkle Körperfarbe	Stummelflügel	dunkle Körperfarbe und Stummelflügel
$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

- Kreuzung zwischen dem Wildtyp und dem Zuchtstamm w der Drosophila. Man erhält ein von den entsprechenden Kreuzungen im eben geschilderten Versuch abweichendes Ergebnis, insbesondere, wenn die Weibchen weißäugig und die Männchen rotäugig (normal) sind. Dann enthält schon die Tochtergeneration weißäugige Fliegen, die sämtlich Männchen sind. Dieses Phänomen wird nur erklärbar durch die Lokalisation des Augenfarben-Gens auf dem X-Chromosom.

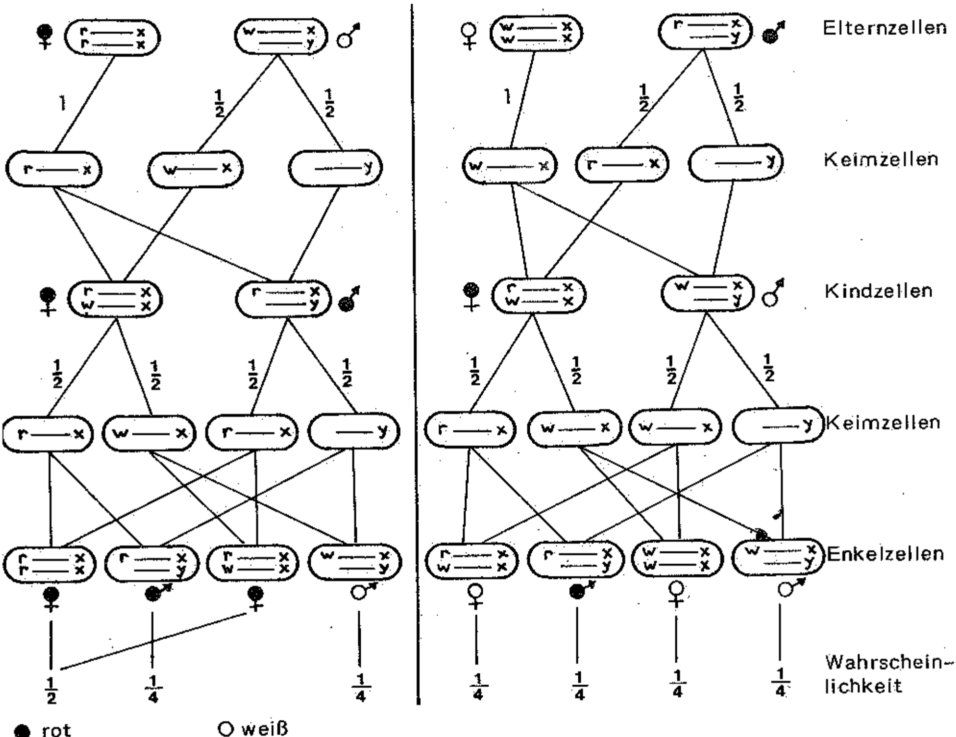


Fig.62

Zeitbedarf

etwa 3-4 Stunden

Medien

Film:
Kreuzung zweier Erbsenrassen (Unabhängigkeit der Erbanlagen) (FWU 8F 98)

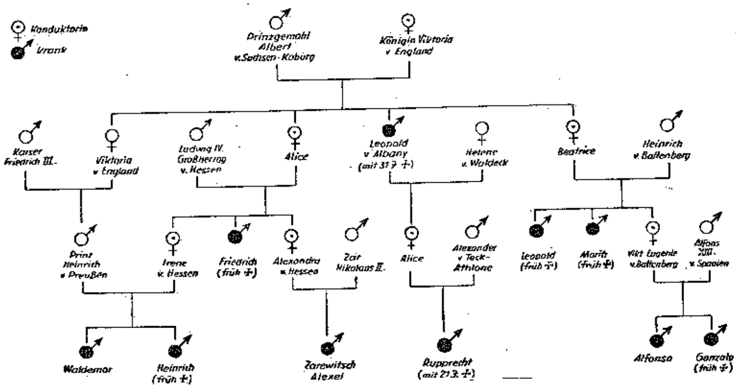
Folien:
Die Gesetzmäßigkeiten der Vererbung (Folienserie); hier:
17 21 23: Mendel 3 (Unabhängigkeitsregel)
17 21 29: Geschlechtsgebundene Vererbung
Düsseldorf: Hagemann
Kreuzung mit zwei Merkmalpaaren (Best.-Nr. 35 66 00)
Kreuzung mit drei Merkmalpaaren (Best.-Nr. 35 66 01)
Braunschweig: Westermann

Charakteristische Aufgaben

1. Zwei Rinderrassen sollen gekreuzt werden. Sie unterscheiden sich in Farbe und Scheckung: Die eine Rasse ist reinerbig braun und reinerbig gescheckt, die andere reinerbig schwarz und reinerbig ungescheckt. Es dominiert schwarz über braun und ungescheckt über gescheckt. Man kann Unabhängigkeit von Farbe und Scheckung voraussetzen.
   a) Wie sehen die Rinder in der Tochtergeneration aus ?
   b) Wie sehen sie in der Enkelgeneration aus und welche Wahrscheinlichkeit haben die einzelnen Erscheinungsbilder ?
   c) Welche Rassen sind neu entstanden ?

2. Beantworte die gleichen Fragen wie in 1. unter der Annahme, daß die Gene für Farbe und Scheckung auf dem gleichen Chromosomenpaar sitzen.

3. Hier siehst du einen Stammbaum europäischer Fürstenhäuser mit Bluterkrankheit (● reinerbig, ⊙ mischerbig):



a) Erläutere ihn.
b) Was fällt dir auf ? Vergleiche die Bluterkrankheit mit der Rot-Grün-Blindheit.
c) Was folgt aus diesem Vergleich ?
d) Sollte ein Bluter Kinder kriegen ? Wie ist das mit dem Sohn oder der Tochter eines Bluters ?

4. Was wird passieren, wenn man die Zuchtstämme e und Cy der Drosophila miteinander kreuzt ? Wie macht man das ? Wie wird die Tochter-, wie die Enkelgeneration aussehen ?
(Nach Durchführen des Experiments.) Wie sind die Ergebnisse zu erklären ?

Hinweis:
Die beschriebenen ersten drei Phasen des Projekts bilden ein Minimalprogramm. Bei seinem Unterschreiten liefe man Gefahr, daß weder die biologische Bedeutung der Genetik noch die Nützlichkeit stochastischer Methoden bei genetischen Untersuchungen zutage tritt.

Das Projekt ist auch dann durchführbar, wenn keine Versuche mit Fliegen möglich sind.

5.3.3.4 4. Phase: Blutgruppen

Ziele

1. erläutern können, wie die Blutgruppen beim Menschen entstehen
2. erläutern können, welche Bluttransfusionen möglich sind
3. Erbgänge von Blutgruppen verfolgen können

Didaktische Begründung

Am wichtigen, interessanten und bekannten Beispiel der menschlichen Blutgruppen werden die biologischen und praktischen Konsequenzen eines Gens mit 3 möglichen Zuständen untersucht (Standpunktverlagerung). Dabei genügt es, wenn der Lehrer die notwendigen biologischen Vorinformationen gibt. Die angegebenen Ziele können dann von den Schülern fast ohne Hilfe erreicht werden, wobei neben stochastischen (kombinatorischen) auch klassische (logische) Schlüsse erforderlich sind (Ziel 2).

Verlaufsskizze

Zunächst wird das Vorwissen der Schüler über Blutgruppen gesammelt; der Lehrer berichtigt, ordnet und vervollständigt. Insbesondere weist er auf die genetische Verankerung der Blutgruppen hin und läßt dann die Schüler von den möglichen Genzuständen und ihren Dominanzen her die Geno- und Phänotypen ausmachen.

Anschließend wird (am besten im gelenkten Gespräch) das Pfeildiagramm der möglichen Bluttransfusionen erstellt.

Bei der Untersuchung des Erbgangs sollte die gesamt Klasse zunächst ein Beispiel (wie etwa A x B in Fig.47) durcharbeiten. Auch hier hilft wieder die Simulation durch ein Urnenmodell. Für den Elter mit der Blutgruppe A hat man 2 Urnen (2 mögliche Genotypen) aufzustellen, eine mit den Zetteln A und A und die andere mit den Zetteln A und 0. Entsprechendes gilt für den Elter mit der Blutgruppe B. Die (zufällige) Blutgruppe des Kindes kommt nun dadurch zustande, daß man pro Elter eine Urne wählt und aus dieser Urne einen Zettel zieht. Die gezogenen beiden Zettel bestimmen den Genotyp und damit auch den Phänotyp.

Die Behandlung der anderen Kombinationen kann dann in Gruppenarbeit geschehen.

Ob man anschließend über die Bedeutung der erarbeiteten Ergebnisse bei Vaterschaftsklärungen redet, muß dem Lehrer überlassen bleiben. Weniger verfänglich ist gewiß der Hinweis auf Blutgruppenuntersuchungen bei Familienzusammenführungen (etwa nach dem 2.Weltkrieg).

Mögliche Versuche

- Feststellen der Blutgruppe eines jeden Schülers (mittels eines in jeder Apotheke erhältlichen Testserums)
- Feststellen der Verträglichkeit bzw. Unverträglichkeit (Verklumpen der roten Blutkörperchen) bestimmter Blutgruppen unter dem Mikroskop

Zeitbedarf

etwa 2 Stunden

Medien

Film:
Das Blut, das du gibst (FWU TK 46)

Folien:
Bestandteile und Funktion des Blutes (Best.-Nr. 17 19 24)
Blutgruppen und Blutübertragung (Best.-Nr. 17 19 04)
Rhesusfaktor (Best.-Nr. 17 19 05)
Düsseldorf: Hagemann
Zusammensetzung des Blutes, Blutbilder (Best.-Nr. 35 70 22)
Die Blutgruppen (Best.-Nr. 35 68 17)
Blutgruppen und Rhesusfaktor (Best.-Nr. 35 70 23)
Braunschweig: Westermann

Charakteristische Aufgaben

1. Herr Müller hat die Blutgruppe A.
   a) Er hat einen Unfall und bekommt eine Bluttransfusion. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er von einer zufällig daherkommenden Person Blut aufnehmen kann ?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er einer verletzten Person Blut spenden kann ?
   c) Beantworte die beiden Fragen auch für den Herrn Bauer (Wagner) mit der Blutgruppe AB (0) .

