

GRUNDEIGENSCHAFTEN

Definitionsbereich

Stetigkeit

Polstellen

Asymptoten

Schaubilder

Teil 2

Datei Nr. 43012

Stand: Januar 2007

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

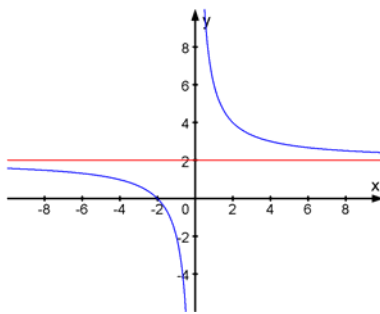
INHALTSVERZEICHNIS für 43011 und 43012

§ 1	Gleichungen gebrochen rationaler Funktionen	1
	Normalform; Grad von Zähler und Nenner, Asymptotengrad	1
	Grundaufgabe: Umformung von Funktionstermen	2
	Verwendung von Polynomdivision	3
§ 2	Stetigkeit gebrochen rationaler Funktionen	5
	Beispiel 1: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ Polstelle ohne Zeichenwechsel	5
	Vorzeichentabelle; Verwendung von Zahlenfolgen bei Polstellen	6
	Beispiel 2: $f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$ Polstelle ohne Zeichenwechsel	7
	Beispiel 3: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ Schaubild mit Loch	10
	Beispiel 4: $f(x) = \frac{x^2-4}{(x+2)^2}$ hat doch einen Pol mit Zeichenwechsel	11
	Übersicht über Nullstellen von Zähler und Nenner	11
§ 3	Asymptoten	12
§ 4	Funktionen mit Asymptotengrad < 0	13
	Berechnung der Grenzwerte für $ x \rightarrow \infty$	14
	Analyse der 6 Musterbeispiele B1 bis B6:	15
	$f(x) = \frac{4}{x-2}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ und $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$	15
	$f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$, $f(x) = 8\frac{x+2}{x^2}$ und $f(x) = \frac{15x}{(x+3)^2}$	16
§ 5	Funktionen mit Asymptotengrad 0	17
	Berechnung der Grenzwerte für $ x \rightarrow \infty$	18
	Analyse der 6 Musterbeispiele B7 bis B11:	19
	$f(x) = \frac{2x+4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ und $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$	19
	$f(x) = \frac{2x^2+6x}{x^2-4}$, $f(x) = \frac{3x^2-27}{x^2} = 3 - \frac{27}{x^2}$ und $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$	20

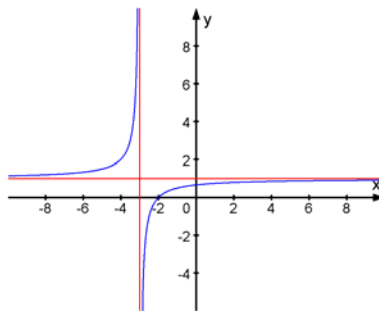
§ 6	Funktionen mit Asymptotengrad 1	21
	Grenzwerte für $ x \rightarrow \infty$ und Analyse von 5 Beispielen	22
	$f(x) = \frac{x^2 + 16}{x} = x + \frac{16}{x}$ und $f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x}$	22
	$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2} = x - 1 + \frac{4}{x^2}$	23
	$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$ und $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$	24
§ 7	Funktionen mit Asymptotengrad 2	25
	Grenzwerte für $ x \rightarrow \infty$ und Analyse von 3 Beispielen	26
	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 2}{2x^2}$,	26
	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$	26
§ 8	Näherungskurven für $x \rightarrow 0$	27
	Hinweise zum Verfahren der Ordinatenaddition	27
	$f(x) = x + \frac{16}{x}$	27
	$f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x}$	28
	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$ und $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 2}{2x^2}$	29
	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$	30
§ 9	Gebrochen rationale Funktionen ohne Polstellen	31
§ 10	Zusammenfassung: Asymptoten	32
§ 11	Symmetrieuntersuchungen der genannten Beispiele.	33
	Symmetrie zur y-Achse - Punktsymmetrie zum Ursprung	33
	Symmetrie zu $x = a$ - Punktsymmetrie zu $Z(a b)$	34
§ 12	Lösungen der Aufgaben aus dem Manuskript	36

§ 5 Funktionen mit Asymptotengrad 0.

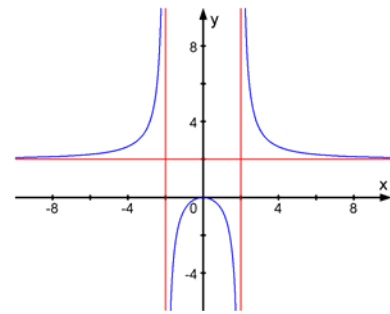
Jetzt geht es um gebrochen rationale Funktionen, deren Zählergrad gleich Nennergrad ist. Hier 6 Beispiele mit den Graden 1 und 2:



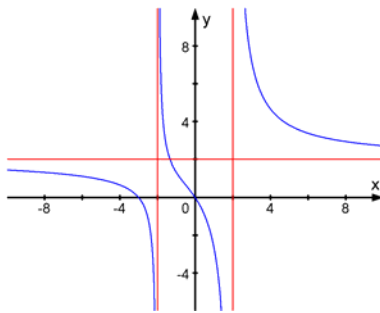
$$B7: f(x) = \frac{2x+4}{x} = 2 + \frac{4}{x}$$



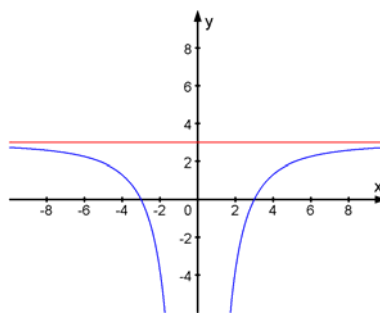
$$B8: f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$



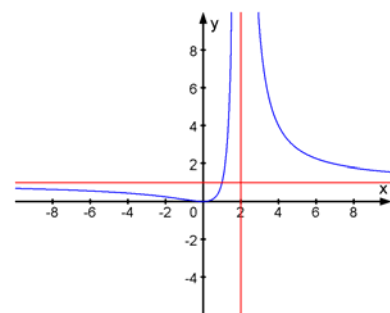
$$B9: f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$$



$$B10: f(x) = \frac{2x^2+6x}{x^2-4}$$



$$B11: f(x) = \frac{3x^2-27}{x^2} = 3 - \frac{27}{x^2}$$



$$B12: f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Zunächst sehen wir, daß alle 6 Schaubilder eine oder zwei **senkrechte Asymptoten mit und ohne Zeichenwechsel** besitzen. Dies erkennt der geübte Mathematiker mit einem Blick. Aber jetzt tauchen waagrechte Asymptoten auf, die nicht mehr die x-Achse sind. Die Funktionen haben für $|x| \rightarrow \infty$ also nicht mehr den Grenzwert 0 sondern eine andere Zahl.

Die **Berechnung dieser Grenzwerte** erfolgt nach demselben Prinzip wie zuvor bei den Funktionsbeispielen B1 bis B6.

Wenn der Nenner eine Summe enthält, gehen wir so vor:

Weil die Zähler und Nenner gegen Unendlich gehen,
kürzen wir durch die höchste x-Potenz des Nenners.

Dann entstehen Bruchterme, deren Zähler und Nenner eigene Grenzwerte besitzen, so daß daraus der Funktionsgrenzwert ermittelt werden kann.

Enthält der Nenner keine Summe, zerlegen wir in Einzelbrüche.

Dies wird auf der nächsten Seite ausführlich vorgerechnet.

Berechnung der Funktionsgrenzwerte für $|x| \rightarrow \infty$

$$\text{B7: } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{4}{x} \right) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} 2 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 2 + 0 = 2$$

Die Gerade (mit der Gleichung) $y = 2$ ist somit waagrechte Asymptote des Schaubilds K von f.

$$\text{B8: } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+3} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{1 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2}{x}}{1 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{3}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Hier wurde der Bruch durch x^2 gekürzt !

Die Gerade $y = 1$ ist somit waagrechte Asymptote des Schaubilds K von f.

$$\text{B9: } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{|x| \rightarrow \infty} 2}{\lim_{|x| \rightarrow \infty} 1 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

Hier wurde der Bruch durch x^2 gekürzt !

Die Gerade $y = 2$ ist waagrechte Asymptote des Schaubilds K von f.

$$\text{B10: } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x^2+6x}{x^2-4} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{6}{x}}{1 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

Hier wurde der Bruch durch x^2 gekürzt !

Die Gerade $y = 2$ ist waagrechte Asymptote des Schaubilds K von f.

$$\text{B11: } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{3x^2-27}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{27}{x^2} \right) = 3 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{27}{x^2} = 3 - 0 = 3$$

Da der Bruch im Nenner keine Summe enthält, wurde er in zwei Einzelbrüche zerlegt. Kürzen ist hier nicht notwendig.

Die Gerade $y = 3$ ist waagrechte Asymptote des Schaubilds K von f.

$$\text{B12: } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-4x+4} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x} + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1-0+0} = 1$$

Hier muss zuerst der Nenner mit der binomischen Formel ausmultipliziert werden. Das ist die einzige Stelle, wo dies notwendig wird. Sonst lässt man die Form $(x-2)^2$ immer unverändert! Dann wurde durch x^2 gekürzt.

$y = 1$ ist also waagrechte Asymptote des Schaubilds von f.

