Analysis

Gebrochen rationale Funktionen

GRUNDEIGENSCHAFTEN

Definitionsbereich
Stetigkeit
Polstellen
Asymptoten
Schaubilder

Teil 1

Datei Nr. 43011

Stand 21. August 2006

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

INHALTSVERZEICHNIS

§1 Form gebrochen rationaler Funktionen

Die Gleichungen gebrochen rationaler Funktionen können in ganz unterschiedlichen Formen dargestellt sein. Hier einige Beispiele:

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x^2+9} \qquad f_2(x) = x^2 - \frac{8}{x} \qquad f_3(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-2}$$

Während die erste Funktionsgleichung schon die "normale Form" hat, in der alles mit einem Bruchstich dargestellt wird, bestehen die beiden anderen Funktionsterme aus zwei Summanden. Bringt man diese auf den Hauptnenner, dann haben auch sie die Normalform:

$$f_2(x) = x^2 - \frac{8}{x} = \frac{x^3-8}{x}$$

$$f_3(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-2} = \frac{2(x-2)+4(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-4+4x+8}{x^2-4} = \frac{6x+4}{x^2-4}$$

Definition:

Eine Funktion, die man auf diese Form (Normalform) bringen kann, heißt **gebrochen rational**:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_o}$$

Man nennt den größten Exponenten m im Zähler den **Grad** des Zählers und den höchsten vorkommenden Exponenten n im Nenner den Grad des Nenners. Das Zählerpolynom u(x) hat also den Grad m, das Nennerpolynom den Grad n. Die Differenz **m - n** ist der sogenannte **Asymptotengrad**

Von den oben angeschriebenen Funktionen hat

- f_1 den Zählergrad 2, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad 0.
- f_2 den Zählergrad 3, den Nennergrad 1 und den Asymptotengrad 2
- f_3 den Zählergrad 1, den Nennergrad 2 und den Asymptotengrad -1

Ist nun die Funktion f mit $f_4(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 4x + 1$ auch gebrochen rational ?
Sie ist von der Form her eine ganzrationale Funktion. Schreiben wir jedoch

$$f_4(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + x^2 - 4x + 1 = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 4x + 1}{1} ,$$

dann können wir sie *auch* gebrochen rational nennen, denn auch sie hat ein Nennerpolynom: v(x) = 1 . Dieses hat den Grad 0. Streng genommen sind also auch sämtliche ganzrationale Funktionen (uneigentliche) gebrochen rationale Funktionen. Weil diese unter den typischen, auf den folgenden Seiten zu untersuchenden Funktionen jedoch nicht vorkommen, schließen wir sie hier aus !

Grundaufgabe

Termumformungen von der aufgespaltenen Form in die Normalform und umgekehrt

1. Fall: Der Nenner enthält keine Summe

a) $f(x) = 2 - \frac{3}{x} = \frac{2x-3}{x}$

b) $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x} = \frac{(x+1)\cdot x + 4}{x} = \frac{x^2 + x + 4}{x}$

c) $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{(x-1)\cdot x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^4 + 4}{2\cdot x^2}$

Treten in beiden Summanden Brüche auf, wird der Hauptnenner gebildet.

e) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{4}{x} = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{4}{x} = \frac{x^2 + 2x - 16}{4x}$

Umkehrung

f) $f(x) = \frac{2x-4}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{4}{x} = 2 - \frac{4}{x}$

g) $f(x) = \frac{x+8}{4x} = \frac{x}{4x} + \frac{8}{4x} = \frac{1}{4} + \frac{2}{x}$

h) $f(x) = \frac{x^2-9}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{9}{x} = x - \frac{9}{x}$

i) $f(x) = \frac{x^2+4}{2x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$

j) $f(x) = \frac{x^3-8}{4x} = \frac{x^3}{4x} - \frac{8}{4x} = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{x}$

k) $f(x) = \frac{x^3+x^2-4}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = x + 1 - \frac{4}{x^2}$

l) $f(x) = \frac{x^4-4}{8x^2} = \frac{x^4}{8x^2} - \frac{4}{8x^2} = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2x^2}$

Aufgaben

(1) Bringe auf die Normalform: f(x) =

(a) $4 - \frac{3}{x}$ (b) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{x}$ (c) $x + 2 - \frac{4}{x}$ (d) $\frac{1}{4}x - \frac{4}{x^2}$ (e) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x}$

(2) Zerlege so weit wie möglich

(a) $\frac{x+4}{8x}$ (b) $\frac{3x-4}{2x^2}$ (c) $\frac{4x+6}{3x}$ (d) $\frac{x^3-12x^2+4}{4x^2}$ (e) $\frac{x^4-64}{4x^2}$

Die Lösungen stehen auf Seite 36 in 43012

2. Fall: Der Nenner enthält eine Summe

a) $f(x) = 2 - \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$

b) $f(x) = -1 + \frac{18}{x^2+9} = \frac{-(x^2+9)+18}{x^2+9} = \frac{-x^2+9}{x^2+9}$

c) $f(x) = x + \frac{4}{x+2} = \frac{x(x+2)+4}{x+2} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

d) $f(x) = x + 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-1)^2-2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x^2-2x+1)-2}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^3-2x^2+x+x^2-2x+1-2}{(x-1)^2} = \frac{x^3-x^2-x-1}{(x-1)^2}$

Hinweis: Nennerquadrate sollte man nie ausmultiplizieren!