2. Ein Kind hat die Blutgruppe AB, seine Mutter die Blutgruppe B. Welche Blutgruppe kann der Vater haben ?

3. Beim Gen für die Hautfarbe des Menschen gibt es die beiden Zustände N (normal) und n (albin (= weißhäutig)), wobei N über n dominiert. N tritt mit der Wahrscheinlichkeit 0,993 auf.
   a) Welche Wahrscheinlichkeit hat der Genzustand n ?
   b) Welche Erbbilder sind möglich ? Welche Wahrscheinlichkeit haben sie ?
   c) Welche Erscheinungsbilder gibt es ? Wie wahrscheinlich sind sie ?

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Familie
   a) Mann und Frau die Blutgruppe A haben ?
   b) Mann und Frau die gleiche Blutgruppe haben ?
   c) Mann und Frau verschiedene Blutgruppen haben ?

5.3.3.5 5. Phase: *Merkmale mit gleitenden Zuständen*

Ziele

1. wissen, daß es vererbbare Merkmale mit vielen und ineinander übergehenden Zuständen gibt, und daß diese Merkmale von mehreren Genen festgelegt sind

2. erläutern können, warum bei solchen Merkmalen die mittleren Zustände häufiger (wahrscheinlicher) sind als die extremen

3. diese Erläuterung durch Demonstrationen und Argumentationen am Galton-Brett unterstützen können

4. wissen, daß gleitende Zustände auch durch Umweltbeeinflussung eines von nur einem Gen gesteuerten Merkmals zustandekommen können

5. erläutern können, warum auch in einem solchen Falle mittlere Zustände häufiger (wahrscheinlicher) sind

Didaktische Begründung

Der Einblick in die Vererbung von Merkmalen wäre unvollständig, wenn nicht auch die mehrfach genabhängigen Merkmale betrachtet würden, welche gerade bei höheren Lebewesen recht häufig sind. Das hier wiederum auftretende und auffällige Problem der Mittenbevorzugung führt an den Anfang des Stochastik-Lehrgangs zurück; in der Tat kann die Vererbung solcher Merkmale am Galton-Brett simuliert werden. (Eigens dazu ist es von dem englischen Naturforscher Sir Francis GALTON (1822-1911) konstruiert worden.)

Anderen Ursprungs, aber von gleicher Wirkung sind die Umweltfaktoren, die auf Erbmerkmale Einfluß nehmen können. Die Kenntnis solcher Faktoren und ihrer Wirkung ist ein notwendiges Korrektiv zu der nach den ersten Phasen sich aufdrängenden Meinung, ein Lebewesen (und insbesondere auch der Mensch) sei durch sein Genmaterial bereits vollständig festgelegt.

Verlaufsskizze

Als Einstieg sollte man auf eingangs erwähnte menschliche Merkmale hinweisen, die viele Zustände einnehmen, ja die innerhalb bestimmter Grenzen jeden möglichen Wert haben können: Körperlänge, Fußgröße, Hautfarbe, Intelligenz usw.

Weil infolgedessen fast jeder Wert nur einmal vorkommt, kann man zunächst keine sinnvolle Häufigkeitsuntersuchung durchführen. Faßt man dagegen in Gruppen zusammen, so zeigt sich eine eindeutige Mittenbevorzugung. Als Beispiel eignet sich das auf S.98 angegebene Diagramm, aber auch wiederum die Schulklasse selbst, wenn man nur die Gruppenbreite vernünftig wählt (bei der Körperlänge etwa: 5 cm; bei der Fußgröße: Schuhgröße) und beachtet, daß man nur Schüler desselben Jahrgangs in die Stichprobe aufnehmen sollte.

Woher kommt diese Mittenbevorzugung ?
Woher kennen wir sie ?
Was war der Grund, der am Galton-Brett zur Bevorzugung der mittleren Kästchen führte ?
Welches sind hier wohl die Zapfen ?
Wo traten in der Vererbungslehre schon einmal Mittenbevorzugungen auf ?

Insbesondere die letzte Frage ist ein starker Impuls. Sie bringt den intermediären Erbgang eines Merkmals mit drei Zuständen und die Bevorzugung des mittleren Zustandes in Erinnerung. Er kann am Galton-Brett mühelos simuliert werden:

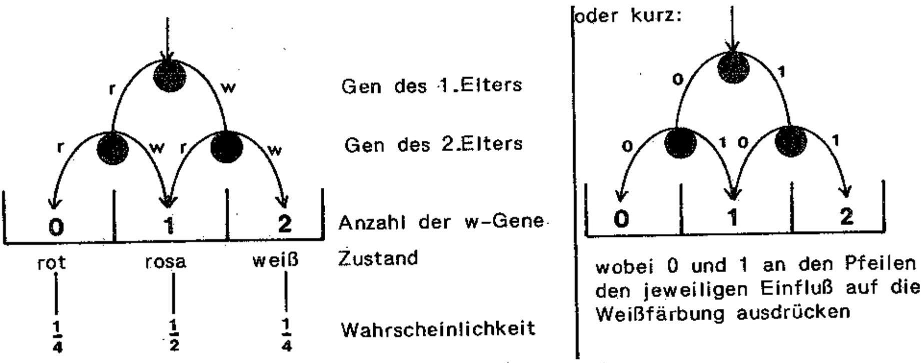


Fig. 63

Daß nun noch mehr Zustände möglich sind, die fließend ineinander übergehen, kann eigentlich nur daran liegen, daß mehrere Gene für das jeweilige Merkmal verantwortlich sind, daß also das erklärende Galton-Brett noch mehr Zapfen-Reihen aufweisen muß; genau: 2 Zapfenreihen pro Gen-Paar.

Damit ist der Schüler vorbereitet für das auf den S.99-100 ausgeführte Beispiel. In Anlehnung an den intermediären Erbgang kann man dann gleich zu Fig.53 vorstoßen und sie durch die Schüler um ein Gen-Paar fortsetzen lassen.

Wenn die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entfallen sind, wird man sie in einem parallelen Diagramm kurz aufarbeiten.

Am Beispiel muß exemplarisch deutlich werden, daß bei mehrfach abhängigen Merkmalen kaum je alle Gene in der gleichen Richtung wirken (so daß selten extreme Zustände eintreten), sondern daß es wahrscheinlicher ist, daß sie sich ganz oder teilweise entgegenarbeiten (wodurch mittlere Zustände entstehen).

Es könnte sein, daß das Aufführen der Intelligenz unter den vererbbaren Merkmalen eine lebhafte Diskussion auslöst. Der Lehrer sollte dazu anmerken, daß eine stochastische Festlegung erheblich mehr Freiheit läßt als eine deterministische; er wird auf die durch die freie Wahl des Ehepartners gegebene ständige Durchmischung des Erbmaterials eingehen und schließlich herausarbeiten, daß Intelligenz allein weder die Lebensqualität noch den Lebensstandard festlegt. Hinzu kommt, daß die Intelligenz durch günstige bzw. ungünstige Außenfaktoren gefördert werden bzw. ungenutzt bleiben kann.

Allgemein: Auch bei gleichem Erbgut können Schwankungen (Modifikationen) im Erscheinungsbild auftreten, die durch Umwelteinflüsse bedingt sind.

Zu diesem Phänomen werden die Schüler gewiß zahlreiche Beispiele nennen und erläutern, welchen Nutzen man (etwa in der Landwirtschaft) daraus ziehen kann. Auch einfache Versuche sind möglich (s.u.).

Daß die durch Außeneinfluß bewirkte Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilung ebenfalls wieder glockenförmig ist, kann wiederum mit Hilfe des Galton-Brettes verdeutlicht werden. Dabei stellen die Zapfen Einflußfaktoren dar, und die an jedem

Zapfen möglichen beiden Kugelwege repräsentieren die Gunst bzw. Ungunst des zugehörigen Faktors.

Mögliche Versuche (zur Modifikation eines Merkmals)

- Feststellen der Blattlänge aller Blätter an einem Birkenast (junge (hellgrüne) Blättchen nicht eingerechnet) und Anlegen einer Häufigkeitsliste, etwa

Länge in mm	24-26,9	27-29,9	30-32,9	33-35,9	36-38,9	39-42
Anzahl						

  sowie des zugehörigen Balkendiagramms

- Bohnensamen läßt man einen Tag in Wasser quellen. Dann gibt man je drei Bohnenkörner in ein Gefäß, wobei Nährboden (feuchte Blumenerde oder feuchte Watte), Licht (hell oder schattig), Temperatur (warm oder kühl) günstig oder ungünstig sein können. Dies ergibt insgesamt $2^3 = 8$ verschiedene Umwelten, unter denen man die Entwicklung der Bohne(n) studieren und vergleichen kann.

Zeitbedarf

2-3 Stunden

Medien

Galton-Brett;
mehrere Urnen mit je einem weißen und einem roten Ball; oder mehrere Münzen (als weitere Möglichkeiten der Simulation)

Charakteristische Aufgaben

1. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zustände, die ein Merkmal einnehmen kann, das zwischen den Farben weiß und rot schwankt und das von 3 Genen bestimmt wird.

2. Ein Tier mit dem Färbungsgrad 2 (2 von 4 Genen sind günstig für rot) und ein Tier mit dem Färbungsgrad 3 (3 von 4 Genen günstig für rot) werden gekreuzt. Erstelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Färbungsgrad beim Nachkommen. Anleitung: Benutze ein Baumdiagramm.