Hier wurde der Kürze halber lässig formuliert:

Die Aussage "die Asymptote $y = 1$ " muss ausführlich heißen "die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ ".

Man achte darauf! Manch tiefgläubiger Mathematiklehrer könnte soviel Lässigkeit übel nehmen - mir als Schreiber dieser Zeilen sicher . . .

Weitere Analyse der 6 Musterbeispiele B7 bis B12:

(Jetzt verwende ich Schreibweisen, die ich für Klausuren empfehle)

B7: $f(x) = \frac{2x+4}{x} = 2 + \frac{4}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Z=0: $x = -2$ (Nullstelle des Zählers)

N=0: $x = 0$ (Nullstelle des Nenners).

Schnittpunkt mit der x-Achse: N (- 2 | 0)

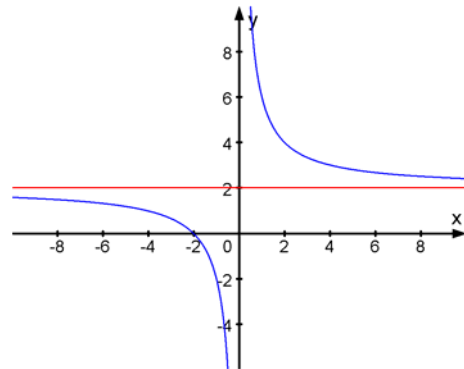
Pol mit Zeichenwechsel: $x_P = 0$

Asymptoten:

senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

waagrecht: $y = 2$, denn

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{4}{x} \right) = 2 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 2 + 0 = 2$$



B8: $f(x) = \frac{x+2}{x+3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Z=0: $x = -2$ (Nullstelle des Zählers)

N=0: $x = -3$ (Nullstelle des Nenners)

Schnittpunkt mit der x-Achse: N (- 2 | 0)

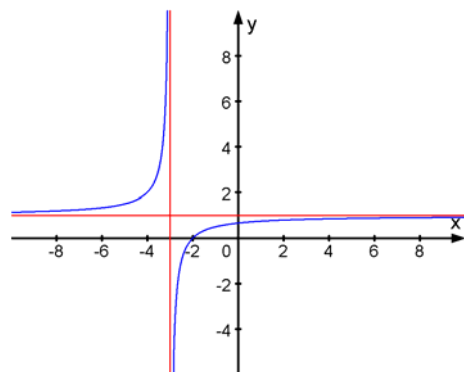
Pol mit Zeichenwechsel: $x_P = -3$

Asymptoten:

senkrecht: $x = -3$ (Polstelle von f)

waagrecht: $y = 1$, denn

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+3} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{1 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2}{x}}{1 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{3}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$



B9: $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$

Z=0: $x = 0$ doppelte Nullstelle des Zählers

N=0: $x = \pm 2$ also $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: N (0 | 0)

Da 0 sogar eine doppelte Nullstelle ist, berührt dort K die x-Achse.

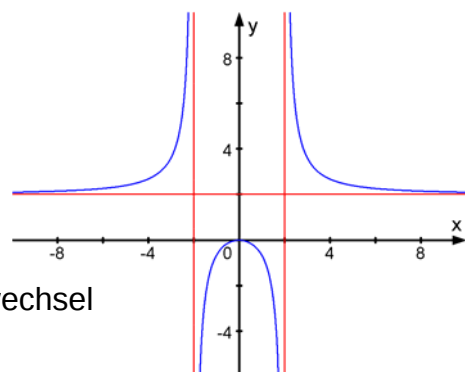
Polstellen: $x_P = 2$ und $x_P = -2$ mit Zeichenwechsel

Asymptoten:

senkrecht: $x = 2$ und $x = -2$ (Polstellen von f)

waagrecht: $y = 2$, denn

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1-0} = 2$$



B10: $f(x) = \frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 4}$

Z=0: $x(2x+6)=0$ also $x_1 = 0$, $x_2 = -3$

N=0: $x = \pm 2$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$N_1 (0 | 0)$ und $N_2 (-3 | 0)$.

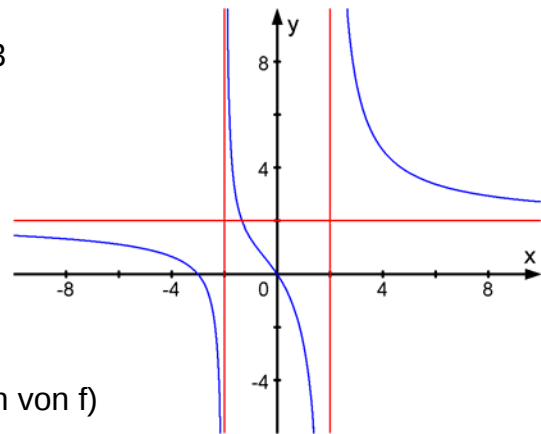
Polstellen: $x_P = 2$ und $x_P = -2$
mit Zeichenwechsel

Asymptoten:

senkrecht: $x = 2$ und $x = -2$ (Polstellen von f)

waagrecht: $y = 2$, denn

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 4} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2 + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{6}{x}}{1 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{2 + 0}{1 - 0} = 2$$



B11: $f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2} = 3 - \frac{27}{x^2}$

Z=0: ergibt $x^2 = 9$ d.h. $x = \pm 3$

N=0: $x = 0$ (doppelte Lösung). $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

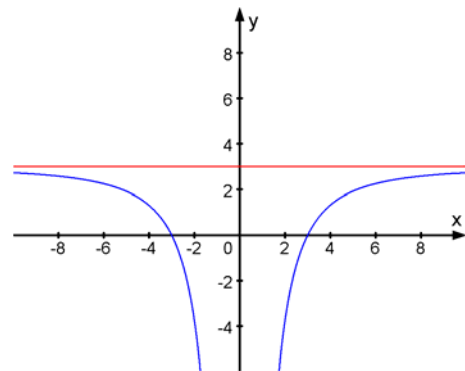
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2} (\pm 3 | 0)$

Polstelle ohne Zeichenwechsel: $x_P = 0$.

Asymptoten:

senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

waagrecht: $y = 3$, denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{27}{x^2} = 0$



B12: $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

Z=0: $x = 0$ (doppelte Lösung)

N=0: $x = 2$ (doppelte Lösung).

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N (0 | 0)$

Da 0 eine doppelte Lösung war, berührt K in N die x-Achse (Extrempunkt).

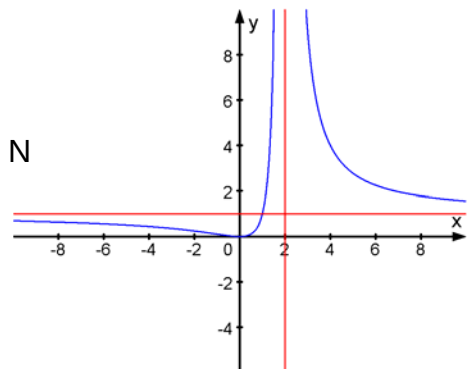
Polstelle ohne Zeichenwechsel: $x_P = 2$

Asymptoten:

senkrecht: $x = 2$ (Polstelle von f)

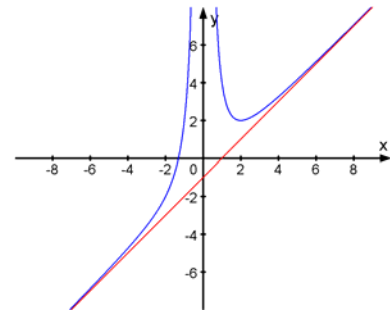
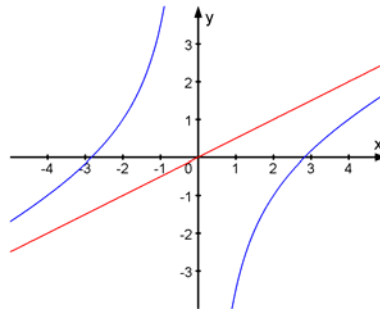
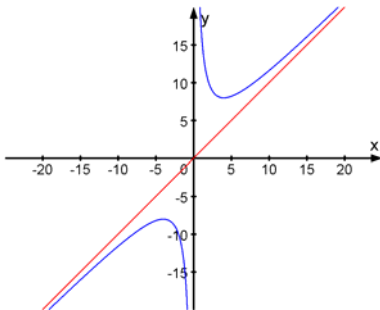
waagrecht: $y = 1$, denn

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1 - \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x} + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$



§6 Funktionen mit Asymptotengrad 1.

Dies bedeutet, daß der Zählergrad um eins höher ist als der Nenner. Die folgenden drei Beispiele zeigen, daß wir dann eine schräge (schiefe) Asymptote zu erwarten haben.