Umkehrung

Um einen Bruch zu zerlegen, der im Nenner eine Summe enthält, muss man mit Polynomdivision arbeiten!

e) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

also gilt $f(x) = 1 - \frac{3}{x+1}$

$$\begin{array}{l} (x-2):(x+1) = 1 \\ \underline{-(x+1)} \\ \quad -3 \end{array}$$

Ein Division geht bei solchen Aufgaben in der Regel nie auf, d.h. es bleibt ein Rest übrig, den man nicht mehr teilen kann. Dieser taucht dann im Zähler des Restbruches auf, hier die Zahl - 3, das Minus wurde dann vor den Bruch gezogen.

f) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-2}$

also $f(x) = x + 2 - \frac{5}{x-2}$

$$\begin{array}{l} (x^2+0x-9):(x-2) = x+2 \\ \underline{-(x^2-2x)} \\ \qquad 2x-9 \\ \quad \underline{-(2x-4)} \\ \qquad\ -5 \end{array}$$

g) $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x-1}$

also $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x-1}$

$$\begin{array}{l} (x^3+0x^2-x+1):(x-1) = x^2+x \\ \underline{-(x^3-x^2)} \\ \qquad x^2-x \\ \quad \underline{-(x^2-x)} \\ \qquad\quad 0+1 \end{array}$$

h) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+1}$

also $f(x) = x + 2 - \frac{x}{x^2+1}$

$$\begin{array}{l} (x^3+2x^2+0x+2):(x^2+1) = x+2 \\ \underline{-(x^3+\qquad x)} \\ \qquad 2x^2-x \\ \quad \underline{-(2x^2\qquad +2)} \\ \qquad\quad -x \end{array}$$

Aufgaben

Nr. 3. Zerlege durch Polynomdivision in Einzelbrüche: f(x) = . . .

(a) $\frac{4x+1}{x+2}$ (b) $\frac{2x^2+x}{2x-1}$ (c) $\frac{x^2-1}{x^2+4}$ (d) $\frac{x^3+4x+4}{x^2+4}$ (e) $\frac{x^3+6x}{2x^2+8}$

Lösungen auf Seite 36

Hinweis:

Nicht zu früh mit der Division aufhören !!

Man entdeckt sehr schnell, dass eine solche Zerlegung in einen ganzrationalen Anteil und einen echt gebrochenen Anteil (mit Zählergrad < Nennergrad) nur dann möglich ist, wenn der Zählergrad mindestens so groß ist, wie der Nennergrad.

So enthält beispielsweise die Funktion f mit $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+16}$ keinen ganzrationalen Anteil, denn diese Division kann gar nicht erst begonnen werden!
Andererseits ist eine Polynomdivision bei einer solchen Rechnung auch erst dann zu Ende, wenn der verbleibende Rest im Grad kleiner ist als der Nenner.

Beispiel:

$$f(x)=\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+2}$$

$$\begin{array}{l} (x^4+3x^2+6):(x^2+2)=x^2 \\ \underline{-(x^4+2x^2)} \\ \qquad\quad x^2+6 \end{array}$$

Nebenstehende Division führt zum Ergebnis

$$f(x)=x^2+\frac{x^2+6}{x^2+2}.$$

Dies ist aber nicht das Endergebnis, denn die Division kann noch einen Schritt weitergeführt werden:

$$\begin{array}{l} (x^4+3x^2+6):(x^2+2)=x^2+1 \\ \underline{-(x^4+2x^2)} \\ \qquad\quad x^2+6 \\ \qquad\underline{-(x^2+2)} \\ \qquad\qquad 4 \end{array}$$

Damit lautet das Ergebnis dann

$$f(x)=x^2+1+\frac{4}{x^2+2}$$

Eine Division ist also erst dann zu Ende, wenn der Rest eine kleinere Hochzahl hat als der Nennerterm !

§ 2 Stetigkeit gebrochen rationaler Funktionen

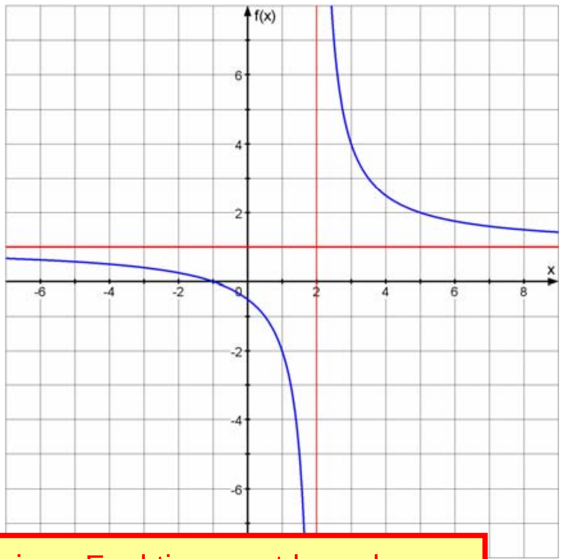
Zum Begriff der Stetigkeit gibt es eine ganz anschauliche Beschreibung:

> Eine stetige Funktion hat die Eigenschaft, daß man ihr Schaubild ohne abzusetzen zeichnen kann

Das Problem ist jedoch: Wie weist man bei einer Funktion nach, dass sie stetig ist, bzw. wie weiß man, wo eine Funktion nicht stetig ist.
Diese Stetigkeitsbeweise sind tückisch und sehr aufwendig. Dies überlassen wir den Fachlehrern im Unterricht. Hier nehmen wir nur die Ergebnisse zur Kenntnis.

> Eine gebrochen rationale Funktion ist nur dort nicht stetig, wo der Nenner Null wird.

Wir schauen uns drei Beispiele an.



Beispiel 1: $\boxed{f(x) = \frac{x+1}{x-2}}$

Der Nenner hat die Nullstelle 2. Und zu 2 gibt es keinen Funktionswert:

$f(2) = \frac{3}{0}$ ist kein Zahlenwert.

Da man durch Null nicht dividieren kann, gibt es für die Zahl 2 keinen Funktionswert.

Zu allen anderen Zahlen kann ein Funktionswert berechnet werden.