5.3.4 Literatur

(1) Bantje,O.: Schwerpunkte und Grenzen der Mathematisierung des Biologieunterrichts - In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 32 (1979),H.3

(2) Daumer,K.: Genetik - München: Bayerischer Schulbuchverlag

(3) Daumer,K.: Genetik, Handbuch zur Unterrichtsvorbereitung - Köln: Aulis Verlag Deubner

(4) Engel,A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd.2 - Stuttgart: Klett

(5) Garms,H.: Lebendige Welt - Biologie 3 (Sekundarstufe I, 9./10.Schuljahr) - Braunschweig: Westermann

(6) Gerhardt; Dircksen; Höner: Biologie Sekundarbereich I, Bd.3 - München: Bayerischer Schulbuchverlag

(7) Glombek,G.(Hrsg.): Biologie 2 (Klasse 7/8) - Paderborn: Schöningh

(8) Linder,H.: Biologie - Stuttgart: Metzler

(9) Linder; Hübler; Schaefer: Biologie des Menschen - Stuttgart: Metzler

(10) Menke; Frischholz: Biologie in der Sekundarstufe II. Themenheft Genetik - Paderborn: Schöningh

(11) Reichelt,K.: Vererbung bei Pflanze, Tier und Mensch - Esslingen: Schneider

(12) Ritter,H.: Humangenetik - Freiburg: Herder

(13) Siedentop,W.: Methodik und Didaktik des Biologie-Unterrichts - Heidelberg: Quelle & Meyer

(14) Stengel,H.: Genetik - Bamberg: Buchners Verlag

(15) Winkelmann,B.(Hrsg.): Mathematische Modelle in der Biologie, Bd.I - Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik

(16) Winter,H.: Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule - In: Didaktik der Mathematik 4 (1976),H.1

(17) Wolf,K.: Genetik - Braunschweig: Westermann

5.4 Projekt ARBEITSLOSIGKEIT

5.4.1 Zielsetzung und didaktische Begründung

Im Projekt sollen folgende Ziele angestrebt werden:

1. erkennen, daß über das Arbeitslosenproblem häufig ohne große Sachkenntnis, aber mit vielen Vorurteilen diskutiert wird
2. Daten und Informationen zu diesem Problem beschaffen können
3. sich anhand dieser Daten und Informationen Einsicht verschaffen können in das Ausmaß, die Formen und die Gründe der Arbeitslosigkeit
4. am Teilproblem der Jugendarbeitslosigkeit Kriterien für ein optimales Verhalten der (womöglich) Betroffenen entwickeln können

Damit leistet auch dieses Projekt einen spezifischen Beitrag zum Fundamentalziel des Curriculums (s. 2.7) und zu dem wichtigen Gesamtziel eines jeden Mathematikunterrichts

Situationen (insbesondere solche aus unserer Umwelt) mathematisieren können.

Für das Projekt sprechen folgende Gründe:

a) Verbreitete Arbeitslosigkeit ist ein aktuelles, ehemalige Hauptschüler bzw. deren Familien besonders treffendes volkswirtschaftliches Problem, das in der Öffentlichkeit ebenso kontrovers wie emotional diskutiert wird.

b) Staatliche und sonstige öffentliche Institutionen erheben umfassende und vielfältige Daten, die geeignet sind, das Problem (genauer: die zahlreichen in ihm beschlossenen Teilprobleme) schärfer zu fassen und damit bessere Voraussetzungen zu seiner Lösung (im Sinne einer Minimierung) zu schaffen.

   Dies darf aber kein Prozeß sein, der sich nur unter Fachleuten abspielt, sondern muß von der Öffentlichkeit und insbesondere von den Betroffenen mitvollzogen werden können.

   Die Schule sollte dazu einen ersten Beitrag leisten.

c) Bei diesem Projekt wird besonders deutlich, daß das Erheben und Weiterverarbeiten von Daten allein noch keine Lösung bringt, sondern nur Hilfen geben kann für die außermathematische Behandlung eines außermathematischen Problems.

d) Im Unterricht entspricht dieser Tatsache der fachübergreifende Bezug zur Arbeitslehre hin; unterrichtsorganisatorisch bietet sich die Koppelung mit der Arbeitslehre, auf jeden Fall die Beratung durch einen Fachlehrer dieser Disziplin, terminlich die Nähe zum Berufspraktikum oder zur Berufsberatung an.

Insgesamt steht das Projekt u.a. für einen Beitrag des Mathematikunterrichts zur bildungspolitisch immer stärker in den Vordergrund tretenden zentralen Funktion des Arbeitslehreprinzips in der Hauptschule.

e) Gewisse Komponenten des Curriculum-Fundamentalziels zeichnen sich im Projekt besonders deutlich ab:

1. eine stochastische Situation erkennen können

   Unsicher ist hier, ob ein Arbeitssuchender eine Stelle findet, wie viele und welche Stellen geschaffen oder gestrichen werden; und demzufolge: von Monat zu Monat die Zahl der Arbeitslosen, der offenen Stellen, der Jugendlichen unter den Arbeitslosen usw.

3. durch stochastische Verfahren und Schlüsse zusätzliche Informationen gewinnen können

   Hierzu gehören die Bemühungen zum Beschaffen und Auswerten von Daten und Informationen zur Arbeitslosigkeit.

5. sich gemäß den vorliegenden Daten, gewonnenen Informationen und errechneten Lösungen in der stochastischen Situation verantwortungsbewußt und kompetent verhalten können

   s. dazu Ziel 4 auf S.119

6. den Gebrauch stochastischer Mittel durch andere sowie die dort erhaltenen Ergebnisse kritisch überprüfen können

   Dazu bietet vor allem die Darstellung relevanter Daten in den Medien (z.B. in der Tageszeitung) Gelegenheit, aber auch der Gebrauch von (oftmals verschleiernden) relativen Häufigkeiten und Durchschnittswerten bei der Auswertung.

Gegen das Projekt läßt sich anführen:

a) Aus dem vorangegangenen Stochastik-Lehrgang werden nur elementare Methoden der Beschreibenden Statistik gebraucht. Anwendungen des Wahrscheinlichkeitskonzepts und damit prospektive Überlegungen treten nicht auf.

   Dies hat aber andrerseits den Vorteil, daß die Schwierigkeiten mathematischer Art minimal sind und nicht von den eigentlichen Problemen ablenken.

b) Das aufgegriffene Problem läßt sich nicht lösen. Schon gar nicht mit mathematischen Methoden, aber auch offensichtlich nicht mit volkswirtschaftlichen Mitteln, d.h. durch die Fachleute.

   Diese Tatsache ist ebenfalls nur scheinbar ein Nachteil. Der Schüler muß - auch und gerade im Mathematikunterricht - lernen, daß nicht alle Probleme im Stil der Mathematik (more geometrico) lösbar sind, daß gerade die drängenden Probleme des täglichen Lebens - auch dort, wo mathematische Hilfen eingesetzt werden können - nur schrittweise einer Lösung zugeführt, zuweilen auch nur präziser gefaßt werden können.

5.4.2 Vorschläge für eine Sequenzierung

Vorbemerkung:
Da die Detailgestaltung des Projekts in erheblichem Maße von den örtlichen und regionalen Gegebenheiten, von den Eigeninitiativen der Schüler zur Materialbeschaffung und -auswertung sowie von den aktuellen Erscheinungsformen des Phänomens "Arbeitslosigkeit" abhängt, soll nur eine Skizze für den möglichen Projektverlauf gegeben werden.

1.Phase: Qualitative Diskussion des Themas

Ziel:
Erkennen der Problemhaftigkeit des Themas. Wunsch nach weiterer Information, ins-

besondere quantitativer Art, zu speziellen Aspekten des Problems. Herausarbeiten von Möglichkeiten der Datenbeschaffung.

Inhalte:
Behandlung folgender Fragen:
- Was ist das, ein Arbeitsloser ?
- Sind Arbeitslose Faulenzer oder Benachteiligte ?
- Wie viele Arbeitslose gibt es eigentlich ?
- Wie kann es zugleich Arbeitslose und offene Stellen geben ?
- Welche Gruppen sind von der Arbeitslosigkeit besonders betroffen ? Warum wohl ?
- Wovon hängt die Zahl der Arbeitslosen ab ?
- Woher kann man mehr Informationen bekommen ?

Vorgehen:
Ein motivierender Einstieg (etwa über einen Zeitungsartikel) mündet in eine freie Diskussion, in welcher die Meinungen hart aufeinanderprallen. Möglich ist hier auch ein Rollenspiel (Arbeitsloser versus Kritiker).

An die Stelle solcher bloßen Meinungen müssen Fakten und Begründungen treten.

Konstituierung von Gruppen, die für wichtige Teilprobleme Daten beschaffen und auswerten sollen. Anleitungen des Lehrers zur Materialbeschaffung und zur Gruppenarbeit.

2.Phase: Gruppenarbeit

Quellen:

- neuestes Statistisches Jahrbuch der Bundesrepublik Deutschland (Stuttgart: Kohlhammer)
- neuester Jahresbericht der Arbeitskammer des Saarlandes (bzw. einer entsprechenden Institution in anderen Bundesländern) sowie deren Monatsschrift "Arbeitnehmer" (Eigenverlag)
- entsprechende Informationen der Handwerkskammer sowie der Industrie- und Handelskammer
- Auskünfte und Schriften des Statistischen Landesamtes
- Auskünfte und Unterlagen der regionalen und lokalen Arbeitsämter
- Medien

Gruppe: Regionale Unterschiede

Ziel:
Erkennen der unterschiedlichen regionalen Ausprägung von Arbeitslosigkeit und möglicher Ursachen

Inhalte:
Vergleich der absoluten und prozentualen Arbeitslosigkeit auf Länderebene (etwa Saarland, Baden-Württemberg, BRD) und innerhalb des eigenen Bundeslandes (Arbeitsämter). Versuch einer Interpretation der festgestellten Unterschiede.

Vorgehen:
Ausgang von relevanten absoluten Zahlen auf Länderebene. Herausarbeiten, daß sie erst im Vergleich zu der Zahl der jeweiligen Erwerbspersonen für die Fragestellung aussagekräftig sind. Graphische Darstellung und Vergleich der Prozentzahlen sowie Versuch einer Begründung der Unterschiede. Aufspüren solcher Unterschiede in der Heimatregion, insbesondere Vergleich der (selbstbeschafften) lokalen Daten mit dem Landesdurchschnitt. Weiterführung und (eventuelle) Korrektur der Begründungsversuche.

In Zusammenarbeit mit dem Geographielehrer bietet sich u.U. auch ein internationaler Vergleich (etwa innerhalb der EWG-Staaten) an.

Bei allen Vergleichen und Begründungen Heranziehen von Wirtschaftskarten der betreffenden Gebiete.

Gruppe: Temporäre Unterschiede

Ziel:
Erkennen der unterschiedlichen Ausprägung von Arbeitslosigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten. Unterscheiden von saisonalen und konjunkturellen Schwankungen sowie ihrer Ursachen.

Inhalte:
Graphische Darstellung und Auswertung von Zeitreihen. Erkennen kurz- und mittelfristiger Schwankungen. Versuch einer Interpretation. Durchschnittsbildung als Mittel der Trennung der beiden Einflüsse.

Vorgehen:
Vorgabe von überregionalen und regionalen Zeitreihen auf Monatsbasis. Verschaffen entsprechender lokaler Zahlen. Erarbeiten der saisonalen Einflüsse und ihrer Ursachen. Bilden von Jahresdurchschnitten. Erkennen konjunktureller Schwankungen. Gründe ?

