1. Aufg.: Zu untersuchen ist die Funktion f.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 \cdot x}{x^2 + 3 \cdot x + 2}$$

a) Bestimmen Sie den **zugehörigen Defintionsbereich**!
b) Wo hat diese Funktion eine **waagerechte Asymptoten**? Wo könnte der Graph möglicherweise eine **senkrechte Asymptote** bzw. eine **Lücke** haben?
c) Bestimmen Sie durch Rechnung die Achsenschnittpunkte!

zu a) Der **Nenner darf nicht 0 werden** und muss untersucht werden.

Lösungsweg 1:
(mit qE)

$$x^2 + 3 \cdot x + 2 = 0$$

$$x^2 + 3 \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\left| x + \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad -\left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \qquad\qquad \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$x = \frac{-4}{2} = -2$$

Lösungsweg 2:
(mittels Faktorisieren)

$$x^2 + 3 \cdot x + 2 = 0$$

$$(x + 1) \cdot (x + 2) = 0$$

Satz vom Nullprodukt

$$x + 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad x + 2 = 0$$

$$x = -1 \qquad\qquad x = -2$$

D=R \ {-2; -1 }

zu b)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2 \cdot x}{x^2 + 3 \cdot x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2 \cdot x}{x^2 + 3 \cdot x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

Also: **waagerechte Asypmtote bei y=1**

Es soll lt. Aufgabenstellung lediglich festgestellt werden, wo Lücken bzw. Polstellen sein könnten.
Hierzu untersuchen wir den Nenner (N(x)) und den Zähler (Z(x)) einzeln.
Wichtig: Hier ist nicht gefragt, wie das Verhalten für die Funktionswerte an diesen Stellen ist.

$$Z(x) := x^2 + 2 \cdot x \qquad N(x) := x^2 + 3 \cdot x + 2$$

$x_{01} := -2$ $\quad Z(x_{01}) = 0$ $\quad N(x_{01}) = 0$ $\quad$ => Lücke bei x_{01}

$x_{01} := -1$ $\quad Z(x_{01}) = -1$ $\quad N(x_{01}) = 0$ $\quad$ => Polstelle (senkrechte Asymptote) bei x_{02}

zu c) y-Achse (**x=0**) : $f(x) := \frac{x^2 + 2 \cdot x}{x^2 + 3 \cdot x + 2}$ $\quad f(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0}{0^2 + 3 \cdot 0 + 2} = \frac{0}{2} = 0$ $\quad$ Sy $\quad f(0) = 0$

x-Achse (**y=f(x)=0**):

$$f(x) := \frac{x^2 + 2\cdot x}{x^2 + 3\cdot x + 2}$$

$$0 = \frac{x^2 + 2\cdot x}{x^2 + 3\cdot x + 2}$$ mit **dem Nenner multipliziert**!!!!!!

$$0\cdot\left(x^2 + 3\cdot x + 2\right) = x^2 + 2\cdot x$$

$$0 = x^2 + 2\cdot x$$

Lösungsweg 1:
(mit qE)

$$1^2 = x^2 + 2\cdot x + 1^2$$

$$1 = (x+1)^2$$

$$1 = |x+1|$$

$1 = (x+1)$ oder $1 = -(x+1)$

$x = 0$ $\qquad$ $-1 = x + 1$

$x = -2$

Lösungsweg 2:
(mittels Faktorisieren (einfach))

$$0 = x^2 + 2\cdot x = x\cdot(x+2)$$

Satz vom Nullprodukt

$x = 0$ oder $x + 2 = 0$

$x = -2$ ist k**ein Element** des D

Sx(0|0) = Sy (0|0)

Neue Funktion: $f_2(x) = \frac{x^2 + 2\cdot x}{x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x}$

d) Wie ist das Verhalten des Graphen für:

$$g = \lim_{x\to -2} \frac{x^2 + 2\cdot x}{x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x} \quad \text{und } g = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 2\cdot x}{x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x} \quad \text{und } g = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x}{x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x}$$

e) Wo hat diese Funktion eine waagerechte Asymptote?

f) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f_2 unter Berücksichtigung der ermittelten Eigenschaften!

$$f_2(x) := \frac{x^2 + 2\cdot x}{x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x}$$

Bemerkung: Auch hier darf der Nenner nicht gleich 0 werden.
Wir faktorisieren den Nenner (oder Lösen eine Gleichung 3. Grades).
War hier aber nicht notwendig, da die zu untersuchenden Stellen vorgegeben waren!!!!

$$x^3 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x = x\cdot\left(x^2 + 3\cdot x + 2\right) = x\cdot(x+1)\cdot(x+2) = 0$$ Faktorisieren, wie oben!!!!

Satz vom Nullprodukt

$x = 0$ oder $x + 1 = 0$ oder $x + 2 = 0$

$x = -1$ $\qquad$ $x = -2$

Somit nachfolgende Stellen zu untersuchen, die nicht im Definitionsbereich liegen.
Wichtig zudem, an diesen Stellen wird der Nenner immer 0.