> Die Menge der Zahlen, zu denen man einen Funktionswert berechnen kann, nennt man den **Definitionsbereich** einer Funktion.
>
> Bei gebrochen rationalen Zahlen besteht dieser aus der Menge aller reellen Zahlen *ohne die Nullstellen des Nenners*.

Unsere Funktion hat also den Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

Innerhalb dieses Definitionsbereiches (der jetzt aus zwei Teilintervallen besteht), ist f stetig.

Gemäß unserer anschaulichen Beschreibung sollte man daher in den Intervallen links von 2 und rechts von 2 die zu f gehörende Kurve ohne abzusetzen zeichnen können. Doch was passiert an der Nullstelle des Nenners ?

Geht man nach der Abbildung, dann scheint die Kurve von links gegen 2 kommend nach unten, genauer nach $-\infty$ zu laufen, während sie bei Annäherung von rechts gegen 2 nach oben, genauer gegen $+\infty$ läuft.
Es gibt zwei Möglichkeiten, dies zu ermitteln.

1. Methode: Erstellung einer Vorzeichentabelle für $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

		-1		2		
$x + 1$	$-$	0	$+$		$+$	x
$x - 2$	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-2}$	$+$		$-$		$+$	

Erklärung: Der Zählerterm stellt in der Form y = x+1 eine Gerade mit der Steigungszahl 1 dar. Ihre Nullstelle ist bei - 1. Von da an steigt die Gerade nach rechts in den Bereich positiver Werte, und nach links hin fällt sie in den Bereich negativer Werte.

Dies wurde in der ersten Zeile der Tabelle symbolisch eingetragen.

In der 2. Zeile steht der Nennerterm x - 2, der in der Darstellung als Gerade seine Nullstelle bei 2 hat und wegen seiner ebenfalls positiven Steigungszahl 1 auch rechts davon positive und links davon negative Werte hat.

Der Funktionsterm entsteht als Division der Zählerwerte durch die Nennerwerte. Dividiert man Zahlen mit gleichem Vorzeichen, dann ist das Ergebnis positiv, dividiert man Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen, wird das Ergebnis negativ. Diese Vorzeichen stehen in der 3. Zeile.

Die Tabelle liefert also das Ergebnis:

Im Intervall $]-\infty;-1]$ ist f(x) > 0. (links von der Nullstelle - 1)

Im Intervall $]-1;2[$ ist f(x) < 0 (zwischen der Nullstelle und 2)

Im Intervall $]2;\infty[$ ist f(x) > 0. (rechts von 2)

Daraus folgert man: Für x gegen 2 von links geht $f(x) \to -\infty$
und für $x \to 2+$ (das Pluszeichen hinter der 2 heißt "von rechts") gilt: $f(x) \to \infty$.

Aber warum gehen die Funktionswerte nun gegen $\pm\infty$???

Wer dies nachweisen soll, kann so vorgehen: (kann übersprungen werden)

2. Methode: "Die Reise mit einer Folge ins Unendliche".

Da bei x = 2 etwas ungewöhnliches passiert, so dass am Ende nicht einmal mehr ein Funktionswert herauskommt, nähern wir uns ganz vorsichtig dieser Stelle 2 an. Als "Fahrzeug" für diese Reise wählen wir eine Zahlenfolge, die genau diese Zahl 2 als Grenzwert hat.

Für die ***Annäherung von links*** her können wir beispielsweise die Folge
$x_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$ wählen. Lassen wir n gegen Unendlich gehen, dann wird der Bruch $\frac{1}{n}$ immer kleiner, und so nähern wir uns der Zahl 2.

Etwa $x_{10} = 2 - \frac{1}{10} = 1{,}9$, $x_{100} = 2 - \frac{1}{100} = 1{,}99$, $x_{1000} = 2 - \frac{1}{1000} = 1{,}999$

Insgesamt ist der Grenzwert dieser Folge 2: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{n}) = 2$

Wir "setzen" uns jetzt gedanklich auf diese Folge und berechnen zu jeder Nummer n den Funktionswert. So nähern wir uns immer weiter der kritischen Zahl 2 an.

Das Folgenglied x_n erhält zunächst einmal diesen Funktionswert:

$$f(x_n) = f(2-\frac{1}{n}) = \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)+1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)-2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = \left(3-\frac{1}{n}\right)\cdot(-n) = -3n+1 = 1-3n$$

Und los geht die Reise:

n=1 :	$x_1 = 2-\frac{1}{1} = 1$	und	$f(x_1) = 1-3 = -2$
n=10:	$x_{10} = 2-\frac{1}{10} = 1{,}9$	und	$f(x_{10}) = 1-30 = -29$
n=100:	$x_{100} = 2-\frac{1}{100} = 1{,}99$	und	$f(x_{100}) = 1-300 = -299$
n=1000:	$x_{1000} = 2-\frac{1}{1000} = 1{,}999$	und	$f(x_{1000}) = 1-3000 = -2999$

Man kann hier aufhören, denn jeder erkennt jetzt, dass diese Folge uns $\to -\infty$ bringt.

Wir haben also das erste Teilergebnis:

$$\text{Wenn } x \to 2- \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$$

Für die ***Annäherung von rechts*** verwenden wir die Folge $x_n = 2+\frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n}$.