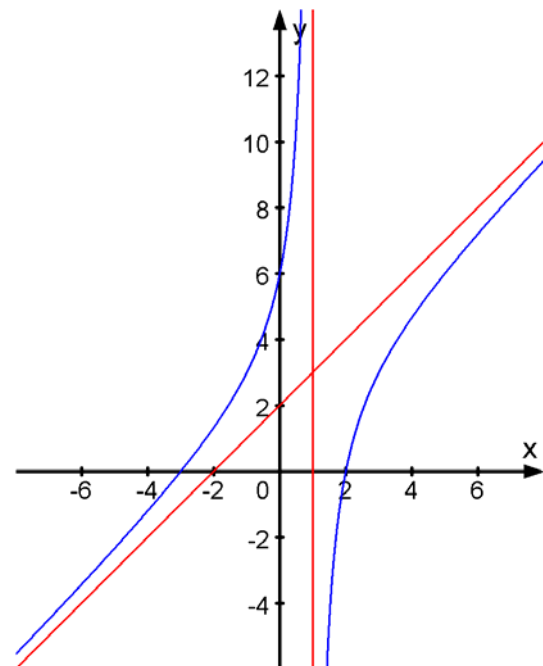
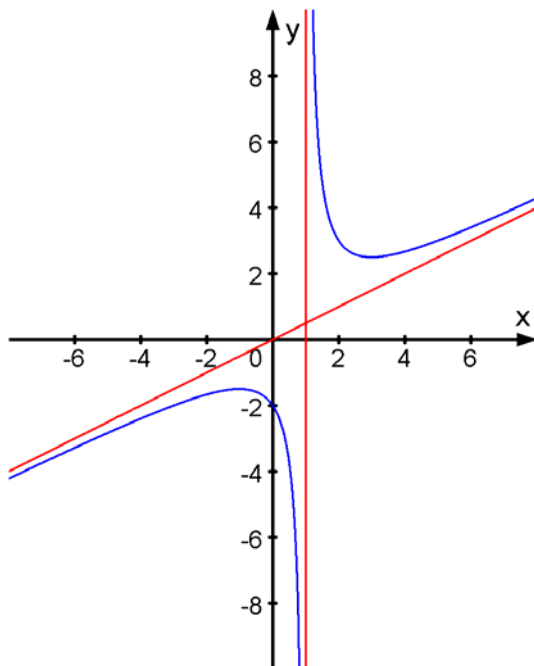


$$\text{B13: } f(x) = \frac{x^2 + 16}{x}$$

$$\text{B14: } f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x}$$

$$\text{B15: } f(x) = x - 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2}$$

In B13 und B14 ist der Grad des Zählers 2, der des Nenners 1, in B14 haben wir Zählergrad 3 und Nennergrad 2. Diese drei Beispiele haben keine Summe im Nenner. Es werden daher noch zwei Beispiele ergänzt, die in der Form B13 und B14 entsprechen, jedoch im Nenner eine Summe aufweisen:



$$\text{B13a: } f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$$

$$\text{B14a: } f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$$

Da jetzt die Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$ erkennbar nicht mehr gegen einen Zahlengrenzwert gehen, brauchen wir ganz andere Methoden. Wir müssen die Funktionstermen so zerlegen, daß der ganzrationale Anteil als Summand herausgezogen wird. (Siehe Abschnitt 1)

Untersuchung des Verhaltens für $|x| \rightarrow \infty$ und Analyse der gegebenen Funktionen

B13: $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x} = x + \frac{16}{x}$

Z=0: $x^2 + 16 = 0$ also $x^2 = -16$
Es gibt keine Nullstellen des Zählers.

N=0: $x = 0$ also $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

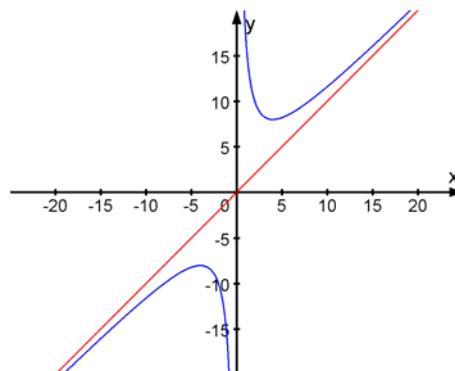
Schnittpunkte mit der x-Achse gibt es keine.

Polstelle mit Zeichenwechsel: $x_P = 0$

Asymptoten:

senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

schräg: $y = x$, denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{16}{x} = 0$



Erklärung:

Lässt man x gegen $\pm\infty$ gehen, dann gehen auch die Funktionswerte nach $\pm\infty$.
Man sollte daher nicht diese Schreibweise benutzen: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$.

Spaltet man jedoch die Funktion auf: $f(x) = \frac{x^2 + 16}{x} = x + \frac{16}{x}$, dann hat man
in $\frac{16}{x}$ einen Summanden, der mit wachsendem x immer kleiner wird.

Daher wird die Differenz zwischen $f(x)$ und dem anderen Summanden x auch immer kleiner und geht gegen 0. Man kann sagen:

Für $x \rightarrow \pm\infty$ verhält sich f wie die Funktion $g(x) = x$

Daher nähert sich die Kurve $y = f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ der Geraden mit der Gleichung $y = x$ an: Diese wird zur schiefen Asymptote.

B14: $f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x}$

Z=0: $x^2 = 8$ also $x_{1,2} = \pm\sqrt{8}$

N=0: $x = 0$ also $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

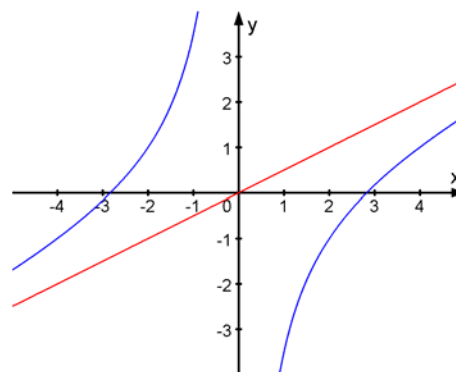
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_{1,2}(\pm\sqrt{8} | 0)$

Polstelle mit Zeichenwechsel: $x_P = 0$.

Asymptoten:

senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

schräg: $y = \frac{1}{2}x$, denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0$



B15: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2} = x - 1 + \frac{4}{x^2}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

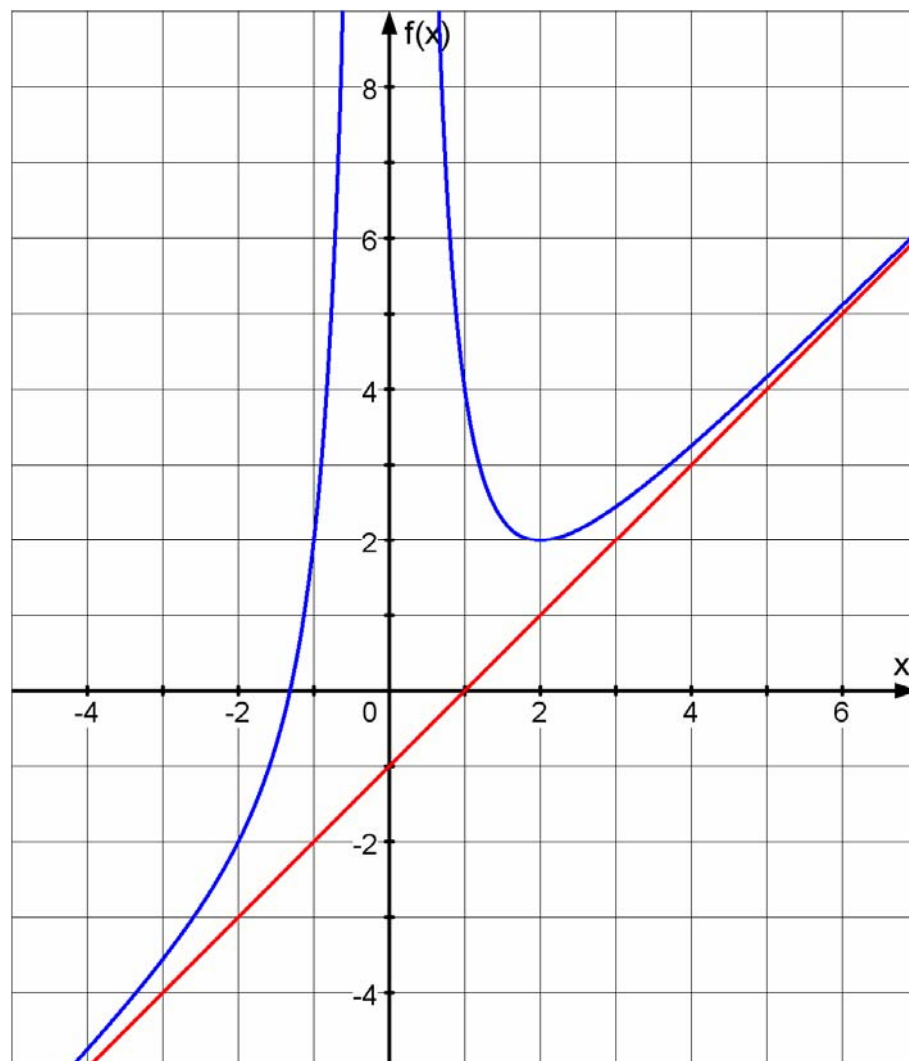
Der Ansatz $Z=0$ führt auf eine (für uns) unlösbare Gleichung 3. Grades, denn es gibt keine ganzzahlige Lösung. (Hier könnte man die einzige Nullstelle mit dem Newtonschen Näherungsverfahren berechnen!).

$N=0$: $x = 0$ doppelt, d.h. $x_P = 0$ ist eine Polstelle ohne Zeichenwechsel
Daher hat K die senkrechte Asymptote $x = 0$.

Durch die Zerlegung erkennt man, daß K eine schräge Asymptote hat: $y = x - 1$

denn es gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$

Die hier genauere Abbildung als auf der Seite zuvor, zeigt sehr schön, wie sich das Schaubild K von f dieser schrägen Geraden annähert.