Gruppe: Gruppenbezogene Unterschiede

Ziel:
Erkennen der unterschiedlichen Ausprägung von Arbeitslosigkeit in Abhängigkeit vom Alter, vom Beruf, vom Geschlecht, von der Nationalität, vom Ausbildungsstand

Inhalte:
Darstellung, Analyse und Interpretation entsprechender Statistiken

Vorgehen:
Diskussion möglicher Abhängigkeiten ("Wer ist von der Arbeitslosigkeit besonders betroffen ?") und der Methoden zur Sicherung bzw. Ablehnung diesbezüglicher Behauptungen. Verschaffen einschlägigen Zahlenmaterials (relative Daten). Versuch einer Begründung der festgestellten Abhängigkeiten. Besinnen auf die eigene Betroffenheit.

Gruppe: Aktueller Stand und Tendenzen der Arbeitslosigkeit

Ziel:
Feststellen des aktuellen Ausmaßes der Arbeitslosigkeit und der gegenwärtig besonders drängenden Teilprobleme

Inhalte:
Darstellung, Analyse und Interpretation neuester Daten und Informationen

Vorgehen:
Beschaffen dieser Unterlagen z.T. aus den Medien, z.T. bei den erreichbaren Arbeitsämtern und beim Statistischen Landesamt

3.Phase: Zusammenstellung und Diskussion der Gruppenergebnisse

Ziel:
Übersicht über die verschiedenen Formen der Arbeitslosigkeit und ihrer Ausmaße. Versuch einer zusammenfassenden Wertung.

Inhalte:
Ergebnisse der Gruppenarbeit. Weiterhin: Verdeckte Arbeitslosigkeit (Lehrervortrag).

Vorgehen:
Vorstellen der Gruppenergebnisse durch die jeweiligen Gruppensprecher. Kommentare aus der Sicht der anderen Gruppen. Beiträge des Lehrers (Lücken). Zusammenfassung

4.Phase: Jugendarbeitslosigkeit

Ziel:

Vertiefung der Ergebnisse der 3.Phase in einem für die Schüler existenziellen Teilbereich

Inhalte:
Ausmaß, Erscheinungsformen, Gründe, Tendenzen und Konsequenzen der Jugendarbeitslosigkeit

Vorgehen:
Beschaffen und Analysieren spezieller Materialien zur Jugendarbeitslosigkeit. Untersuchung im Klassenbereich: Vergleich der Berufswunschverteilung mit der Lehrstellenverteilung. Wer hat sich schon um eine Lehrstelle bemüht, wem ist eine Lehrstelle sicher, wer kann im gewünschten Beruf beginnen ?

Konsequenzen der Jugendarbeitslosigkeit für Hauptschulabsolventen. Kriterien für ein zweckmäßiges Verhalten. Versuch eines diesbezüglichen Ablaufplans.

5.5 Projekt CHANCEN BEI ÖFFENTLICHEN GLÜCKSSPIELEN

5.5.1 Vorbemerkungen

Während wir für das Projekt "Arbeitslosigkeit" aus guten Gründen auf eine detaillierte Vorgabe von Materialien und Inhalten verzichteten, Zielsetzung, didaktische Begründung und Sequenzierung indessen ausarbeiteten, gehen wir diesmal gerade anders vor:

Wir beschreiben und mathematisieren die öffentlichen Glücksspiele Toto, Lotto, Roulette und Spielautomat (hier muß allerdings ein Beispiel genügen), überlassen aber die didaktische Reflexion und Aufbereitung dieser Inhalte, ihre Abfolge und gegebenenfalls auch eine Auswahl im wesentlichen dem Lehrer.

Mit der Beschränkung auf inhaltliche Vorgaben und methodische Hinweise kommen wir demjenigen Lehrer entgegen, der auf eine eigene didaktische Analyse des Beitrags eines Projekts zu den Gesamtzielen unseres Stochastik-Lehrgangs nicht verzichten möchte, dabei aber gerne auf eine schon genügend elementare Darstellung der Unterrichtsinhalte sowie auf relevante Unterrichtserfahrungen zurückgreift.

Wie in allen Projekten haben wir darauf geachtet, daß diese Darstellung mit denjenigen stochastischen Methoden auskommt, die in den Klassen 7 und 8 erarbeitet wurden. Dies mag an manchen Stellen auf Kosten der Eleganz gehen, macht aber die Darstellung durchweg gut verständlich und gibt dem Schüler die Chance zu einer weitgehend eigenständigen Spielanalyse.

5.5.2 Lotto

Beim Lotto "6 aus 49" werden nacheinander 6 von 49 durchnumerierten Kugeln gezogen, die sich in einer Urne befinden. Abschließend wird eine siebte Kugel herausgeholt, welche die "Zusatzzahl" trägt. Jeder Mitspieler hat zuvor auf seinem Tippschein genau 6 der 49 Zahlen 1; 2; ...; 49 angekreuzt. (Je nach Höhe seines Einsatzes tut er das mehrere Male.) Er gewinnt, wenn er mindestens 3 der gezogenen Zahlen erraten hat.

Es gibt 5 Gewinnränge:

Rang I : 6 Richtige
Rang II : 5 Richtige und die Zusatzzahl
Rang III : 5 Richtige (ohne Zusatzzahl)
Rang IV : 4 Richtige
Rang V : 3 Richtige

Die Höhe des Gewinns in einem bestimmten Rang hängt ab

- von der Gesamthöhe der Einsätze aller Mitspieler
- vom (fixen) Prozentsatz des ausgeschütteten Geldes, der auf den Rang entfällt (z.B. 22,5% auf Rang III)
- von der Anzahl der Gewinntipps in diesem Rang.

Die Gewinnhöhe nimmt i.a. von Rang V zu Rang I hin zu.

Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit in den einzelnen Rängen ? Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir uns vor, daß ein Mitspieler am Samstagabend die Ziehung der Lottozahlen am Fernsehen verfolgt und dabei vor jeder Einzelziehung die Wahrscheinlichkeit notiert, die nächste Zahl angekreuzt zu haben (+) oder nicht (-).

Auf diese Weise erhält man ein Baumdiagramm, das sich von den in früheren Abschnitten des Stochastik-Lehrgangs aufgestellten Baumdiagrammen lediglich durch die große Anzahl der Stufen (6) unterscheidet. Dieses Diagramm führt in bekannter Weise zu den gesuchten Wahrscheinlichkeiten (s. S.126).

Im einzelnen ergibt sich (unter Ausnutzen zahlreicher Rechenvorteile und mit schließlichem Einsatz eines Taschenrechners):

Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige (für einen Gewinn in Rang I):

$$w = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44} = \frac{1}{49\cdot 47\cdot 46\cdot 3\cdot 44} = 0{,}000\ 000\ 07$$

(auf 8 Nachkommastellen gerundet)

Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige:

$$\begin{aligned} w &= \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{43}{44} + \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{43}{45}\cdot\frac{2}{44} + \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{43}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{44} \\ &+ \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{43}{47}\cdot\frac{4}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{44} + \frac{6}{49}\cdot\frac{43}{48}\cdot\frac{5}{47}\cdot\frac{4}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{44} + \frac{43}{49}\cdot\frac{6}{48}\cdot\frac{5}{47}\cdot\frac{4}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{2}{44} \\ &= 6\cdot\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{43}{44} = \frac{43}{49\cdot 47\cdot 23\cdot 3\cdot 44} = 0{,}000\ 018\ 45 \end{aligned}$$

Ob man mit 5 Richtigen in den Rang II oder in Rang III kommt, hängt davon ab, ob man die anschließend gezogene Zusatzzahl getippt hat.

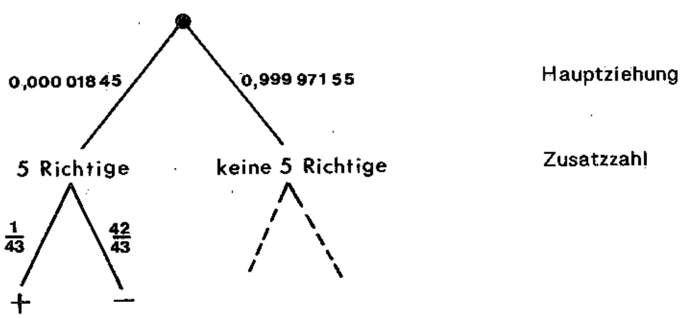


Fig.64

Daraus folgt:

Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige mit Zusatzzahl (für einen Gewinn in Rang II):

$$w = 0{,}000\ 018\ 45\cdot\frac{1}{43} = 0{,}000\ 000\ 43$$

Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige ohne Zusatzzahl (für einen Gewinn in Rang III):

$$w = 0{,}000\ 018\ 45\cdot\frac{42}{43} = 0{,}000\ 018\ 02$$

Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige (für einen Gewinn in Rang IV):

$$w = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{43}{45}\cdot\frac{42}{44} + \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{43}{46}\cdot\frac{3}{45}\cdot\frac{42}{44} + \dots$$
$$\dots + \frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{6}{47}\cdot\frac{5}{46}\cdot\frac{4}{45}\cdot\frac{3}{44}$$
$$= 15\cdot\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{43}{45}\cdot\frac{42}{44} = \frac{15\cdot 43}{7\cdot 47\cdot 46\cdot 44} = 0{,}000\ 968\ 62$$

Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige (für einen Gewinn in Rang V):

$$w = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{43}{46}\cdot\frac{42}{45}\cdot\frac{41}{44} + \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{43}{47}\cdot\frac{4}{46}\cdot\frac{42}{45}\cdot\frac{41}{44} + \dots$$
$$\dots + \frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{41}{47}\cdot\frac{6}{46}\cdot\frac{5}{45}\cdot\frac{4}{44}$$
$$= 20\cdot\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{43}{46}\cdot\frac{42}{45}\cdot\frac{41}{44} = \frac{5\cdot 43\cdot 41}{7\cdot 47\cdot 23\cdot 3\cdot 22} = 0{,}017\ 650\ 40$$

Daraus errechnet man nun leicht die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn:

$$w = 0{,}000\ 000\ 07 + 0{,}000\ 018\ 45 + 0{,}000\ 968\ 62 + 0{,}017\ 650\ 40$$
$$= 0{,}018\ 637\ 54$$

und für einen Verlust:

$$w = 1 - 0{,}018\ 637\ 54 = 0{,}981\ 362\ 46 \ .$$

Welchen Durchschnittswert kann man nach vielen Ziehungen für die Anzahl der Richtigen erwarten ?

Dazu braucht man zunächst die Wahrscheinlichkeiten auch für die "Verlustanzahlen" 2; 1 und 0 .