Dazu gehört die Folge der Funktionswerte:

$$f(x_n) = f(2+\frac{1}{n}) = \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)+1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)-2} = \frac{3+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot n = 3n+1$$

Und nun gehen wir auf die Reise "Annäherung gegen 2 von rechts mittels x_n ":

n=1 :	$x_1 = 2+\frac{1}{1} = 3$	und	$f(x_1) = 3+1 = 4$
n=10:	$x_{10} = 2+\frac{1}{10} = 2{,}1$	und	$f(x_{10}) = 30+1 = 31$
n=100:	$x_{100} = 2+\frac{1}{100} = 2{,}01$	und	$f(x_{100}) = 300+1 = 301$
n=1000:	$x_{1000} = 2+\frac{1}{1000} = 2{,}001$	und	$f(x_{1000}) = 3000+1 = 3001$

Wir sehen, dass x immer kleiner wird und gegen 2 geht, und die zugehörigen Funktionswerte nehmen zu: Wenn $x \to 2 \Rightarrow f(x) \to \infty$

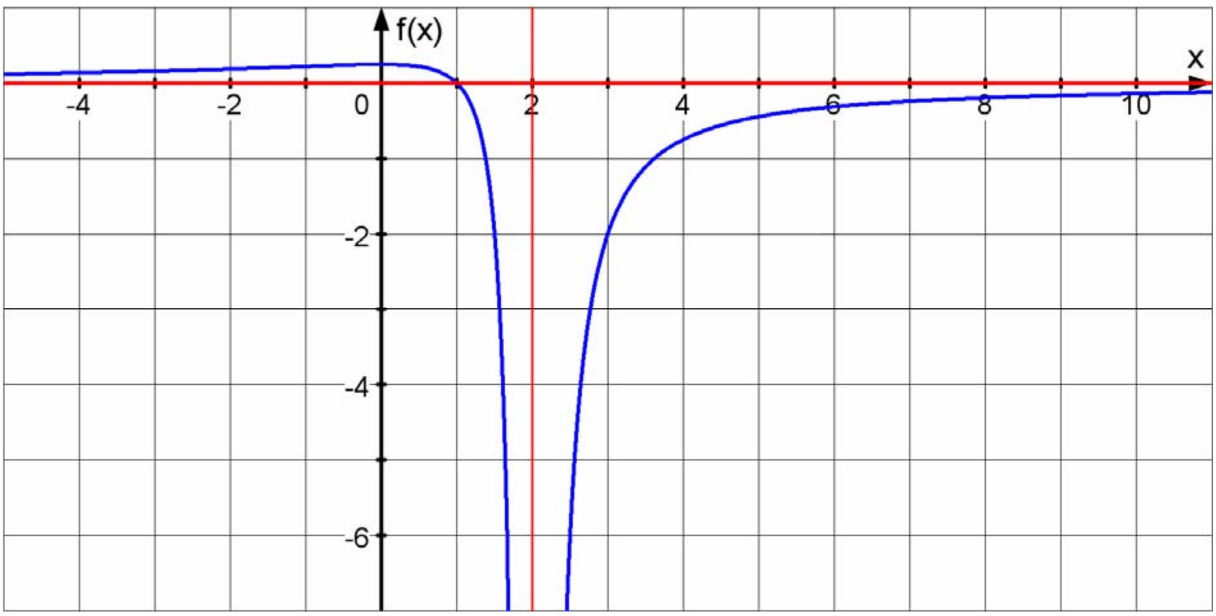
Definition:
Gehen die Funktionswerte bei Annäherung an eine Stelle a gegen ∞ oder $-\infty$, dann heißt a eine **Polstelle**.

Es liegt eine **Polstelle mit Zeichenwechsel** vor, wenn f auf der einen Seite gegen $+\infty$ und auf der anderen Seite gegen $-\infty$ geht.

Wir haben also herausgefunden, dass unsere Funktion f bei 2 eine Polstelle mit Zeichenwechsel hat.

Zur Lösung von Abituraufgaben ist dieser Weg mit den Folgen nicht notwendig. Eine solche Rechnung dient nur der Einsicht und der Anschaulichkeit. Wir haben durch Verwendung der Folgen tatsächlich Zahlen erhalten, die den Verlauf nach ∞ bzw. $-\infty$ algebraisch aufzeigen. (Das Argument "die Zeichnung zeigt das doch auch" gilt nicht, denn diese Zeichnung muss ja erst einmal erstellt werden!).

Beispiel 2: $f(x) = \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$



Das Schaubild dieser Funktion wurde nun in "Originalgröße" dargestellt. Man erkennt sofort, dass hier eine Polstelle vorliegt, die aber jetzt keinen Zeichenwechsel hat.

Wer eine weitere Übung mit einer Folge sehen möchte, kann den Abschnitt auf der folgenden Seite durchlesen.

Das Ergebnis, das man natürlich (unerlaubterweise einmal) an der Zeichnung ablesen kann, lautet: Für $x \to 2 \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$.

Der Grund dafür, dass hier eine Polstelle ohne Zeichenwechsel vorliegt, ist die Tatsache, dass der Nenner bei 2 eine doppelte Nullstelle hat. Damit entfällt dort der Zeichenwechsel. Wir sprechen in einem solchen Fall von einer Polstelle 2. Grades oder 2. Ordnung.

Einschub: **Pol-Untersuchung mit Zahlenfolgen**

Wir wählen wieder die beiden Folgen von Beispiel 1, denn genau wie dort liegt die Nullstelle des Nenners an der Stelle 2.

Annäherung von links bzw. rechts gegen 2 mit den Folgen $x_n = 2 \pm \frac{1}{n}$

Zugehöriger Funktionswert:

$$f\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(\left(2-\frac{1}{n}\right)-2\right)^2} = \frac{-1+\frac{1}{n}}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{-1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \left(-1+\frac{1}{n}\right)\cdot n^2 = -n^2+n = -n(n-1)$$

Für n gegen Unendlich nähern sich beide Folgen der Zahl 2 an. Die Funktionswerte gehen beide gegen $-\infty$, wie man durch Einsetzen von Zahlen sieht:

$$f(x_{100}) = f(2-\frac{1}{100}) = -100\cdot(100-1) = -100\cdot 99 = -9900$$

Bei Annäherung von rechts erhält man

$$f\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)-2\right)^2} = \frac{-1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{-1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \left(-1-\frac{1}{n}\right)\cdot n^2 = -n^2-n = -n(n+1)$$

$$f(x_{100}) = f(2+\frac{1}{100}) = -100\cdot(100+1) = -100\cdot 101 = -10100$$

Natürlich kann man auch durch einen kurzen Beweis nachrechnen, dass in beiden Fällen $f(x_n) \to -\infty$ geht. Doch das will ich hier nicht dem Unterricht wegnehmen!