B13a: $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{2x - 2}$. (Abbildung Seite 21)

$$Z=0: x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \notin \mathbf{R}$$

$$N=0: x = 1 \quad \text{also } D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse gibt es nicht,
da der Zähler keine Nullstellen hat.

Polstelle mit Zeichenwechsel: $x_p = 1$

Asymptoten:

senkrecht: $x = 1$ (Polstelle von f)

schräg:

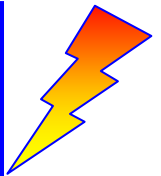
Zerlegung durch Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{2x-2} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 - x + 4) : (2x - 2) = \frac{1}{2}x \\ -(x^2 - x) \\ \hline 4 \end{array}$$

Da $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1-0} = 0$ ist, ist für große $|x|$ $f(x) \approx \frac{1}{2}x$.

Also ist die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ schräge Asymptote !!!



B14a: $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$ (Abbildung Seite 21)

$$Z=0: x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array} \right\}$$

$$N=0: x = 1 \quad \text{also } D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1 (2 | 0)$ und $N_2 (-3 | 0)$

Polstelle mit Zeichenwechsel: $x_p = 1$

Asymptoten:

senkrecht: $x = 1$ (Polstelle von f)

schräg:

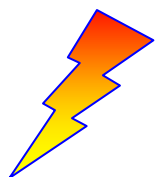
Zerlegung durch Polynomdivision:

$$\text{Also ist } f(x) = x + 2 - \frac{4}{x-1}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 + x - 6) : (x - 1) = x + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline 2x - 6 \\ -(2x - 2) \\ \hline -4 \end{array}$$

Da $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{4}{x-1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1-0} = 0$ ist, ist für große $|x|$ $f(x) \approx x + 2$.

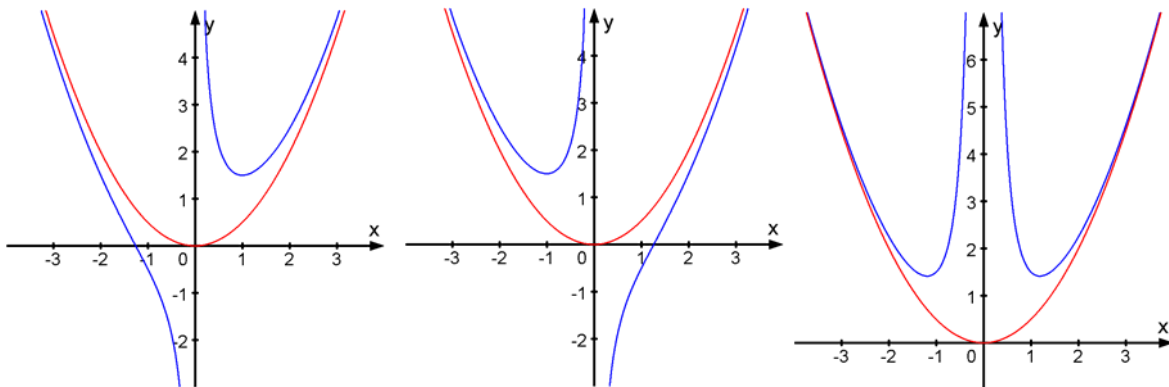
Also ist die Gerade mit der Gleichung $y = x + 2$ schräge Asymptote



Diese Formulierung sollte man sich gut einprägen ! Sie hilft wenn Grad Z > Grad N ist. !!!

§7 Funktionen mit Asymptotengrad 2.

Drei Beispiele ohne Summe im Nenner sollen typische Schaubilder zeigen:



$$\text{B16: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+2}{2x} \quad \text{B17: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3-2}{2x} \quad \text{B18: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+2}{2x^2}$$

Betrachten wir zuerst die Nenner. B16 und B17 haben $N = 2x$ also einen Pol mit Zeichenwechsel bei 0, B18 hat dagegen $N = 2x^2$ also eine doppelte Polstelle, d.h. ohne Zeichenwechsel. Man erkennt dies auch sehr schön an den Bildern.

An der Polstelle liegt wie immer eine senkrechte Asymptote des Schaubilds vor: $x = 0$, also die y-Achse in allen drei Fällen.

Aber wir sehen keine waagrechten oder schrägen Asymptoten mehr! Dagegen taucht plötzlich eine Parabel auf, an die sich nach rechts und links außen die Kurven annähern: Näherungsparabeln.

Alle drei Funktionen haben eine Gleichung der Form

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \pm r(x)$$

Und $r(x)$ ist entweder $\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x^2}$.

Für $|x| \rightarrow \infty$ gehen diese Restfunktionen gegen 0, so daß wir in Anlehnung an die Formulierungen der letzten Seite hier sagen können:

$$\text{Da } \lim_{|x| \rightarrow \infty} r(x) = 0 \text{ gilt für große } |x| : f(x) \approx \frac{1}{2}x^2.$$

Also ist $y = \frac{1}{2}x^2$ Näherungskurve für das Schaubild K von f.

Eigentlich müßten alle drei Abbildungen dieselbe Näherungskurve haben.

Die Abbildungen sind aber maßstäblich verzerrt, so daß dieser Eindruck hier nicht vermittelt wird.

Noch etwas ist wichtig: Bringen wir diese Funktionen auf die Normalform, dann ist jeweils der Grad des Zählers um 2 größer als der des Nenners, daher ist der Asymptotengrad 2 (was zu einer Näherungsparabel führt):

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+2}{2x}; \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3-2}{2x}; \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+2}{2x^2}$$

Nun die ausführliche Besprechung dieser drei Funktionen:

Untersuchung des Verhaltens für $|x| \rightarrow \infty$ und Analyse der gegebenen Funktionen

B16: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$

Z=0: $x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$

N=0: $x = 0$ also $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(-\sqrt[3]{2} \mid 0)$

Polstelle mit Zeichenwechsel: $x_p = 0$

Asymptoten: senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

Wegen $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt für große $|x|$ $f(x) \approx \frac{1}{2}x^2$.

Also ist $y = \frac{1}{2}x^2$ Näherungskurve für $|x| \rightarrow \infty$.

B17: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 2}{2x}$

Z=0: $x^4 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{2}$

N=0: $x = 0$ doppelte Lösung, also $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(\sqrt[4]{2} \mid 0)$

Polstelle ohne Zeichenwechsel: $x_p = 0$

Asymptoten: senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

Wegen $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt für große $|x|$ $f(x) \approx \frac{1}{2}x^2$.

Also ist $y = \frac{1}{2}x^2$ Näherungskurve für $|x| \rightarrow \infty$.

B18: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$

Z=0: $x^4 = -2$ hat keine reelle Lösung

N=0: $x = 0$ doppelte Lösung, also ist $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Keine Schnittpunkte mit der x-Achse

Polstelle ohne Zeichenwechsel: $x_p = 0$

Asymptoten: senkrecht: $x = 0$ (Polstelle von f)

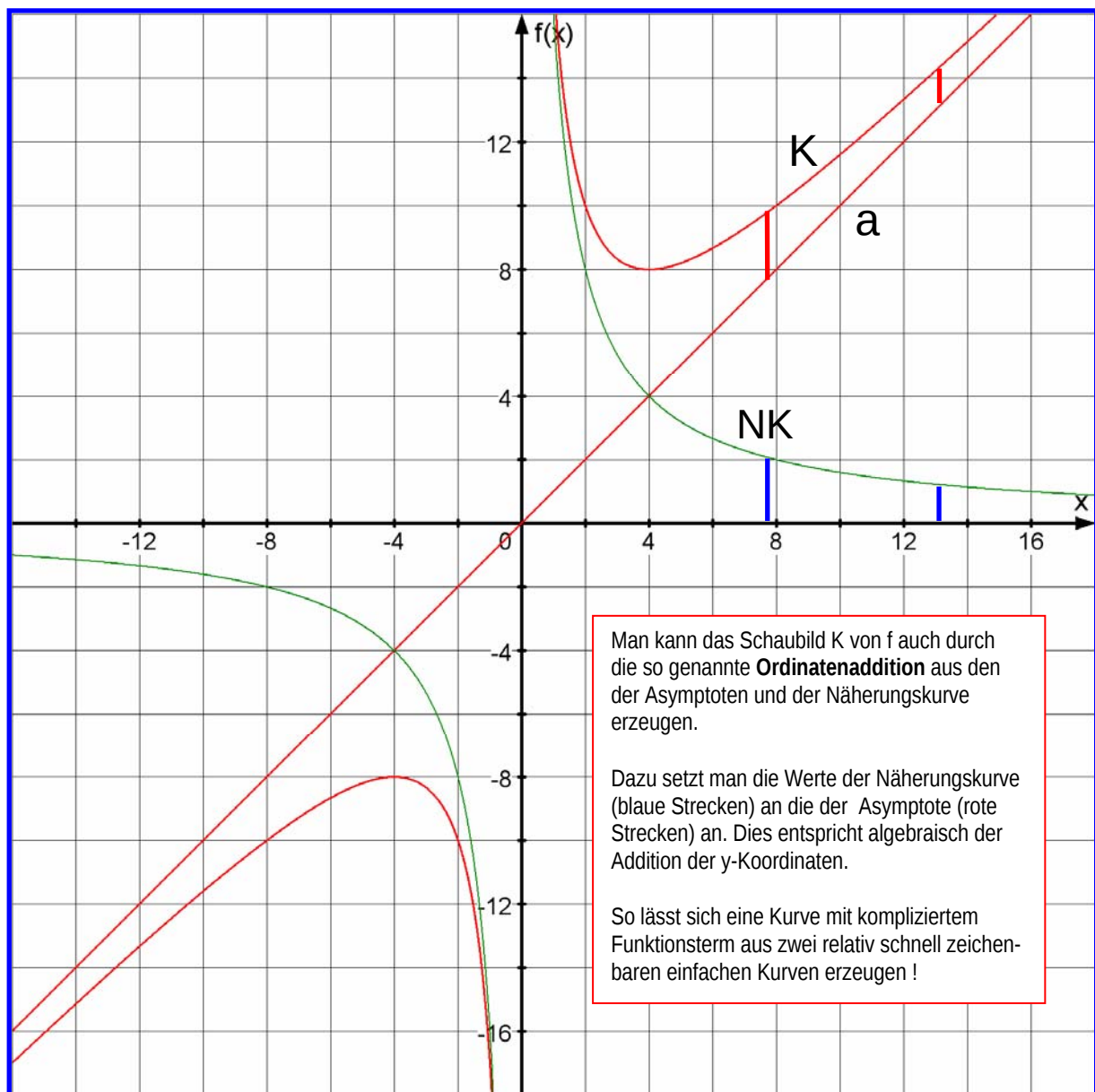
Wegen $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ gilt für große $|x|$ $f(x) \approx \frac{1}{2}x^2$.