Wahrscheinlichkeit für 2 Richtige:

$$w = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{43}{47}\cdot\frac{42}{46}\cdot\frac{41}{45}\cdot\frac{40}{44} + \frac{6}{49}\cdot\frac{43}{48}\cdot\frac{5}{47}\cdot\frac{42}{46}\cdot\frac{41}{45}\cdot\frac{40}{44} + \dots$$
$$\dots + \frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{41}{47}\cdot\frac{40}{46}\cdot\frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}$$
$$= 15\cdot\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{43}{47}\cdot\frac{42}{46}\cdot\frac{41}{45}\cdot\frac{40}{44} = \frac{5\cdot 43\cdot 41\cdot 5}{7\cdot 47\cdot 23\cdot 44} = 0{,}132\ 378\ 03$$

Wahrscheinlichkeit für 1 Richtige:

$$w = \frac{6}{49}\cdot\frac{43}{48}\cdot\frac{42}{47}\cdot\frac{41}{46}\cdot\frac{40}{45}\cdot\frac{39}{44} + \frac{43}{49}\cdot\frac{6}{48}\cdot\frac{42}{47}\cdot\frac{41}{46}\cdot\frac{40}{45}\cdot\frac{39}{44} + \dots$$
$$\dots + \frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{41}{47}\cdot\frac{40}{46}\cdot\frac{39}{45}\cdot\frac{6}{44}$$
$$= 6\cdot\frac{6}{49}\cdot\frac{43}{48}\cdot\frac{42}{47}\cdot\frac{41}{46}\cdot\frac{40}{45}\cdot\frac{39}{44} = \frac{43\cdot 3\cdot 41\cdot 13}{7\cdot 47\cdot 23\cdot 44} = 0{,}413\ 019\ 45$$

Wahrscheinlichkeit für 0 Richtige:

$$w = \frac{43}{49}\cdot\frac{42}{48}\cdot\frac{41}{47}\cdot\frac{40}{46}\cdot\frac{39}{45}\cdot\frac{38}{44} = \frac{43\cdot 41\cdot 13\cdot 9}{7\cdot 47\cdot 23\cdot 3\cdot 44} = 0{,}435\ 964\ 98$$

Und nun der Erwartungswert:

$$E = 6\cdot 0{,}000\ 000\ 07 + 5\cdot 0{,}000\ 018\ 45 + 4\cdot 0{,}000\ 968\ 62$$
$$+ 3\cdot 0{,}017\ 650\ 40 + 2\cdot 0{,}132\ 378\ 03 + 1\cdot 0{,}413\ 019\ 45$$
$$+ 0\cdot 0{,}435\ 964\ 98$$
$$= 0{,}734\ 693\ 86$$

Wer häufig spielt, wird also im Mittel pro Tipp 0,73 Richtige haben.

Methodische Hinweise

Als Einstieg kann das Ausfüllen eines Lotto-Scheines und der Vergleich der getippten Reihe mit dem samstäglichen Ziehen der Kugeln dienen. Im Mittelpunkt der mathematischen Analyse steht die Anlage und Auswertung des Baumdiagramms (Fig.65). Dabei empfiehlt es sich, pfadweise vorzugehen (also mit ++++++ beginnend über +++++- bis hin zu ------ zu kommen). Wenn einige Pfade samt Teil- und Gesamtwahrscheinlichkeiten im Plenum erarbeitet worden sind (zweckmäßig unter tatsächlicher

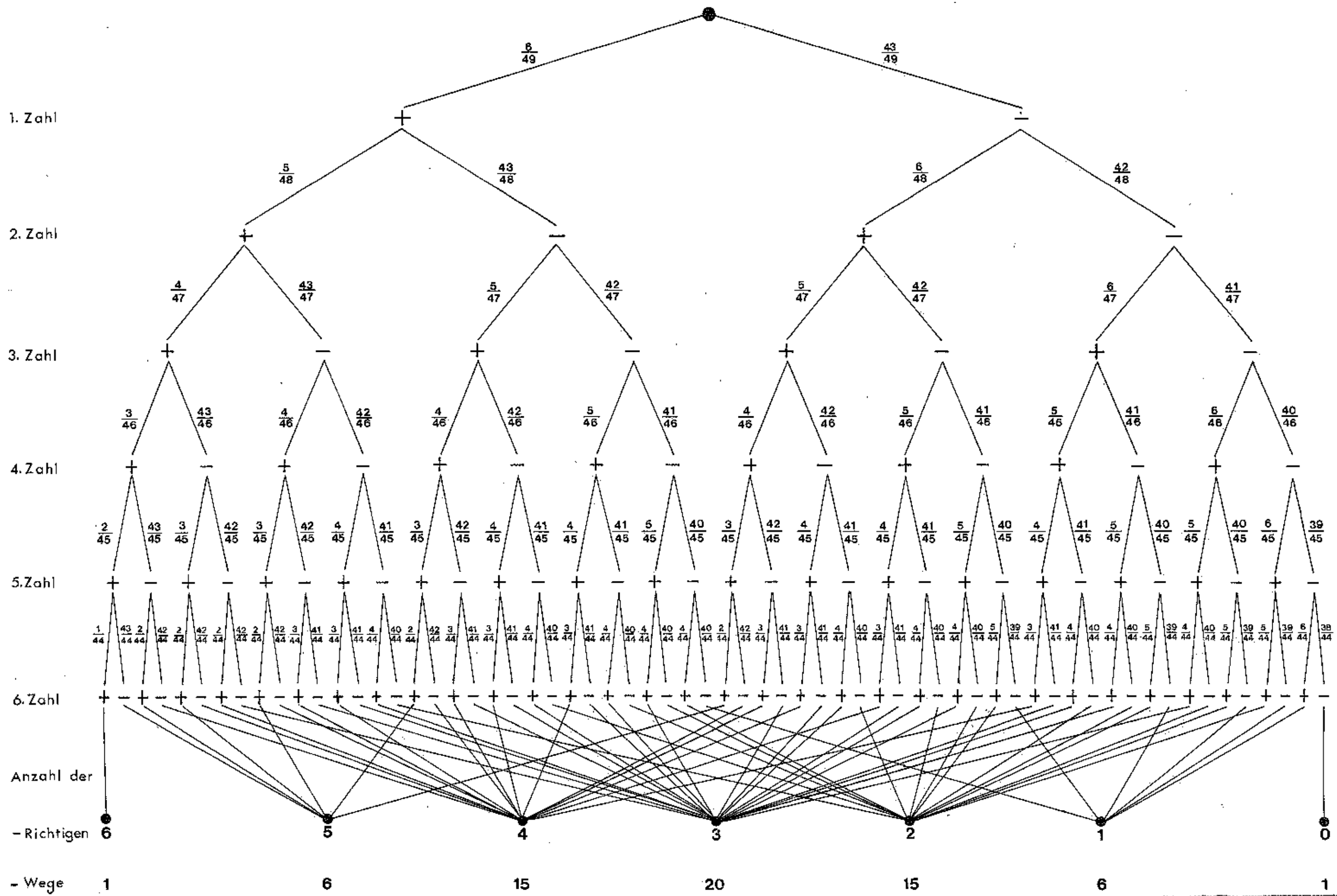

1. Zahl
2. Zahl
3. Zahl
4. Zahl
5. Zahl
6. Zahl
Anzahl der
– Richtigen 6 5 4 3 2 1 0
– Wege 1 6 15 20 15 6 1

Fig. 65

Durchführung der entsprechenden Ziehungen), können die übrigen Pfade in arbeitsteiliger Gruppenarbeit (Aufteilungskriterium: Anzahl der Richtigen) analysiert werden. Die anschließende Zusammenstellung und Auswertung der Ergebnisse sollte dann wieder im Plenum erfolgen. Wir schlagen vor, daß der Lehrer dazu eine große "Wandzeitung" vorbereitet, auf der die Linien des Baumdiagramms bereits enthalten sind.

Selbstverständlich wird man alle Ausrechnungen mit dem Taschenrechner vornehmen. Das oben durchgeführte vorgängige Kürzen ist deshalb nicht unbedingt erforderlich. Jedoch sollte erkannt werden, daß alle Pfade, bei denen die Anzahl der Richtigen übereinstimmt, auch die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, weil dies die Rechnungen erheblich reduziert.

Die errechnete Wahrscheinlichkeitsverteilung und den zugehörigen Erwartungswert wird man mit einigen konkreten Häufigkeitsverteilungen und dem jeweiligen Durchschnittswert vergleichen. Dazu eignet sich einerseits die fiktive Teilnahme aller Schüler der Klasse an der nächsten Ziehung im Deutschen Lotto-Block, andrerseits die tatsächliche Häufigkeitsverteilung bei einer bestimmten, etwa der letzten Ziehung.

Diesbezügliche Informationen geben die regelmäßig erscheinenden Mitteilungsblätter der einzelnen Lotto-Gesellschaften, die man an den Lotto-Annahmestellen erhält. Aus ihnen erfährt man auch nähere Aufschlüsse über Art und Höhe der Gewinnausschüttung, über die Häufigkeit, mit der die Zahlen 1; 2; ...; 49 seit Beginn des Lotto-Spiels (1955) erschienen sind, über angebotene Spielsysteme, über das neue Lotto "7 aus 38" usw., woraus sich zahlreiche Möglichkeiten zur Erweiterung und Vertiefung des Themas ergeben.

Der Lehrer sollte deutlich machen, daß eine Entscheidung darüber, ob man Lotto spielen sollte oder nicht, keineswegs direkt aus den errechneten Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden kann. Klar ist: Wer mitspielt, hat nur eine sehr geringe Gewinnchance; in einem höheren Rang zu gewinnen, ist unwahrscheinlich. Aber: Man verhilft mit seinem (vernünftigerweise kleinen) Beitrag einigen wenigen Mitspielern zu einem ansehnlichen Gewinn; und es ist immerhin nicht unmöglich, daß man selbst zu diesen Glücklichen gehören wird. Außerdem ist gesetzlich vorgeschrieben, daß die Hälfte aller Einsätze anderen, sozialen Zwecken (z.B. der Sportförderung) zugeführt wird.

Lohnend ist schließlich auch das Nennen und Aufdecken zahlreicher irrationaler Verhaltensweisen vieler Lotto-Spieler. Dafür einige Beispiele:

- Man hält eine Reihe wie 1; 2; 3; 4; 5; 6 für unwahrscheinlicher als eine Reihe wie 5; 12; 14; 27; 39; 44 .
- Man kreuzt diejenigen Zahlen an, die am längsten ausstehen.
- Man kreuzt Zahlen an, die zu persönlichen Daten gehören.
- Man glaubt, daß man "fast" gewonnen hat, wenn statt der eigenen benachbarte Zahlen kommen.