Wer dieser Rechnung folgen konnte, der hat zumindest eine Einsicht davon bekommen, dass wir hier eine Funktion mit einer Polstelle haben, an der es keinen Zeichenwechsel gibt.

Das Ergebnis lautet so: Für $x \to 2 \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$

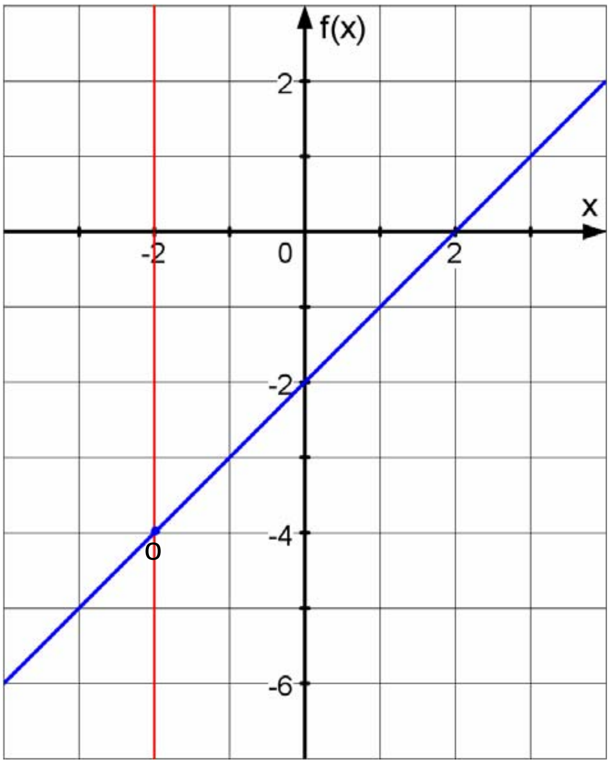
Wer dieses ***Vorzeichenverhalten mit einer Vorzeichentabelle untersuchen*** will, erhält in der 2. Zeile des Nenners wegen $(x-2)^2$ nur positive Vorzeichen, daher tauchen für die Funktion links und rechts von 2 nur negative Vorzeichen auf.

		1		2		x
1 - x	+	0	−		−	
$(x-2)^2$	+		+	0	+	
$\frac{x+1}{x-2}$	+		−		−	

Achtung in der 1. Reihe: Der Zählerterm 1 - x hat eine negative Steigung. Daher hat er rechts von seiner Nullstelle 1 negative Werte und links davon positive!

Beispiel 3:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$



Zunächst einmal vermutet der Leser auf den ersten Blick, dass hier ein Fehler vorliegen sollte, denn das Schaubild stellt offenkundig eine Gerade dar.
Diese hat erkennbar die Steigung 1 und schneidet die y-Achse bei -2, also sollte sie die Gleichung y = x - 2 haben.

Der Reihe nach:

Zunächst müssen wir feststellen, dass die Funktion einen Nenner hat, und dieser hat die Nullstelle x = - 2. Daher besitzt f den Definitionsbereich

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$$

Also gibt es zur Zahl - 2 keinen Funktionswert!!!

Nun sollten wir entdecken, dass der Zähler zerlegt werden kann: Bekanntlich ist ja $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, also folgt:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x - 2$$

Hier wurde durch (x+2) gekürzt. Dies ist aber nur dann erlaubt, solange x nicht die Zahl - 2 ist, denn für -2 heißt der Wert $f(-2) = \frac{4-4}{-2+2} = \boxed{\frac{0}{0}}$ und dies ist kein brauchbarer Zahlenwert.

Ergebnis: ***Diese Funktion kann durch Kürzen zu f(x) = x - 2 vereinfacht werden, allerdings muss der ursprüngliche Definitionsbereich D = R \ { - 2 } beibehalten werden.***

Das Schaubild stellt also eine Gerade dar, die aber bei - 2 keinen Punkt hat. Dort befindet sich das Loch L(- 2 I - 4).

Im Schaubild ist dieses Loch im Schnittpunkt der schrägen Geraden mit der Senkrechten x = - 2.

Wir haben somit eine wichtige Erkenntnis gewonnen:

Nicht jede Nullstelle des Nenners führt zu einer Polstelle.

Hier hatten Zähler und Nenner eine gemeinsame Nullstelle, so dass nach dem Kürzen die Nullstelle des Nenners verschwunden war. Dies führte zur Situation "Loch im Schaubild". Aber auch hier gibt es noch eine weitere Variante:

Beispiel 4:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x+2)^2}$$

Nullstellen der Zählers: $x^2 = 4$ also $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

Nullstellen des Nenners: $(x+2)^2 = 0$ d.h. $x = -2$ als doppelte Nullstelle.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x+2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

Nach dem Kürzen des Funktionsterms durch (x + 2) bleibt im Nenner immer noch eine Klammer (x+2) übrig. d.h. jetzt liegt doch wieder eine Polstelle bei - 2 vor.

Übersicht

Gegeben ist eine gebrochen-rationale Funktion in Normalform: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Zuerst bestimmt man die Nullstellen des Zählers und des Nenners.

