

Potenzen mit ganzen Exponenten

Die abgekürzte Multiplikation: $a^n = \underset{n \text{ Faktoren}}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}$ wobei $a \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$

Diese Betrachtung genügt nur für den Einstieg. Wir werden (später) Potenzen mit beliebigen Exponenten (z.B. $n = \sqrt{2}$) kennen lernen, welche nicht mehr mit einer abgekürzten Multiplikation erklärt werden können.

Die Bezeichnungen:

a^n	heisst Potenz
a	heisst Basis
n	heisst Exponent

Der Spezialfall 1: $a^1 = a$

Normalerweise wird der Exponent 1 nicht geschrieben. Bei den Potenzsätzen ist die 1 jedoch wichtig.

Die Potenzsätze: wir unterscheiden 3 Fälle

Gleiche Basis: $a^n \cdot a^m$
Gemäss der abgekürzten Multiplikation gibt es $n + m$ gleiche Faktoren, somit:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} \quad a \neq 0$$

Hier gibt es im Zähler m und im Nenner n gleiche Faktoren. Es kann gekürzt werden:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$$

Es gibt nun drei Fälle

1) $m - n > 0$

Im Zähler sind mehr Faktoren als im Nenner

2) $m - n = 0$

Im Zähler und im Nenner sind gleich viele Faktoren
Es wird alles weggekürzt
Der gekürzte Wert ist 1

$$1$$

3) $m - n < 0$

Im Nenner sind mehr Faktoren vorhanden als im Zähler, der Exponent ist negativ.
Nach dem Kürzen bleibt im Zähler eine 1:

Beispiel:

$$\frac{a^5}{a^8} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$$

Nach dem Potenzsatz gilt aber auch

$$\frac{a^5}{a^8} = a^{5-8} = a^{-3} \quad \text{Somit gilt:}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} \quad a \neq 0$$

Allgemein:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad a \neq 0$$

Gleicher Exponent:

$$a^n \cdot b^n$$

Es gibt gleich viele Faktoren a und b:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$$

Im Zähler und Nenner sind gleich viele Faktoren:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n \quad b \neq 0$$

Potenzieren einer Potenz

$$(a^m)^n$$

Beispiel:

$$(a^3)^4 = (a \cdot a \cdot a)^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a)$$

Es hat 3 mal 4 gleiche Faktoren:

$$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$$

Allgemein:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Übertragen Sie nun alle Potenzsätze in Ihre Formelsammlung.

Die Klammern (1):

$$(-a)^n \neq -a^n$$

$$(-a)^n = [(-1)(a)]^n = (-1)^n \cdot (a)^n$$

für gerade n gilt:

$$(-a)^n = a^n$$

n gerade

für ungerade n gilt:

$$(-a)^n = -a^n$$

n ungerade

Die Klammern (2):

$$(ka)^n = k^n a^n$$

$$k \cdot a^n \neq (k \cdot a)^n$$

Die Klammern (3):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \quad b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Übertragen Sie auch diese Regeln in Ihre Formelsammlung.

Besuchen Sie den Abschnitt über Potenzen im Bereich e-Learning auf meiner Homepage <http://www.johnny.ch/ot>