Also ist $y = \frac{1}{2}x^2$ Näherungskurve für $|x| \rightarrow \infty$.

§8 Näherungskurven für x gegen 0

Nachdem wir gesehen haben, daß bei Funktionen mit dem Asymptotengrad 2 Näherungskurven 2. Grades vorhanden sind, soll noch gezeigt werden, daß es auch Näherungskurven für andere Anlässe gibt.

$$\text{B13: } f(x) = x + \frac{16}{x}$$

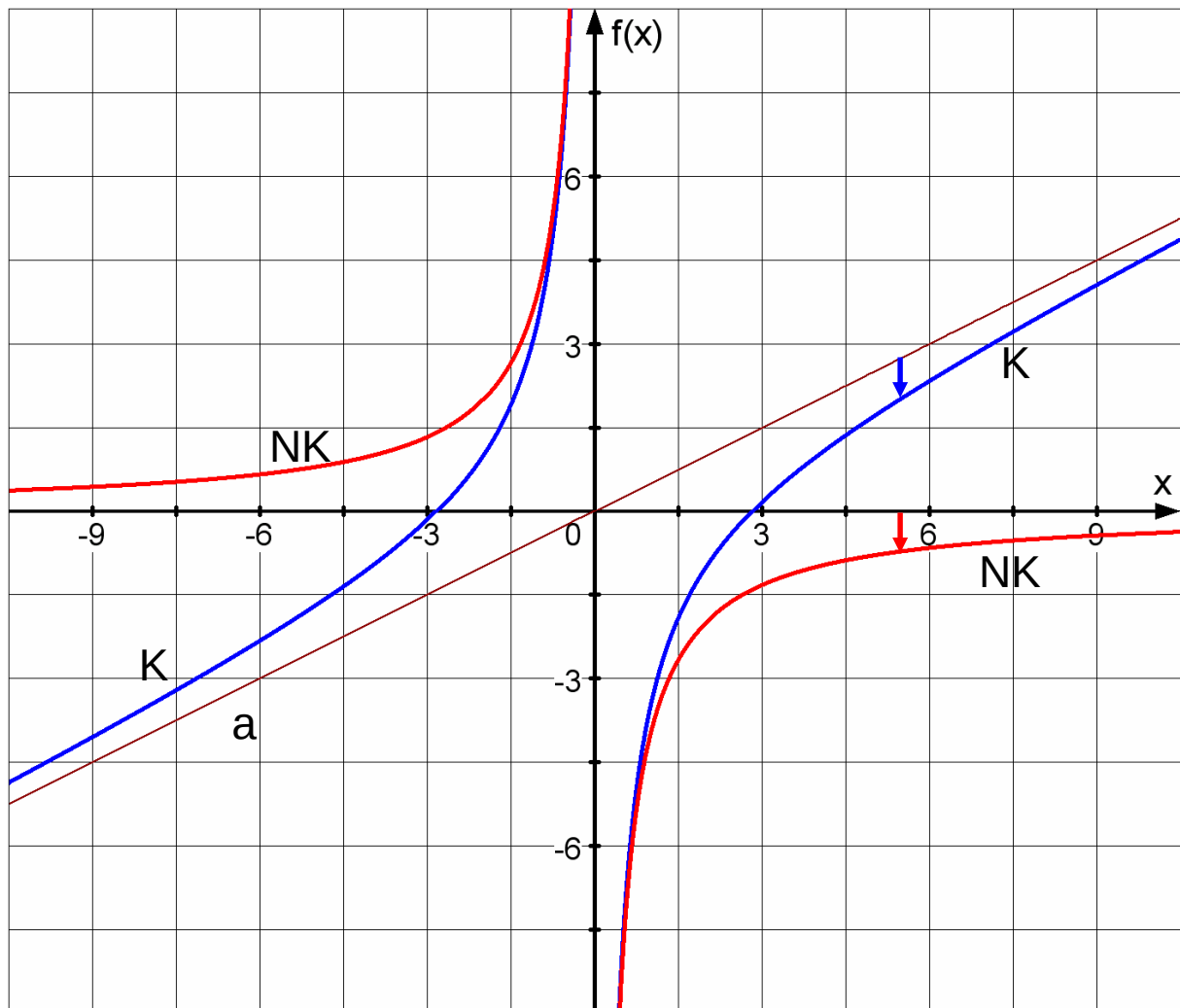


Wir zeichnen die schräge Asymptote $a: y = x$ und die Kurve $NK: y = \frac{16}{x}$ (grün).

Die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{16}{x}$ ist Näherungskurve für x gegen 0, denn wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ gilt für } x \text{ gegen } 0: f(x) \approx \frac{16}{x}.$$

$$\text{B14: } f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x}$$



Die Gerade a: $y = \frac{1}{2}x$ ist schräge Asymptote der Kurve.

Da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x = 0$ gilt für x gegen 0: $f(x) \approx -\frac{4}{x}$.

Daher ist für x gegen 0 $y = -\frac{4}{x}$ Näherungskurve (rot) für K (blau).

Bemerkung zur Erstellung einer Zeichnung:

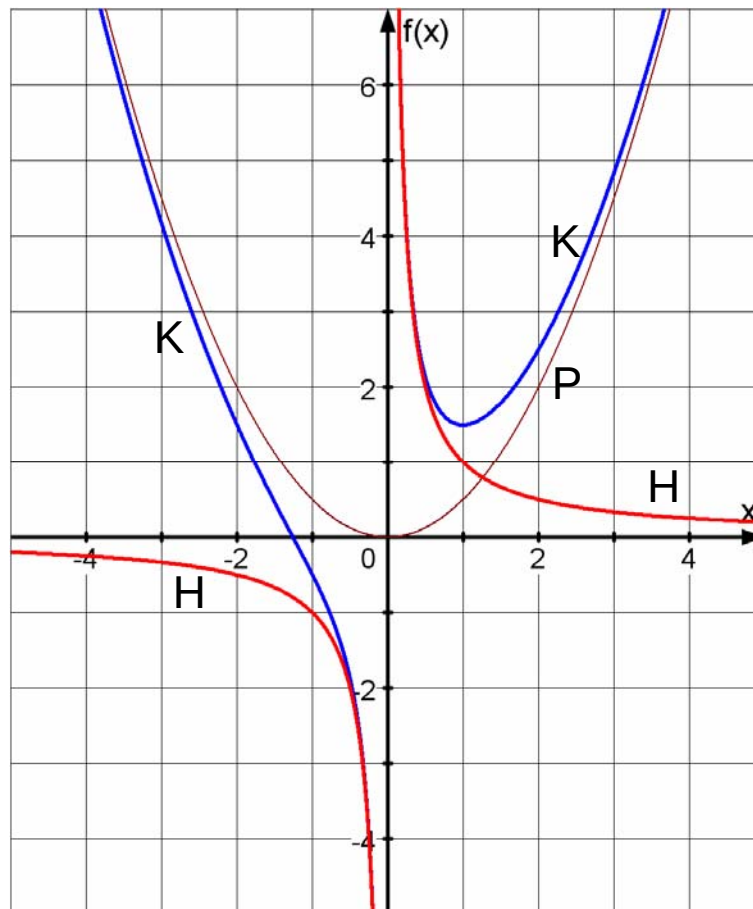
Auch hier kann man das Verfahren der Ordinatenaddition verwenden:

Man zeichnet zuerst die schiefe Asymptote und dann die Näherungskurve mit der Gleichung $y = -\frac{4}{x}$.

Deren Punkte lassen sich problemlos im Kopf berechnen. Dann addiert man die Werte.

An einer Stelle (4,4) ist ein Beispiel eingezeichnet: Der blaue Strich stellt allerdings einen negativen Wert daher, weshalb er auch von der Asymptote aus nach unten abgetragen wird (rot).

$$\text{B16: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3 + 2}{2x}$$



Näherungskurve für $|x| \rightarrow \infty$ ist $y = \frac{1}{2}x^2$ (Parabel P), denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Näherungskurve für $x \rightarrow 0$ ist $y = \frac{1}{x}$ (Hyperbel H), denn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$.