1. Fall: Zähler und Nenner haben **keine gemeinsamen Nullstellen**:
Dann hat f an jeder Nullstelle des Nenners eine ***Polstelle***.
Tritt eine Nenner--Nullstelle einfach oder dreifach auf, liegt dort ein Pol mit Zeichenwechsel vor .
Tritt eine Nenner-Nullstelle zweifach, vierfach usw. auf, dann gibt es am Pol keinen Zeichenwechsel.

2. Fall: Zähler und Nenner haben **gemeinsame Nullstellen**.
Dann kann man zu jeder Nullstelle a einen Linearterm (x-a) ausklammern und aus Zähler und Nenner wegkürzen.
Dabei muß allerdings der ursprüngliche Definitionsbereich erhalten bleiben! Ist eine solche gemeinsame Nullstelle nach dem Kürzen keine Polstelle, dann tritt sie als Loch im Schaubild auf, da sie ja weiterhin im Definitionsbereich ausgeschlossen ist.

Aufgaben

Nr. 4: Untersuche, welche der genannten Funktionen Pole bzw. Löcher aufweisen. Gib jeweils den Definitionsbereich an: f(x) = ...

(a) $\frac{2x}{x+4}$ (b) $\frac{2x+3}{4x+1}$ (c) $\frac{x^2-9}{x-2}$ (d) $\frac{x+2}{x^2-9}$ (e) $\frac{x}{x^2+16}$ (f) $\frac{x+2}{x^2-6x+9}$

(g) $\frac{x+3}{x^2+4x}$ (h) $\frac{x+3}{x^2-9}$ (i) $\frac{x^2+2x-3}{x+3}$ (j) $\frac{x-2}{x^2+3x-10}$ (k) $\frac{x^2+x-12}{x^2+6x+8}$

(l) $\frac{x^3-4x}{x^2-x-2}$ (m) $\frac{(x-1)^3}{x^2-2x+1}$ (n) $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$ (o) $\frac{x-6}{x^2+4x+6}$

(p) $\frac{x-4}{x^2-8x+16}$

Lösungen auf Seite 37/38 in Datei 43012

§3 Asymptoten

Betreiben wir zuerst Anschauungsunterricht an Hand der gezeigten Funktionen.

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ wurde auf Seite 5 dargestellt. Dort erkennt man, dass sich das Schaubild gleich zwei Geraden nähert. Zum einen hat f die Polstelle x=2.

Und für $x \to 2$ erhielten wir $f(x) \to \pm\infty$. Die Kurve geht also von links aus nach unten und nähert sich dort der Geraden x = 2. Von rechts her nähert sie sich derselben Geraden nach oben.

Eine Gerade, der sich eine Kurve beliebig gut annähert, heißt eine Asymptote

Unser Schaubild hat also die senkrechte Asymptote mit der Gleichung x = 2.

Sie hat, wie die Abbildung zeigt, außerdem die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 1. Dies wird gleich begründet!

2) $f(x) = \frac{1-x}{(x-2)^2}$ wurde auf Seite 8 vorgestellt. Auch sie hat eine Polstelle, sogar ohne Zeichenwechsel, und wie man sieht, hat das Schaubild die senkrechte Asymptote mit der Gleichung x = 2. Auch hier beobachten wir die Existenz einer waagrechten Asymptote, die jetzt die x-Achse ist. Ihre Gleichung: y = 0.

Hat eine **Funktion die Polstelle** a, dann besitzt ihr
Schaubild die senkrechte Asymptote mit der Gleichung x = a.

Bei waagrechten Asymptoten geschieht die Annäherung nach links bzw. rechts. Wir müssen dazu untersuchen, wie sich die Funktion für $x \to \pm\infty$ verhält.

Es soll gleich eine Übersicht gegeben werden. Folgende 4 Fälle müssen wir untersuchen:

1. Fall: Die x-Achse ist waagrechte Asymptote

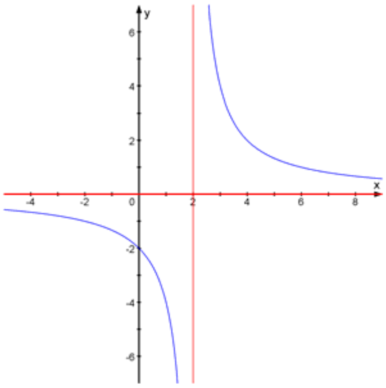
2. Fall: Eine Parallele zur x-Achse ist waagrechte Asymptote

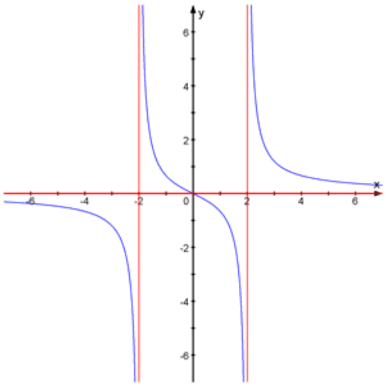
3. Fall: Es gibt eine schräge Asymptote

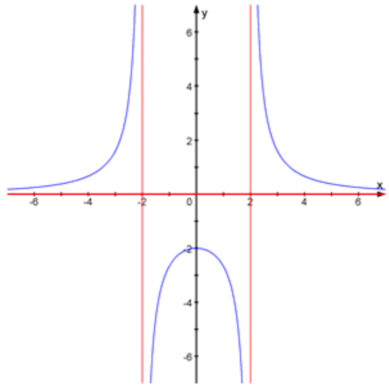
4.Fall: Es gibt eine Näherungskurve, der sich die Kurve annähert.

§ 4 Funktionen mit Asymptotengrad < 0.

