Integration von Produkten

Anwendungsbeispiel:

$u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t)$ sinusförmige Wechselspannung

$i(t) = I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ sinusförmige Wechselstrom, die Phasenverschiebung wird durch die Bauteile bestimmt (R, L, C)

$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot (I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi))$ $p(t) = U \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

Berechnung der elektrischen Arbeit: $W = P \cdot t$

Mit der Integralrechnung:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\, dt = U \cdot I \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\, dt$$

$$W = P \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\, dt = P \cdot \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t)\, dt$$

Problemstellung: Wie erfolgt die Integration von Produkten?

Nach der Produktregel zum differenzieren von Produkten gilt:

f ' = u' * v + u* v ' für: $f = u \cdot v$

Damit gilt dann:

$$\int \frac{d}{dx} f(x)\, dx = \int 1\, dy = y = f(x) = u(x) \cdot v(x) = \int \left(\frac{d}{dx} u(x)\right) \cdot v(x)\, dx + \int u(x) \cdot \frac{d}{dx} v(x)\, dx$$

Wir stellen um:

$$\boxed{\int u(x) \cdot \frac{d}{dx} v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int \left(\frac{d}{dx} u(x)\right) \cdot v(x)\, dx}$$

Haben wir mit diesem "Ergebnis" einen Fortschritt erzielt???? Auf der rechten Seite ist immer noch ein Integralausdruck. Die Integration ist nur teilweise (partiell) durchgeführt worden. Die Integration von Produkten (**Produktintegration**) wird daher auch als **partielle Integration** bezeichnen.

Anwendungsbeispiel:

$$\int \ln(x)\, dx = \int \ln(x) \cdot 1\, dx = \blacksquare$$ Wie geht's weiter?????

Wir setzen: $u(x) = \ln(x)$ $\frac{d}{dx} u(x) = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} v(x) = 1$ $v(x) = x$

Mit der partiellen Integration erhalten wir:

$$\int \ln(x)\, dx = \int \ln(x) \cdot 1\, dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = \ln(x) \cdot x - \int 1\, dx = \ln(x) \cdot x - x \Rightarrow \int \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - x$$