5.5.3 Toto (Elferwette)

Von der Totogesellschaft werden 11 Fußballspiele des nächsten Spieltages ausgesucht, deren Ausgang zu erraten ist. Man tippt eine

- 0, falls man ein Unentschieden
- 1, falls man einen Sieg der gastgebenden Mannschaft
- 2, falls man einen Sieg der Gastmannschaft

erwartet. Ein Tipp besteht somit aus einer Reihe von 11 Zahlen 0; 1 oder 2. Für einen Gewinn muß man

- in Rang I alle 11 Spielausgänge richtig vorhersagen
- in Rang II 10 der 11 Spielausgänge vorhersagen
- in Rang III 9 der 11 Spielausgänge vorhersagen.

Umsatzerhebung und Gewinnausschüttung erfolgen wie beim Lotto, nur daß hier das ausgeschüttete Geld gleichmäßig auf die drei Ränge verteilt wird.

Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit in den einzelnen Rängen ? Denkt man – in Analogie zum Lotto – an einen Mitspieler, der seine Tippreihe Zahl für Zahl mit der richtigen Tippreihe vergleicht, so bietet sich wiederum ein Baumdiagramm an:

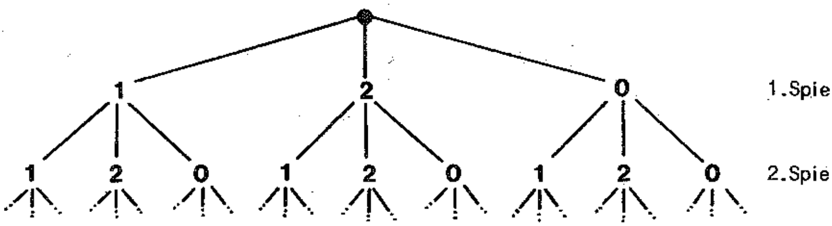


Fig.66

Jedoch kennt man hier die Teilwahrscheinlichkeiten (d.h. die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Spielausgänge) nicht. Keineswegs haben die möglichen Ergebnisse 1; 2; 0 stets die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. So kommt die 1 weit häufiger vor als 2 oder 0 (Heimvorteil), gibt es stärkere und schwächere Mannschaften, steigende und fallende Tendenz bei den einzelnen Mannschaften, Verletzungspech usw. Und: Es gibt überraschende Spielausgänge, die gerade den Reiz des Sportes ausmachen.

Deshalb hilft i.a. weder das bloße Drauflostippen noch der Favoritentipp. Glück und Sachverstand müssen zusammenwirken, um einen Gewinn zu ermöglichen. Die diesbezüglichen Chancen kann man – im Unterschied zum Lotto – nicht exakt berechnen.

Anzahl der möglichen Tippreihen: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 177\,147$.

Denn an jeder Stelle der Elferreihe können 3 verschiedene Zahlen stehen. (Oder: Das Baumdiagramm zeigt an, daß durch jedes Spiel die Anzahl der Möglichkeiten verdreifacht wird.)

Anzahl der Tippreihen, die zu Rang I führen: 1 .
Denn an jeder Stelle kann nur eine, die richtige Zahl stehen.

Anzahl der Tippreihen, die zu Rang II führen: $11 \cdot 2 = 22$.
Denn der eine falsche Einzeltipp kann an jeder der 11 Stellen stehen; und es gibt dazu jeweils 2 falsche Zahlen.

Anzahl der Tippreihen, die zu Rang III führen: $\frac{11 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2}{2} = 220$.
Denn es gibt 11 mögliche Stellen für den ersten falschen Tipp und dazu jeweils 2 falsche Zahlen sowie 10 mögliche Stellen für den zweiten falschen Tipp und dazu jeweils 2 falsche Zahlen. Bei diesem Vorgehen hat man jedoch jede günstige Tippreihe zweimal gezählt, weil man fälschlicherweise zwischen erstem und zweitem falschen Einzeltipp unterschied.

Beispiel:
Die Tippreihe 1 2 $\underline{0}$ 0 1 1 1 $\underline{1}$ 0 1 1 (falsche Zahlen unterstrichen)
ist sowohl bei 1. falsche Zahl an 3.Stelle
2. falsche Zahl an 8.Stelle
als auch bei 1. falsche Zahl an 8.Stelle
2. falsche Zahl an 3.Stelle
gezählt worden.

Wer nun die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ränge zu
$\frac{1}{177\,147}$, $\frac{22}{177\,147}$, $\frac{220}{177\,147}$
bestimmt, übersieht, daß bei dieser "klassischen" Berechnung der Wahrscheinlichkeit als $\frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$ die Gleichwahrscheinlichkeit aller Ergebnisse (hier: Tippreihen) vorausgesetzt werden muß, was indessen in unserem Falle nicht zutrifft.

Immerhin kann man schätzen, daß ein Gewinn in Rang II etwa 20-mal so wahrscheinlich ist wie ein Gewinn in Rang I und ein Gewinn in Rang III wiederum etwa 10-mal so wahrscheinlich wie ein Gewinn in Rang II. Für die Gewinnhöhe in den einzelnen Rängen gilt dann natürlich das umgekehrte Verhältnis.

Zum Vergleich:

Gewinne am 15./16. August 1981

- Rang I : 49mal 10 825,50 DM
- Rang II : 903mal 587,40 DM
- Rang III: 9 087mal 58,30 DM

Gewinne am 22./23. August 1981

- Rang I : 407mal 1 229,90 DM
- Rang II : 7 279mal 68,70 DM
- Rang III : 55 289mal 9,00 DM

Methodische Hinweise

Auch hier sollte man – analog zur Beschäftigung mit dem Lotto-Spiel – mit dem Ausfüllen eines offiziellen und aktuellen Toto-Scheines und mit dem Vergleich der dortigen mit der richtigen Tippreihe einsteigen. Dann erweist sich das Toto-Spiel als 11-stufiges Zufallsexperiment – mit (im Unterschied zum Lotto) voneinander unabhängigen Stufen: kein Spiel beeinflußt ein anderes.

Zwar macht die Anlage des Baumdiagramms höchstens zeichentechnische Mühe, doch erweist sich das Eintragen der Teilwahrscheinlichkeiten als unerwartet schwierig. Denn schon beim Beurteilen der einzelnen Spiele anläßlich des Ausfüllens wird deutlich, daß sich der naheliegende Wert $\frac{1}{3}$ zumeist verbietet. Andere Teilwahrscheinlichkeiten sind nichts als höchst subjektive und unzuverlässige Schätzwerte. Wer sich auf sie verläßt und jeweils das Ergebnis größter Wahrscheinlichkeit tippt, kann keineswegs sicher sein, zu gewinnen.

Völlig irrelevant sind Rechnungen wie $w = (\frac{1}{3})^{11} = \frac{1}{177\,147} = 0{,}000\,005\,65$ für den Gewinn in Rang I, wie sie die Schüler vom Lotto her vielleicht anstellen. In einem solchen Falle sollte der Lehrer auf die Fadenscheinigkeit dieser Analogie hinweisen; am besten durch Angabe eines für solche Rechnungen tatsächlich geeigneten Zufallsexperiments: 11-maliges Ziehen einer Kugel (mit Zurücklegen) aus einer Urne mit den drei Kugeln 1; 2 und 0 . Der Unterschied zum Toto ist dann besonders deutlich.

In ihm sind die Gewinnchancen erheblich höher, weil der Sachverstand doch einen gewissen Einfluß hat. Dies kann der Schüler beim Vergleich der – fälschlicherweise errechneten – Wahrscheinlichkeiten mit den an einem bestimmten Spieltag tatsächlich aufgetretenen relativen Häufigkeiten leicht erkennen.

Beispiele:

15./16.August 1981: 49 von 1 591 375 getippten Reihen haben 11 Richtige.

$$\frac{49}{1\,591\,375} = 0{,}000\,030\,79$$

22./23.August 1981: 407 von 1 501 799 getippten Reihen haben 11 Richtige.

$$\frac{407}{1\,501\,799} = 0{,}000\,271\,01$$

So muß man sich denn mit dem kombinatorischen Zählen der für jeden Rang günstigen Tippreihen begnügen. Insbesondere wird dabei das Verhältnis der Gewinnchancen und Gewinnhöhen in den einzelnen Rängen deutlich.

Bei diesen Zählprozeduren geht man selbstverständlich wiederum vom Baumdiagramm aus, wobei es jedoch der Klasse überlassen bleiben sollte, ob man es wirklich komplettiert.

Schwierigkeiten macht in jedem Falle der Rang III. Wir empfehlen hier ein systematisches Ankreuzen der beiden möglichen "Fehlerstellen":

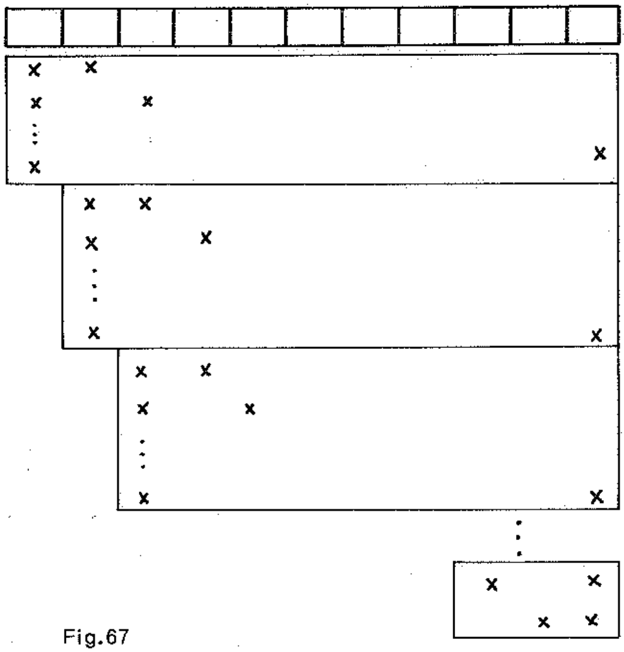


Fig.67

10 + 9 + 8 + ... + 2 + 1 = 55

Jede dieser 55 Möglichkeiten führt zu 4 günstigen Tippreihen, weil für jedes der beiden Kreuze zwei (falsche) Zahlen eingesetzt werden können: $55 \cdot 4 = 220$.

Wichtig ist die Einsicht, daß das Lotto-Spiel als "reines" Zufallsexperiment besser durchkalkuliert werden kann als das Toto-Spiel, in dem auch der Sachverstand eine Rolle spielt. Sie wird erzeugt durch ständigen Vergleich der beiden Spiele, durch Betonen der Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Nützlich ist eventuell auch das analoge Vergleichen der vom Fernsehen her bekannten Spiele "Pferdelotto" und "Pferdetoto" .