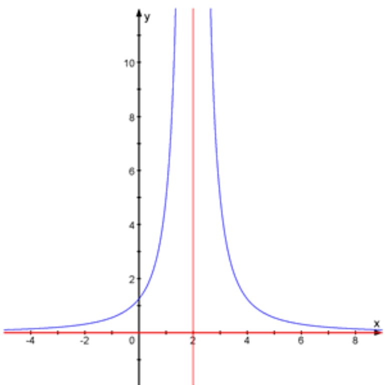
Hier im Voraus die sechs Schaubilder unserer Musteraufgaben:

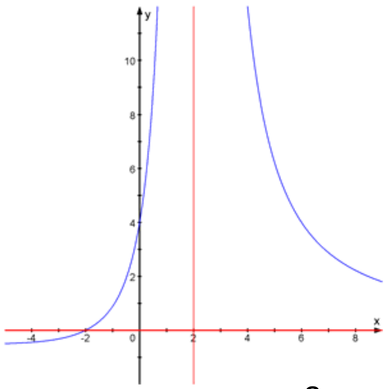


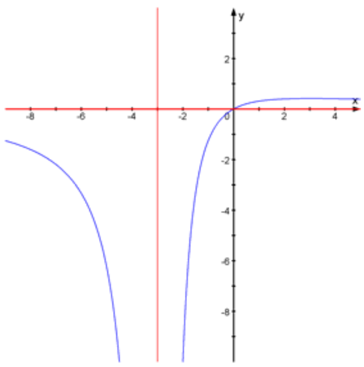




B1: $f(x)=\frac{4}{x-2}$ B2: $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ B3: $f(x)=\frac{8}{x^2-4}$







B4: $f(x)=\frac{5}{(x-2)^2}$ B5: $f(x)=8\frac{x+2}{(x-2)^2}$ B6: $f(x)=\frac{5x}{(x+3)^2}$

Das Kennzeichen dieser 6 Funktionen ist: Der Nennergrad ist größer als der Zählergrad. Durch Subtraktion ergibt dies einen negativen Asymptotengrad. Wie wir an den Abbildungen sehen können, führt dies offenbar stets dazu, dass die x-Achse waagrechte Asymptote wird.

Wenn sich die Kurve nach rechts und links immer dichter der x-Achse annähert, dann gehen die Funktionswerte nach 0. Um dies nun genauer zu untersuchen, berechnen wir die Grenzwerte dieser 6 Funktionen für $x \to \pm\infty$ bzw. für $|x| \to \infty$, was dasselbe bedeutet!

Das angewandte Berechnungsverfahren beruht auf dem Grenzwertsatz für Funktionen. Dieser gestattet es uns, einen Grenzwert aus anderen Grenzwerten zu berechnen. Zuvor müssen wir aber unsere Bruchterme dadurch umformen, dass wir **durch die höchste x-Potenz des Nenners kürzen.**

Damit entstehen neue Zähler und Nenner, die ihrerseits jetzt für $|x| \to \infty$ einen Grenzwert aufweisen, so dass der Bruch auch einen Grenzwert erhält. Ohne diesen Kürzungsprozess würden die Nenner keinen endlichen Grenzwert haben.

Berechnung der Funktionsgrenzwerte für $|x| \to \infty$

B1: $$\lim_{|x|\to\infty} \frac{4}{x-2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2}{x}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Damit ist gezeigt, dass y = 0 die Gleichung der waagrechten Asymptote ist.

B2: $$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Ergebnis: Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 0.

B3: $$\lim_{|x|\to\infty} \frac{8}{x^2-4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{8}{x^2}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Ergebnis: Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 0.

B4: $$\lim_{|x|\to\infty} \frac{5}{(x-2)^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{5}{x^2-4x+4} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{5}{x^2}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x}+\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0-0} = 0$$

Ergebnis: Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 0.

B5: $$\lim_{|x|\to\infty} 8\frac{x+2}{(x-2)^2} = \lim_{|x|\to\infty} 8\frac{x+2}{x^2-4x+4} = 8\lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} = 8\cdot 0 = 0$$

Ergebnis: Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 0.

B6 $$\lim_{|x|\to\infty} \frac{15x}{(x+3)^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{15x}{x^2+6x+9} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{15}{x}}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{15}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{4}{x}+\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Ergebnis: Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 0.

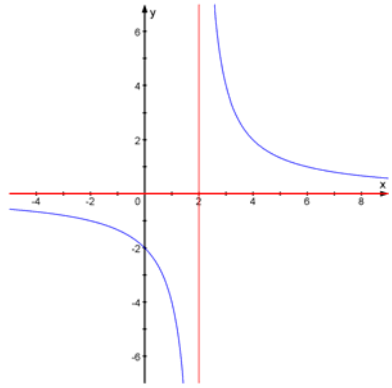
Hinweise auf Formulierungsfehler:

Falsch ist folgender Text: Die Funktion hat die waagrechte Asymptote ....

Eine Funktion hat keine Asymptote, sondern den Grenzwert 0. Eine Asymptote gehört zum Schaubild, das sich an die Asymptote annähert. Daher muss es immer heißen: Das Schaubild (K von f) hat die waagrechte Asymptote .... usw.

So halbwegs falsch ist die etwas lässige Formulierung:
Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote y = 0.
Falsch daran ist, dass y = 0 eigentlich keine Asymptote ist, sondern nur die Gleichung dieser Asymptoten! Es ist also eine Definitionsfrage, ob man diese lässige Sprechweise zulässt.

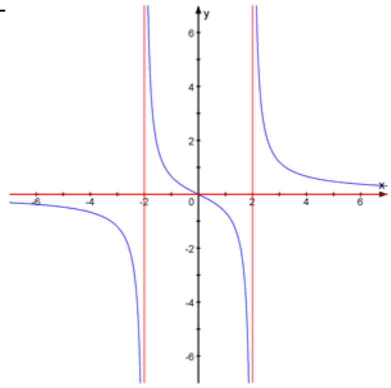
Analyse der 6 Musterbeispiele B1 bis B6:



B1: $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$ Der Zähler ist konstant und hat daher keine Nullstellen.
Nullstelle des Nenners: x = 2 daher Definitionsbereich $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{2\}$

f hat also bei x = 2 eine Polstelle mit Zeichenwechsel, folglich hat das Schaubild K die senkrechte Asymptote x = 2.