Man kann auch hier aus diesen beiden Näherungskurven durch Ordinatenaddition die gesuchte Kurve erstellen.

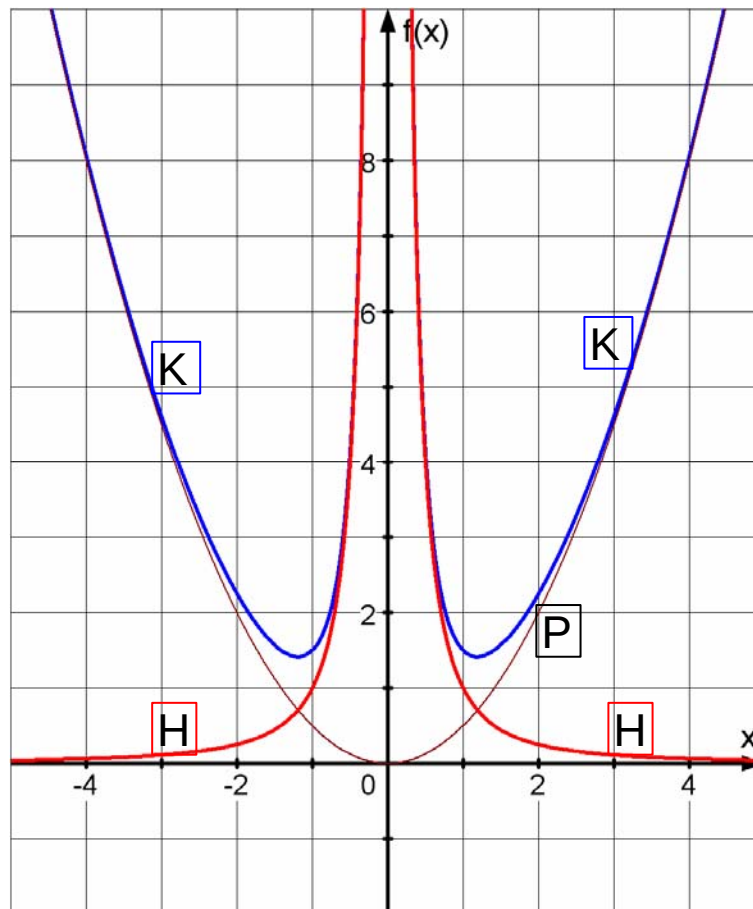
$$\text{B17: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 2}{2x^2}$$

(ohne weitere Abbildung)

Jetzt haben für $|x| \rightarrow \infty$ die Näherungskurve $y = \frac{1}{2}x^2$ (Parabel P)

und für $x \rightarrow 0$ die Näherungskurve $y = \frac{1}{x^2}$ (Hyperbel H), denn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$.

$$\text{B18} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 2}{2x^2}$$



Näherungskurve für $|x| \rightarrow \infty$: $y = \frac{1}{2}x^2$ (Parabel P), denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Näherungskurve für $x \rightarrow 0$: $y = \frac{1}{x^2}$ (Hyperbel H), denn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$

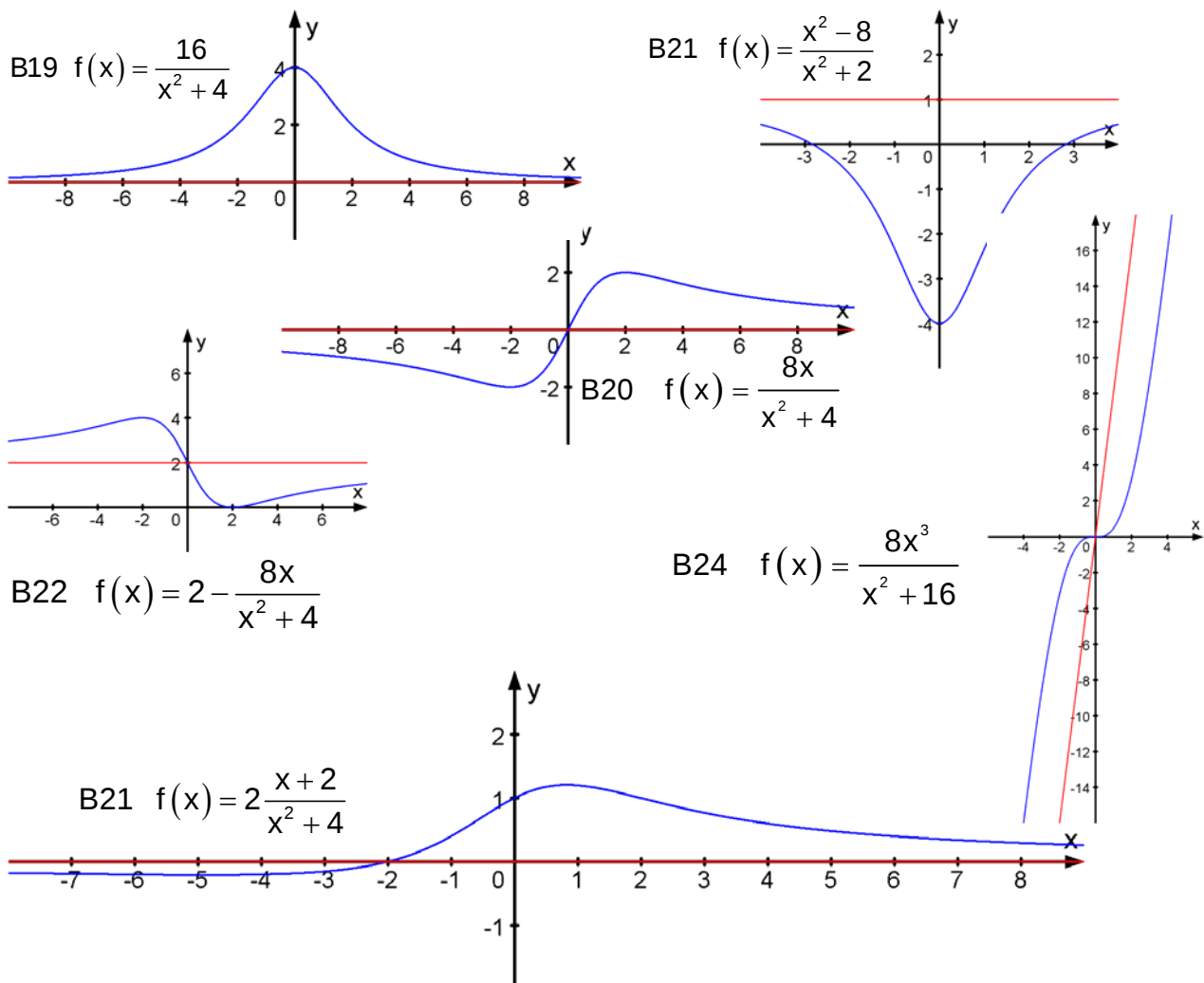
§9 Gebrochen rationale Funktionen ohne Polstellen

Oh - gibt es das auch? Bei welcher Gelegenheit stoßen wir eigentlich auf Polstellen?

Wird an einer Stelle der Nenner Null, aber nicht zugleich auch noch der Zähler, dann gehen die Funktionswerte bei Annäherung an diese Stelle gegen Unendlich. Und genau diese Stellen nennt man Polstellen.

So, nun kann man darauf kommen: **Wenn es Funktionen gibt, deren Nenner nicht Null werden kann, dann haben diese auch keine Polstellen.**

Hier zeige ich sechs Prachtexemplare davon:



Man erkennt sofort, welchem Term man es zu verdanken hat, daß alle diese Nenner nie Null werden können. Es ist ein Term der Form $x^2 + a$ wobei a eine positive Zahl ist. Der Versuch, etwa die Gleichung $x^2 + 4 = 0$ zu lösen führt auf $x^2 = -4$. Quadrate können aber nie negativ sein. Daher besitzt diese Gleichung keine Lösung. Diese Überlegung kann man auch bei $x^2 + 2$ und $x^2 + 16$ usw. anstellen.

Wenn also ein Funktionsterm den Nenner $x^2 + a$ enthält ($a > 0$), dann gibt es keine Polstelle und das Schaubild hat keine senkrechte Asymptote. Dann besitzt jede reelle Zahl einen Funktionswert, d.h. der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$.

Es gibt aber waagrechte und schräge Asymptoten, je nach Grad von Zähler und Nenner, wie das zuvor besprochen worden ist.

§ 10 Übersicht zum Thema Asymptoten

Gegeben sei eine gebrochen rationale Funktion in der Normalform

1. Untersuchung der Polstellen, Nullstellen und Löcher

Methode: Zähler = 0 ergibt $x = \dots$ usw.

Nenner = 0 ergibt $x = \dots$ usw.

Bedingung für Nullstellen: Zähler = 0, aber Nenner $\neq 0$.

(Nullstellen sind die Schnittpunkte einer Kurve mit der x-Achse)

Bedingung für Polstellen: Nenner = 0, aber Zähler $\neq 0$

(Bei Annäherung an eine Polstelle gehen die Funktionswerte gegen $\pm\infty$.
Dort wo eine Funktion eine Polstelle hat, besitzt das Schaubild der Funktion eine senkrechte Asymptote.)