Wir empfehlen eine offene Abschlußdiskussion um die Frage: "Würdest du lieber Lotto oder lieber Toto spielen ? Oder keines von beiden ?" .

5.5.4 Roulette

Auf eine sich drehende Scheibe mit den 37 Zahlen 0; 1; 2; ...; 36 (s. Fig.68) wird eine Kugel geworfen, die bei nachlassender Rotationsgeschwindigkeit unter einer der Zahlen zu liegen kommt und diese damit als Ergebnis anzeigt. Wer einen Geldbetrag auf diese Zahl gesetzt hat, gewinnt. Er erhält das 36-fache seines Einsatzes ausbezahlt. Wessen Zahl nicht kommt, verliert seinen Einsatz.

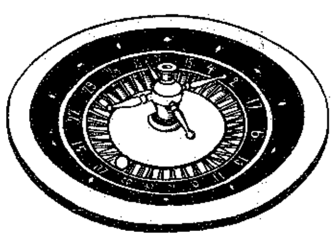


Fig.68

Um herauszufinden, ob das Spiel für einen Teilnehmer günstig ist, bestimmen wir den Erwartungswert für den ausbezahlten Betrag und vergleichen ihn mit dem Einsatz. Dabei gehen wir zweckmäßig von dem Einsatz 1 DM aus.

Dann gilt folgende Verteilung:

Auszahlung	0 DM	36 DM
Wahrscheinlichkeit	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

Denn die Zahl, auf die man gesetzt hat, ist nur eine unter 37 gleichwahrscheinlichen Zahlen. Daß sie kommt, hat demnach die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$. Daß sie nicht kommt, ist weitaus wahrscheinlicher ($\frac{36}{37}$).

Erwarteter Durchschnittswert: $0\text{ DM} \cdot \frac{36}{37} + 36\text{ DM} \cdot \frac{1}{37} = \frac{36}{37}\text{ DM}$

Bei längerem Spielen erhält man also im Durchschnitt pro Spiel $\frac{36}{37}$ DM ausbezahlt.

Da man jeweils aber 1 DM gesetzt hat, verliert man pro Spiel $\frac{1}{37}$ DM. Das Spiel ist ungünstig.

Nun muß man nicht unbedingt auf eine Zahl setzen. Man kann z.B. auch auf die Farbe des Feldes setzen, in dem die angezeigte Zahl steht, also auf rot (rouge) oder schwarz (noir) (grün = 0). Kommt die Farbe, auf die man gesetzt hat, so erhält man den doppelten Einsatz, im anderen Falle nichts ausbezahlt.

Dies führt zu folgender Verteilung (wiederum bezogen auf 1 DM):

Auszahlung	0 DM	2 DM
Wahrscheinlichkeit	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

und zum Erwartungswert $0\text{ DM} \cdot \frac{19}{37} + 2\text{ DM} \cdot \frac{18}{37} = \frac{36}{37}\text{ DM}$.

Denn 18 der 37 Felder tragen die gesetzte Farbe, 19 die andere.

Insgesamt kommt man zur gleichen Beurteilung wie beim Setzen auf eine Zahl.

Setzt man auf bestimmte Eigenschaften der kommenden Zahl (gerade (pair) oder ungerade (impair), kleiner als 19 (manque) oder größer als 18 (passe)), so ergibt sich dieselbe Verteilung wie beim Setzen auf eine Farbe. Denn die Gewinnregel ist dieselbe und die Wahrscheinlichkeiten sind dieselben; 0 wird nämlich hier weder als gerade noch als Zahl unter 19 angesehen. (Generelle Festsetzung: Kommt 0, so gewinnt nur der, der auf 0 gesetzt hat.)

Auch alle anderen Gewinnregeln sind stets so konstruiert, daß sich der Erwartungswert $\frac{36}{37}$ DM ergibt.

Dafür ein letztes Beispiel:

Setzt man darauf, daß die kommende Zahl 10; 11 oder 12 sein wird, so erhält man im positiven Falle das 12-fache des Einsatzes, sonst nichts ausbezahlt. Daraus ergibt sich die Verteilung (bezogen auf 1 DM Einsatz):

Auszahlung	0 DM	12 DM
Wahrscheinlichkeit	$\frac{34}{37}$	$\frac{3}{37}$

und der Erwartungswert $0\text{ DM} \cdot \frac{34}{37} + 12\text{ DM} \cdot \frac{3}{37} = \frac{36}{37}\text{ DM}$.

Wie immer auch gespielt wird: Auf lange Sicht hin verliert der Spieler pro Spiel und DM $\frac{1}{37}$ DM, gewinnt sein Gegner (unmittelbar: die Spielbank, mittelbar (bei öffentlichen Banken): das Land, dem die Bank gehört) pro Spiel und umgesetzter DM $\frac{1}{37}$ DM .

Das gilt im Prinzip selbst dann, wenn ein Spieler die "Petersburger Strategie" anwendet: Auf ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$ setzen, diesen Einsatz a bis zum ersten Gewinn fortgesetzt verdoppeln und dann aufhören.

In diesem Falle berechnet man für die Summe s aller Einsätze (bei n Spielen):

$$s = a + 2a + 4a + \ldots + 2^{n-1}\cdot a$$
$$2s = \phantom{a +{}} 2a + 4a + \ldots + 2^{n-1}\cdot a + 2^{n}\cdot a \quad \text{und also}$$
$$s = 2s - s = 2^{n}\cdot a - a \;.$$

Sie ist demnach um a kleiner als der beim Gewinn im n-ten Spiel ausbezahlte Betrag $2^n \cdot a$. Mit anderen Worten: Mit der Petersburger Strategie gewinnt man gerade den ersten Einsatz.

Aber: Um diese Gewinnstrategie zu verhindern, schreiben die Spielbanken einen Höchsteinsatz vor, der bei ungünstigem Spieleverlauf zum Aufhören und zum Verlust aller bisherigen Einsätze führen kann. Dadurch wird der Erwartungswert für den Gesamtgewinn negativ.

Dazu ein einfaches Beispiel:

Höchsteinsatz: 10 DM Erster Einsatz: 1 DM gesetzt auf: gerade (g)

Spieleverlauf	Wahrscheinlichkeit	letzter Einsatz	Gesamtgewinn
g	$\frac{18}{37}$	1 DM	1 DM
$\not{g}\ g$	$\frac{19}{37}\cdot\frac{18}{37}$	2 DM	1 DM
$\not{g}\ \not{g}\ g$	$(\frac{19}{37})^2\cdot\frac{18}{37}$	4 DM	1 DM
$\not{g}\ \not{g}\ \not{g}\ g$	$(\frac{19}{37})^3\cdot\frac{18}{37}$	8 DM	1 DM
$\not{g}\ \not{g}\ \not{g}\ \not{g}$	$(\frac{19}{37})^4$	8 DM	-15 DM

$$E = \frac{18}{37}\cdot 1\text{ DM} + \frac{19}{37}\cdot\frac{18}{37}\cdot 1\text{ DM} + \left(\frac{19}{37}\right)^2\cdot\frac{18}{37}\cdot 1\text{ DM} + \left(\frac{19}{37}\right)^3\cdot\frac{18}{37}\cdot 1\text{ DM}$$
$$- \left(\frac{19}{37}\right)^4\cdot 15\text{ DM}$$
$$= \frac{18}{37}\cdot\frac{1-\left(\frac{19}{37}\right)^4}{1-\frac{19}{37}}\text{ DM} - \left(\frac{19}{37}\right)^4\cdot 15\text{ DM} = \left(1-\left(\frac{19}{37}\right)^4\right)\text{ DM} - \left(\frac{19}{37}\right)^4\cdot 15\text{ DM}$$
$$= 1\text{ DM} - \left(\frac{19}{37}\right)^4\cdot 16\text{ DM} = -0{,}11\text{ DM}$$

Methodische Hinweise

Heimroulettes in Kleinformat sind heute nicht mehr selten. Dies macht es möglich, mit einer Spielstunde einzusteigen, in der die Regeln des Setzens und Auszahlens wiederholt bzw. gelernt werden können. Versierte Schüler mögen dabei als Croupiers fungieren.

Schon während des Spiels können erfahrungsgemäß zahlreiche Fehlvorstellungen aufgedeckt und widerlegt werden. (Es wäre ein großer Irrtum, anzunehmen, durch den vorangegangenen Stochastik-Lehrgang seien solche falschen Primärintuitionen bereits gänzlich ausgeräumt.) Sie beruhen zumeist auf irrtümlich angenommenen Abhängigkeiten (verschiedenster Art) zwischen aufeinanderfolgenden Ergebnissen (nach dreimal "rot" muß doch endlich "schwarz" kommen, nach "0" nicht schon wieder "0" usw.).

In einer zweiten Phase sollten dann die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse und Ergebniskombinationen bestimmt werden. Auf die bisher konsequent vermiedene Trennung zwischen Ergebnissen und Ereignissen (= Ergebnismengen) kann man auch hier verzichten, wenn man stets die beim Roulette üblichen Bezeichnungen verwendet. Dagegen sollte die Berechnungsstrategie

$$\frac{\text{Anzahl der günstigen Zahlen}}{37}$$

samt ihrer Voraussetzung (Gleichwahrscheinlichkeit aller Zahlen) bewußt gemacht werden.

Die dritte Phase wird eingeleitet mit der naheliegenden Frage, ob das Roulette-Spiel für den Setzenden günstig oder ungünstig ist. Sie wird zunächst für das Setzen auf eine Zahl und dann für das Setzen auf andere Merkmale beantwortet.

Das erhaltene Resultat muß ausführlich kommentiert und diskutiert werden. Ein Beispiel: Wenn an einem Abend 100 Spieler in 200 Spielen je 200 DM setzen, kann die Bank damit rechnen, daß sie an diesem Abend etwa 100 000 DM einnimmt.

Auf die Petersburger Strategie sollte man nur eingehen, wenn sie von den Schülern in die Diskussion eingebracht wird. Es genügt, sie für den Ersteinsatz 1 DM durchzuspielen. Daß sie bei beschränkter Spielezahl versagt, leuchtet auch ohne Rechnung ein.

5.5.5 Spielautomat

Ein bestimmter Spielautomat funktioniert folgendermaßen: Wirft man 30 Pf ein, so beginnen drei Räder sich zu drehen, unabhängig voneinander und zufällig lange. Zu jedem Rad gehört ein Schaufenster, in dem schließlich eines seiner 10 gleichgroßen und daher auch gleichwahrscheinlichen Felder zu sehen ist.