Da $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{4}{x-2}=\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{2}{x}}=\dfrac{0}{1-0}=0$ hat K die waagrechte Asymptote y = 0. Außerdem ist das Schaubild punktsymmetrisch zum Schnittpunkt der Asymptoten: S (2 I 0). Dies wird auf Seite 33 bewiesen.



B2: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$ Zähler = 0: x = 0;

Nenner = 0: $x=\pm 2$. $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{\pm 2\}$

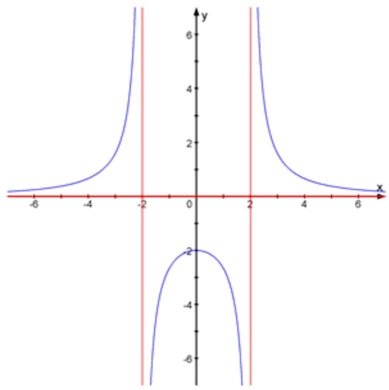
Das Schaubild schneidet folglich die x-Achse in der Nullstelle (0 I 0) und f hat die Polstellen x = 2 und x = - 2 jeweils mit Zeichenwechsel.

K hat daher die senkrechten Asymptoten mit den Gleichungen x = 2, x = - 2.

Außerdem ist die x-Achse waagrechte Asymptote, denn es gilt:

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{2x}{x^2-4}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{2}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung (siehe Seite 33).



B3: $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$ Der Zähler hat keine Nullstelle,

Nullstellen des Nenners: $x=\pm 2$

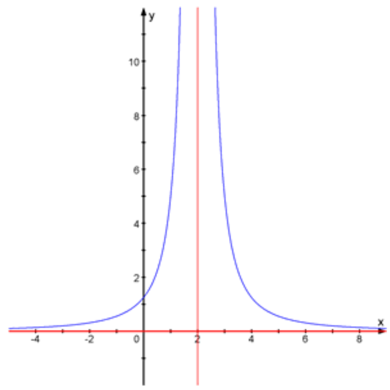
$\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{\pm 2\}$!

Das Schaubild hat daher keine Nullstellen.
Da f die beiden Polstellen x = 2 und x = - 2 (jeweils mit Zeichenwechsel) hat, besitzt K die senkrechten Asymptoten x = 2 und x = - 2.
K hat die waagrechte Asymptote y = 0, denn

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{8}{x^2-4}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{\frac{8}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{8}{x^2}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

Hier ist das Schaubild symmetrisch zur y-Achse (Seite 33).

B4: $f(x)=\dfrac{5}{(x-2)^2}$ Der Zähler besitzt keine Nullstellen, der Nenner jedoch die doppelte Nullstelle x = 2.



Daher ist 2 eine Polstelle ohne Zeichenwechsel.

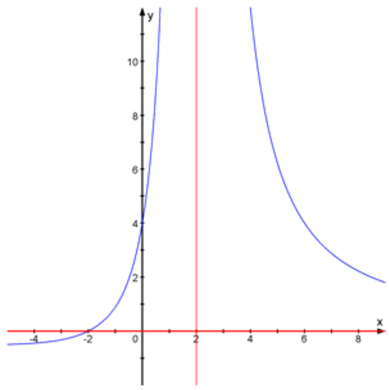
$\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{2\}$

Auf Grund der Polstelle ist x = 2 eine senkrechte Asymptote von K. Ferner ist die x-Achse waagrechte Asymptote, denn es gilt

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{5}{(x-2)^2}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{5}{x^2-4x+4}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{5}{x^2}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0-0}=0$$

Das Schaubild ist symmetrisch zur Geraden x = 2 (siehe Seite 33).

B5: $f(x)=8\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ Nullstelle des Zählers: x = - 2

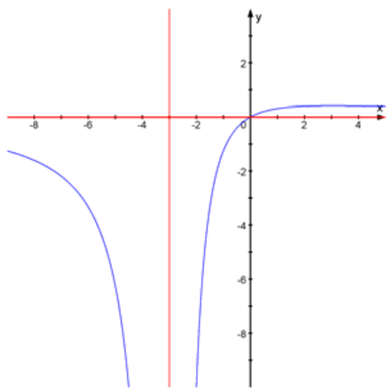


Nullstelle des Nenners: x = 2 also $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{2\}$

f hat die Nullstelle - 2 und die Polstelle 2 **<u>ohne</u>** Zeichenwechsel. Das Schaubild schneidet also die x-Achse im Punkt N (- 2 I 0) und hat die Asymptoten x = 2 (senkrecht) und y = 0 (waagrecht), denn

$$\lim_{|x|\to\infty}8\frac{x+2}{(x-2)^2}=\lim_{|x|\to\infty}8\frac{x+2}{x^2-4x+4}=8\lim_{|x|\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}=0$$

B6: $f(x)=\dfrac{5x}{(x+3)^2}$ Nullstelle des Zählers: x = 0



Nullstelle des Nenners: x = - 3 (doppelt!)

also $\mathbf{D}=\mathbf{R}\setminus\{-3\}$

Die doppelte Nullstelle des Nenners ergibt bei - 3

einen Pol ohne Zeichenwechsel und für K die senkrechte Asymptote x = - 3.

Die Nullstelle des Zählers liefert den Schnittpunkt

mit der x-Achse: N (0 I 0).

Waagrechte Asymptote ist die x-Achse, denn es gilt:

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{5x}{(x+3)^2}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{5}{x^2+6x+9}=\lim_{|x|\to\infty}\frac{\frac{5}{x}}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{5}{x}}{1-\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{|x|\to\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$