Hat eine Funktion eine Zahl c , die als **Nullstelle von Zähler und Nenner** auftritt, dann kann man den Linearterm $(x - c)$ in Zähler und Nenner ausklammern und dann herauskürzen. Dann wird neu entschieden: Bleibt dieselbe Nullstelle im Nenner erhalten (weil sie zuvor z.B. doppelt war), dann liegt eine Polstelle vor. Ist diese Zahl c aber keine Nullstelle des Nenners mehr, dann bleibt sie dennoch Definitionslücke, weil sie im ursprünglichen Definitionsbereich, der weiterhin gilt, ausgeschlossen werden mußte. Für das Schaubild bedeutet dies ein Loch.

2. Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$

1. Fall: Grad Zähler < Grad Nenner: (also Asymptotengrad < 0)
Waagrechte Asymptote $y = 0$ (x-Achse). Beweismethode:
Kürze durch die höchste x-Potenz des Nenners und berechne dann den Grenzwert.

2. Fall: Grad Zähler = Grad Nenner: (also Asymptotengrad 0)
Waagrechte Asymptote $y = c$ ($c \neq 0$) (Parallele zur x-Achse).
Beweismethode:
Kürze durch die höchste x-Potenz des Nenners und berechne dann den Grenzwert.

3. Fall: Grad Zähler = Grad Nenner + 1: (also Asymptotengrad 1)
Schräge Asymptote $y = mx + n$.
Beweismethode:
Herausziehen des ganzrationalen Anteils mittels Polynom-Division zum Ergebnis: $f(x) = mx + n + r(x)$
wobei $r(x)$ gebrochen rational mit Asymptotengrad < 0 ist.
Schiefe Asymptote ist: $y = mx + n$ denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} r(x) = 0$

4. Fall: Grad Zähler = Grad Nenner + 2 (Asymptotengrad 2)
Es gibt eine Näherungsparabel. Beweismethode:
Herausziehen des ganzrationalen Anteils mittels Polynom-Division zum Ergebnis: $f(x) = ax^2 + bx + c + r(x)$
wobei $r(x)$ gebrochen rational mit Asymptotengrad < 0 ist.
Näherungskurve: $y = ax^2 + bx + c$, denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} r(x) = 0$

§ 11 Symmetrieuntersuchungen

zu den hier vorgestellten Funktionen

1. Möglichkeit: Symmetrie zur y-Achse

Nachweismethode: Für alle x muß $f(-x) = f(x)$ gelten.

Dies ist bei gebrochen rationalen Funktionen in der Normalform dann der Fall, wenn im Zähler und Nenner nur gerade oder ungerade Exponenten vorkommen.

$$\text{B 3: } f(x) = \frac{8}{x^2 - 4} \quad f(-x) = \frac{8}{(-x)^2 - 4} = \frac{8}{x^2 - 4} = f(x)$$

$$\text{B 9: } f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4} \quad f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{2x^2}{x^2 - 4} = f(x)$$

$$\text{B 11: } f(x) = 3 - \frac{27}{x^2} \quad f(-x) = 3 - \frac{27}{(-x)^2} = 3 - \frac{27}{x^2} = f(x)$$

$$\text{B 17 und B 18: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 \pm 2}{2x^2}$$

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 \pm \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{x^2} = f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(-x) = \frac{(-x)^4 \pm 2}{(-x)^2} = \frac{x^4 \pm 2}{x^2} = f(x).$$

$$\text{B 19: } f(x) = \frac{16}{x^2 + 4} \quad f(-x) = \frac{16}{(-x)^2 + 4} = \frac{16}{x^2 + 4} = f(x)$$

$$\text{B 21: } f(x) = \frac{x^2 - 8}{x^2 + 4} \quad f(-x) = \frac{(-x)^2 - 8}{(-x)^2 + 4} = \frac{x^2 - 8}{x^2 + 4} = f(x)$$

2. Möglichkeit: Symmetrie zum Ursprung

Nachweismethode: Für alle x muß $f(-x) = -f(x)$ gelten.

Dies ist bei gebrochen rationalen Funktionen in der Normalform dann der Fall, wenn der Zähler nur gerade und der Nenner nur ungerade Exponenten aufweist bzw. umgekehrt.

$$\text{B 2: } f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} \quad f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 4} = \frac{-2x}{x^2 - 4} = -f(x)$$

$$\text{B 13: } f(x) = \frac{x^2 + 16}{x} \quad f(-x) = \frac{(-x)^2 + 16}{-x} = \frac{x^2 + 16}{-x} = -f(x)$$

$$\text{B 14: } f(x) = \frac{x^2 - 8}{2x} \quad f(-x) = \frac{(-x)^2 - 8}{2(-x)} = \frac{x^2 - 8}{-2x} = -f(x)$$

$$\text{B 20: } f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4} \quad f(-x) = \frac{8(-x)}{(-x)^2 + 4} = \frac{-8x}{x^2 + 4} = -f(x)$$

$$\text{B 24: } f(x) = \frac{8x^3}{x^2 + 16} \quad f(-x) = \frac{8(-x)^3}{(-x)^2 + 16} = \frac{-8x^3}{x^2 + 16} = -f(x)$$

3. Möglichkeit: Symmetrie zu einer Parallelen zur y-Achse

Nachweismethode: Für alle x muß $f(a-h) = f(a+h)$ gelten.

B 4: $f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}$ Das Schaubild ist symmetrisch zur Geraden $x = 2$.

Zu zeigen ist: $f(2-h) = f(2+h)$.

Beweis: Linke Seite: $f(2-h) = \frac{5}{((2-h)-2)^2} = \frac{5}{(-h)^2} = \frac{5}{h^2}$

Rechte Seite: $f(2+h) = \frac{5}{((2+h)-2)^2} = \frac{5}{h^2}$

4. Möglichkeit: Symmetrie zu einem beliebigen Punkt $Z(a|b)$

Nachweismethode: Für alle x muß $\frac{1}{2}[f(a-h) + f(a+h)] = b$ gelten.

B 1: $f(x) = \frac{4}{x-2}$ Das Schaubild ist symmetrisch zum Asymptotenschnittpunkt $Z(0|2)$.

Zu zeigen ist: $\frac{1}{2}[f(2-h) + f(2+h)] = 0$ bzw. $f(2-h) + f(2+h) = 0$

Beweis:

$$f(2-h) + f(2+h) = \frac{4}{(2-h)-2} + \frac{4}{(2+h)-2} = \frac{4}{-h} + \frac{4}{h} = -\frac{4}{h} + \frac{4}{h} = 0$$

B 7: $f(x) = \frac{2x+4}{x}$ Symmetriezentrum ist $Z(0|2)$.

Zu zeigen ist demnach: $\frac{1}{2}[f(-h) + f(h)] = 2$ d.h. $f(-h) + f(h) = 4$

Beweis:

$$f(-h) + f(h) = \frac{2h+4}{h} + \frac{-2h+4}{-h} = \frac{2h+4}{h} - \frac{2h+4}{h} = \frac{(2h+4) - (2h+4)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

B 8: $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ Symmetriezentrum ist $Z(-3|1)$

Zu zeigen ist demnach: $\frac{1}{2}[f(-3-h) + f(-3+h)] = 1 \Leftrightarrow f(-3-h) + f(-3+h) = 2$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(-3-h) + f(-3+h) &= \frac{-3-h+2}{-3-h+3} + \frac{-3+h+2}{-3+h+3} = \frac{-1-h}{-h} + \frac{-1+h}{h} = \frac{1+h}{h} + \frac{-1+h}{h} \\ &= \frac{1+h-1+h}{h} = \frac{2h}{h} = 2. \end{aligned}$$

B 22: $f(x) = 2 - \frac{8x}{x^2 + 4}$ Symmetriezentrum ist $Z(0 | 2)$

Zu zeigen ist demnach: $\frac{1}{2}[f(-h) + f(h)] = 2$ d.h. $f(-h) + f(h) = 4$

Beweis:

$$f(-h) + f(h) = 2 - \frac{8(-h)}{(-h)^2 + 4} + 2 - \frac{8h}{h^2 + 4} = 4 + \frac{8h}{h^2 + 4} - \frac{8h}{h^2 + 4} = 4$$

Vorsicht vor falschen Formulierungen:

Die Formulierung "Die Funktion f ist symmetrisch zur y -Achse" ist unzulässig, denn eine Funktion ist eine algebraische Zuordnung. Nur die geometrische Darstellung von f , also ihr Schaubild kann symmetrisch sein !

Es folgen nun die Lösungen zu den Aufgaben dieses Manuskripts.