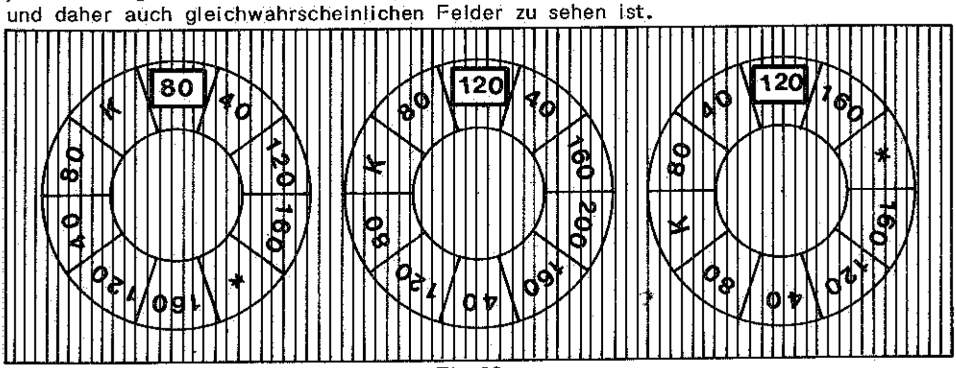


Fig.69

Ob man einen Betrag ausbezahlt erhält, hängt ab von der insgesamt angezeigten Dreierkombination ☐☐☐ .

Auszahlungsplan (worin a,b irgendwelche Felder, x irgendeine Zahl, K Krone und * Stern bezeichnen):

Anzeige	Auszahlung	Beispiele
KKK	1 000 Pf	–
K	500 Pf	–
xKx	2x Pf	80 K 80 160 Pf
xxx	3x Pf	120 120 120 360 Pf
aKb (mit a≠b)	50 Pf	160 K 40 50 Pf * K 80 50 Pf K K * 50 Pf

Welche durchschnittliche Auszahlung kann man nach vielen Spielen erwarten ? Ist das Spiel günstig, fair oder ungünstig für den, der 30 Pf als Spielgebühr einwirft ?

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Anzeigen und fügen in Klammer jeweils die Höhe der Auszahlung bei.

KKK $\quad w = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1\,000}$ (1 000 Pf)

K $\quad w = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1\,000}$ (500 Pf)

xKx Hier unterscheiden wir vier Fälle.

40 K 40 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{1\,000}$ (80 Pf)

80 K 80 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{1\,000}$ (160 Pf)

120 K 120 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{1\,000}$ (240 Pf)

160 K 160 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{1\,000}$ (320 Pf)

Insgesamt: $\quad w\,(xKx) = \frac{16}{1\,000}$

xxx Auch hier ist eine Fallunterscheidung erforderlich.

40 40 40 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{1\,000}$ (120 Pf)

80 80 80 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{1\,000}$ (240 Pf)

120 120 120 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{1\,000}$ (360 Pf)

160 160 160 $\quad w = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{1\,000}$ (480 Pf)

Insgesamt: $\quad w\,(xxx) = \frac{32}{1\,000}$

aKb (mit a $\neq$ b); $\quad w\,(aKb \text{ mit } a \neq b) = w\,(aKb) - w\,(KKK) - w\,(*K*) - w(xKx)$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{1\,000} - \frac{1}{1\,000} - \frac{16}{1\,000}$$

$$= \frac{82}{1\,000} \qquad (\ 50 \text{ Pf})$$

Für die Auszahlung ergibt sich demnach folgende Verteilung:

Pfennig	1 000	500	480	360	320	240	160	120	80	50	0
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{8}{1\,000}$	$\frac{8}{1\,000}$	$\frac{4}{1\,000}$	$\frac{12}{1\,000}$	$\frac{4}{1\,000}$	$\frac{8}{1\,000}$	$\frac{4}{1\,000}$	$\frac{82}{1\,000}$	$\frac{868}{1\,000}$

Sie hat den Erwartungswert

$$E = 1\,000 \cdot \frac{1}{1\,000} + 500 \cdot \frac{1}{1\,000} + 480 \cdot \frac{8}{1\,000} + 360 \cdot \frac{8}{1\,000} + 320 \cdot \frac{4}{1\,000}$$
$$+ 240 \cdot \frac{12}{1\,000} + 160 \cdot \frac{4}{1\,000} + 120 \cdot \frac{8}{1\,000} + 80 \cdot \frac{4}{1\,000} + 50 \cdot \frac{82}{1\,000} + 0 \cdot \frac{868}{1\,000}$$
$$= 18{,}40$$

Das bedeutet: Für ein Spiel, das 30 Pf kostet, kann man im langfristigen Durchschnitt 18,40 Pf Auszahlung erwarten. Das Spiel ist ungünstig.

Methodische Hinweise

Wir haben einen Spielautomaten mittlerer Komplexität ausgewählt, der einerseits noch der Analyse im Unterricht zugänglich ist, andrerseits aber doch schon den öffentlich angebrachten Automaten nahe kommt.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten an einem Rad ergeben sich naiverweise, d.h. über die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit, hier

$$\frac{\text{Anzahl der günstigen Felder}}{\text{Anzahl aller Felder}} \quad ,$$

die Wahrscheinlichkeiten für die Dreierkombinationen in gewohnter Weise über Baumdiagramme.

Beispiele:

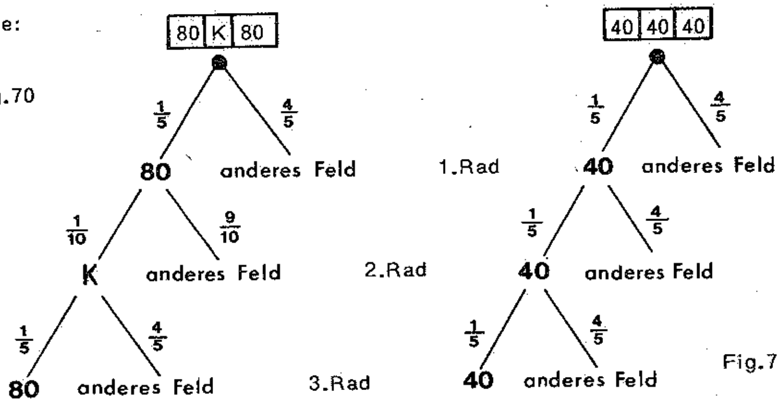


Fig.70

Fig.71

Gewisse Schwierigkeiten macht der Fall aKb (a $\neq$ b). Hier muß die naheliegende, wegen der schon erfaßten Möglichkeiten KKK, *K* und xKx aber falsche Antwort $\frac{1}{10}$ diskriminiert werden.

Der Lehrer sollte darüber informieren, daß ein Spielautomat nur dann öffentlich aufgehängt werden darf, wenn der Erwartungswert mindestens 60% der Spielkosten beträgt. Dies trifft für unseren Beispielautomaten zu: $1840 : 3000 = 61\frac{1}{3}\%$.

Der Lehrer mag entscheiden, ob er die Situation noch realistischer, aber auch komplexer gestaltet durch Einbeziehen folgender Möglichkeiten:

a) Beeinflussen des Radlaufs durch Stoppen oder nochmaliges Starten
b) Gewähren von Freispielen

Zu a):
Das Stoppen eines laufenden Rades bringt keinen Vorteil, wenn man es nicht wieder starten kann (was fast immer der Fall ist); denn an der Gleichwahrscheinlichkeit der Felder ändert sich dadurch nichts. Das erneute Starten eines Rades (meist auf ein bestimmtes, zuerst stillstehendes Rad beschränkt) verbessert hingegen die Situation des Spielers, falls er eine vernünftige Entscheidungsregel hat.

Beispiel für eine solche Regel (bezogen auf das linke Rad): Erneut starten, falls nicht 160 kommt.
Dann nämlich gilt für das linke Rad $w(160) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{9}{25}$ (s. Fig.72)

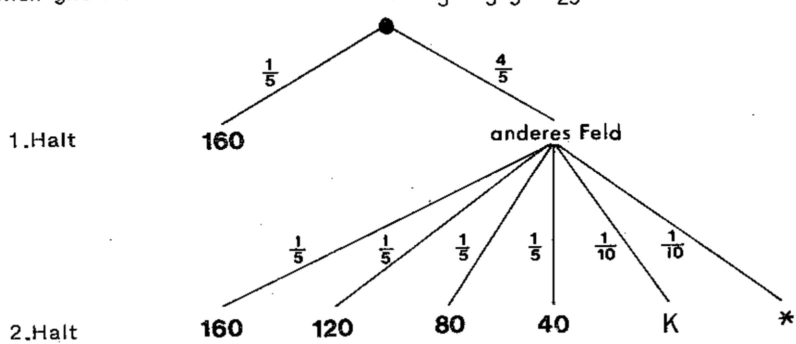


Fig.72

und weiter $w(120) = w(80) = w(40) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{25}$

sowie $w(K) = w(*) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10} = \frac{2}{25}$.

Damit ergibt sich

$$E = 1\,000\cdot\frac{8}{10\,000} + 500\cdot\frac{8}{10\,000} + 480\cdot\frac{144}{10\,000} + 360\cdot\frac{64}{10\,000} + 320\cdot\frac{72}{10\,000}$$
$$+ 240\cdot\frac{96}{10\,000} + 160\cdot\frac{32}{10\,000} + 120\cdot\frac{64}{10\,000} + 80\cdot\frac{32}{10\,000} + 50\cdot\frac{816}{10\,000}$$
$$= 20{,}64 \quad .$$

Zu b):

Auch Freispiele erhöhen den Erwartungswert, und zwar je nach ihrer Anzahl und nach der Wahrscheinlichkeit der sie auslösenden Kombination.

Beispiel: *a* (mit $a \neq K$) bringt 5 Freispiele.

Diese Kombination hat die Wahrscheinlichkeit $w = \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10} = 0{,}009$.

Bedenkt man weiter, daß 5 Spiele insgesamt den Erwartungswert $5\cdot 18{,}4$ haben, so ergibt sich die Verteilung

Pfennig	18,4	5·18,4
Wahrscheinlichkeit	0,991	0,009

mit dem Erwartungswert $E = 19{,}06$.–

Im Anschluß an die Beschäftigung mit dem vorgegebenen Automaten sollte man den Schülern Gelegenheit geben, selbst solche Automaten (womöglich mit großer Scheinattraktivität) zu entwerfen, zunächst vielleicht durch einfache Variationen des gerade untersuchten Auszahlungsplanes. Die naheliegende Analyse öffentlich angebrachter Automaten verbietet sich auf Grund des Jugendschutzgesetzes, aber auch wegen der (von den Herstellern bewußt geplanten) Komplexität dieser Automaten, verbunden mit unzureichender und schwer verständlicher Information.