§ 12 Aufgaben und Lösungen:

Zuerst von Seite 2 / 43011

(1) Bringe auf die Normalform: $f(x) =$

(a) $4 - \frac{3}{x}$ (b) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{x}$ (c) $x + 2 - \frac{4}{x}$ (d) $\frac{1}{4}x - \frac{4}{x^2}$ (e) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x}$

(2) Zerlege so weit wie möglich

(a) $\frac{x+4}{8x}$ (b) $\frac{3x-4}{2x^2}$ (c) $\frac{4x+6}{3x}$ (d) $\frac{x^3-12x^2+4}{4x^2}$ (e) $\frac{x^4-64}{4x^2}$

Lösungen

1 (a) $4 - \frac{3}{x} = \frac{4x-3}{x}$ (b) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{x} = \frac{x^2+6}{3x}$ (c) $x + 2 - \frac{4}{x} = \frac{x^2+2x-4}{x}$
 (d) $\frac{1}{4}x - \frac{4}{x^2} = \frac{x^3-16}{4x^2}$ (e) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x} = \frac{x^3-8}{2x}$

2 (a) $\frac{x+4}{8x} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2x}$ (b) $\frac{3x-4}{2x^2} = \frac{3}{2x} - \frac{2}{x^2}$ (c) $\frac{4x+6}{3x} = \frac{4}{3} + \frac{2}{x}$
 (d) $\frac{x^3-12x^2+4}{4x^2} = \frac{1}{4}x - 3 + \frac{1}{x^2}$ (e) $\frac{x^4-64}{4x^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{16}{x^2}$

Aufgaben von Seite 4

Nr. 3. Zerlege durch Polynomdivision in Einzelbrüche: $f(x) = \dots$

(a) $\frac{4x+1}{x+2}$ (b) $\frac{2x^2+x}{2x-1}$ (c) $\frac{x^2-1}{x^2+4}$ (d) $\frac{x^3+4x+4}{x^2+4}$ (e) $\frac{x^3+6x}{2x^2+8}$

Lösungen

(a) $\frac{4x+1}{x+2} = 4 - \frac{7}{x+2}$ denn

$$\begin{array}{r} (4x+1):(x+2) = 4 \\ -(4x+8) \\ \hline -7 \end{array}$$

(b) $\frac{2x^2+x}{2x-1} = x+1 + \frac{1}{2x-1}$ denn:

$$\begin{array}{r} (2x^2+x):(2x-1) = x+1 \\ -(2x^2-x) \\ \hline 2x \\ -(2x-1) \\ \hline 1 \end{array}$$

(c) $\frac{x^2-1}{x^2+4} = 1 - \frac{5}{x^2+4}$ denn

$$\begin{array}{r} (x^2-1):(x^2+4) = 1 \\ -(x^2+4) \\ \hline -5 \end{array}$$

(d) $\frac{x^3-4x+4}{x^2+4} = x - \frac{8x+4}{x^2+4}$ denn

$$\begin{array}{r} (x^3-4x+4):(x^2+4) = x \\ -(x^3+4x) \\ \hline -8x+4 \end{array}$$

(e) $\frac{x^3+6x}{2x^2+8} = \frac{1}{2}x + \frac{2x}{2x^2+8} = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+4}$
 denn

$$\begin{array}{r} (x^3+6x):(2x^2+8) = \frac{1}{2}x \\ -(x^3+4x) \\ \hline 2x \end{array}$$

Aufgaben von Seite 11 aus 43011

Nr. 4: Untersuche die genannten Funktionen auf Nullstellen, Pole bzw. Löcher
Gib jeweils den Definitionsbereich an: $f(x) = \dots$

(a) $\frac{2x}{x+4}$ (b) $\frac{2x+3}{4x+1}$ (c) $\frac{x^2-9}{x-2}$ (d) $\frac{x+2}{x^2-9}$ (e) $\frac{x}{x^2+16}$ (f) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+9}$
 (g) $\frac{x+3}{x^2+4x}$ (h) $\frac{x+3}{x^2-9}$ (i) $\frac{x^2+2x-3}{x+3}$ (j) $\frac{x-2}{x^2+3x-10}$ (k) $\frac{x^2+x-12}{x^2+6x+8}$
 (l) $\frac{x^3-4x}{x^2-x-2}$ (m) $\frac{(x-1)^3}{x^2-2x+1}$ (n) $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$ (o) $f(x) = \frac{x-6}{x^2+4x+6}$

Lösungen

(a) $f(x) = \frac{2x}{x+4}$

$Z = 0: x = 0$

$N = 0: x = -4$

Nullstelle: $N(0|0)$

Polstelle $x_P = -4$ mit ZW.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

(b) $f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$

$Z = 0: x = -\frac{3}{2}$

$N = 0: x = -\frac{1}{4}$

Nullstelle: $N\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)$

Polstelle: $x_P = -\frac{1}{4}$ mit ZW.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-2}$

$Z = 0: x = \pm 3$

$N = 0: x = 2$

Nullstellen $N_{1,2}(\pm 3 \mid 0)$

Polstelle: $x_P = 2$ mit ZW

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$

$Z = 0: x = -2$

$N = 0: x = \pm 3$

Nullstelle: $N(-2 \mid 0)$

Polstellen: $x_P = \pm 3$ je mit ZW

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

(e) $f(x) = \frac{x}{x^2+16}$

$Z = 0: x = 0$

$N \neq 0: \text{für alle } x \in \mathbb{R}$

Nullstelle $N_{1,2}(0 \mid 0)$

Keine Polstellen

$D = \mathbb{R}$

(f) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+9}$

$Z = 0: x = -2$

$N = 0: x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3$

Nullstellen: $N(\pm 2 \mid 0)$

Polstelle: $x_P = -3$ **ohne** ZW

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$(g) \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x} = \frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$Z = 0: \quad x = -3$$

$$N = 0: \quad x_1 = 0, x_2 = -4$$

$$\text{Nullstellen } N_{1,2}(-3 | 0)$$

$$\text{Polstellen: } 0 \text{ und } -4 \text{ je mit ZW}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$$

$$(h) \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$$

$$Z = 0: \quad x = -2$$

$$N = 0: \quad x = \pm 3$$

$$\text{Nullstelle: } N(-2 | 0)$$

$$\text{Polstellen: } x_P = \pm 3 \text{ je mit ZW}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$$

$$(i) \quad f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$$

$$Z = 0: \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

$$N = 0: \quad x = -3$$

$$\text{Nullstellen } N_1(1 | 0); N_2(-3 | 0)$$

$$\text{Polstelle: } x_P = -3 \text{ mit ZW}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$(j) \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2+3x-10} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot 1}{\cancel{(x-2)}(x+5)}$$

$$Z = 0: \quad x = 2$$

$$N = 0: \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

$$\text{Loch: } L(2 | \frac{1}{7})$$

$$\text{Polstelle: } -5 \text{ mit ZW}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$$

$$(k) \quad f(x) = \frac{x^2+x-12}{x^2+6x+8}$$

$$Z = 0: \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$N = 0: \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$$

Nullstellenbedingung:
Polstellenbedingung:

$$\text{Nullstelle } N(3 | 0)$$

$$\text{Polstelle } x_P = -2 \text{ mit ZW}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}$$

Bei $x = -4$ haben Z und N eine gemeinsame Nullstelle, das ergibt für das Schaubild ein Loch. Ausklammern und Kürzen des Faktors $(x+4)$:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+4)}{(x+2)(x+4)} = \frac{x-3}{x+2}$$

$$K \text{ hat das Loch } L(-4 | 3,5)$$

$$(l) \quad f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-x-2} = \frac{x(x^2-4)}{x^2-x-2}$$

$$Z = 0: \quad x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$$

$$N = 0: \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$Z = 0$ aber $N \neq 0$
 $N = 0$ aber $Z \neq 0$.

$$\text{Nullstelle } (-2 | 0)$$

$$\text{Polstelle mit ZW: } x_P = -1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$$

Bei $x = 2$ haben Z und N eine gemeinsame Nullstelle. Ausklammern und Kürzen des Faktors $(x-2)$:

$$f(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x(x+2)}{x+1}$$

$$K \text{ hat das Loch } L(2 | \frac{8}{3})$$

(m) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2 - 2x + 1}$ Da der Nenner $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ ist, kann man die

Funktion auch so schreiben:

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = x - 1$$

Dazu gilt aber nach wie vor der ursprüngliche Definitionsbereich.

Der Nenner hatte die doppelte Nullstelle $x = 1$, also gilt auch nach dem Kürzen: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Da $y = x - 1$ die Gleichung einer Geraden ist, besitzt f als Schaubild eine sogenannte punktierte Gerade, also eine Gerade mit dem Loch $L(1 | 0)$.

(n) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

Nullstellen des Zählers: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Probierlösung: $x_1 = 1$. Abspaltung des Linearfaktors $(x - 1)$ mittels

Hornerschema (oder Polynomdivision):

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ x=1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

d.h. man erhält

$$(x-1)(x^2 - x - 2) = 0 \quad \text{mit}$$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Nullstellen des Nenners:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{d.h.} \quad x_{4,5} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \quad \text{also} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$$

Zähler und Nenner haben somit die gemeinsamen Nullstellen 1 und 2.

Also kann man aus beiden die Faktoren $(x-1)(x-2)$ abspalten und

wegkürzen:
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = x + 1$$

Wir haben eine ähnliche Situation wie in der Lösung zuvor:

Das Schaubild ist jetzt eine zweifach punktierte Gerade mit der Gleichung

$y = x + 1$ und den Löchern bei 1 und 2, d.h. $L_1(1 | 2)$, $L_2(2 | 3)$, denn der ursprüngliche Definitionsbereich gilt auch für diese gekürzte Funktion!

(o) $f(x) = \frac{x-6}{x^2 + 4x + 6}$

$Z = 0: \quad x = 6.$

$N = 0: \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{2} \notin \mathbb{R}$

d.h. der Nenner hat keine Nullstellen.

Daher gilt auch $D = \mathbb{R}$.

Nullstelle der Funktion: $N(6 | 0)$.

(p) $f(x) = \frac{x-4}{x^2 - 8x + 16}$

$Z = 0: \quad x = 4$

$N = 0: \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-4)^2} = \frac{1}{x-4}$$

Zähler und Nenner haben eine gemeinsame Nullstelle. Damit erwartet man ein Loch im Schaubild. Weil aber die Nullstelle im Nenner doppelt auftritt, bleibt der Faktor $x-4$ nach dem Kürzen im Nenner erhalten, so dass wir doch eine Polstelle haben! $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$