Wichtig: Wir hatten uns darauf verständigt, das Verhalten mit dem TR zu klären. Es wurde auf ein formales Vorgehen verzichtet. Mit dem TR prüfen wir, wie sich in nahen Umfeld der Funktionswert verhält.

Dazu haben wir eine solches Umfeld mit +0,001 (rechtsseitig) und -0,001 (linksseitig) festgelegt.

zu d)

$x_{01} = -2$

$$f_2(-2-0.001) = f(-2.001) = \frac{(-2.001)^2 + 2\cdot(-2.001)}{(-2.001)^3 + 3\cdot(-2.001)^2 + 2\cdot(-2.001)} = -0.999 \to -1$$

$$f_2(-2+0.001) = f(-1.999) = \frac{(-1.999)^2 + 2\cdot(-1.999)}{(-1.999)^3 + 3\cdot(-1.999)^2 + 2\cdot(-1.999)} = -1.001 \to -1$$

=> **Lücke** bei L(-2 | -1)

$x_{01}=1$

$$f_2(-1-0.001)=f(-1.001)=\frac{(-1.001)^2+2\cdot(-1.001)}{(-1.001)^3+3\cdot(-1.001)^2+2\cdot(-1.001)}=-1\cdot10^3$$ ~ - unendl

=> **Polstelle** mit VZW bei x=-1

$$f_2(-1+0.001)=f(-0.999)=\frac{(-0.999)^2+2\cdot(-0.999)}{(-0.999)^3+3\cdot(-0.999)^2+2\cdot(-0.999)}=1\cdot10^3$$ ~ + unendl.1

$x_{01}=0$

$$f_2(0-0.001)=f(-0.001)=\frac{(-0.001)^2+2\cdot(-0.001)}{(-0.001)^3+3\cdot(-0.001)^2+2\cdot(-0.001)}=1.001$$ ~ 1

=> **Lücke** bei L(0 | 1]

$$f_2(0+0.001)=f(0.001)=\frac{(0.001)^2+2\cdot(0.001)}{(0.001)^3+3\cdot(0.001)^2+2\cdot(0.001)}=0.999$$ ~ 1

zu e)

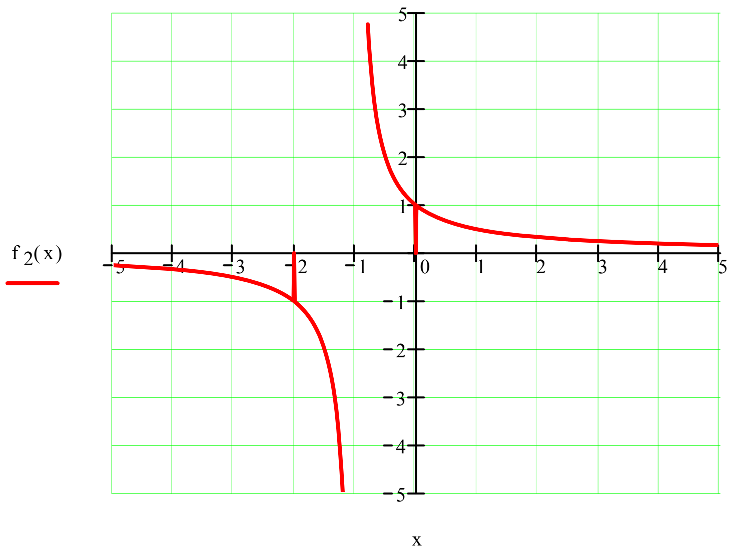
Zur Erinnerung: **Waagerechte Asymptoten** sind immer mit x-> +/- unendlich zu klären:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2\cdot x}{x^3+3\cdot x^2+2\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0+0}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2\cdot x}{x^3+3\cdot x^2+2\cdot x} \text{ vereinfachen } \to 0$$ wie oben!!!!

waagerechte Asymptote bei y=0

zu f)



Hinweis: Lücken beachten

2. Aufg.: Von einer Funktion f ist bekannt, dass eine waagerechte Asymptote bei y= 4, eine senkrechte Asymptote (Polstelle) bei x= -3 und bei x= 4 eine Lücke vorliegt. Geben Sie eine mögliche Zuordnungsvorschrift an, die diese Merkmale besitzt.

Überlegungen: Bei x= -3 und x = 4 muss der Nenner 0 werden!!!!!

Also: $$f(x)=\frac{\blacksquare}{(x+3)\cdot(x-4)}$$

Bei x=4 soll eine Lücke existieren, d.h.: bei x=4 muss auch der Zähler 0 werden.

Also: $$f(x)=\frac{\blacksquare\cdot(x-4)}{(x+3)\cdot(x-4)}$$

Wenn eine waagerechte Asymptote bei y=4 existieren soll, haben wir zwei Möglichkeiten:

Also: $f_1(x) := \dfrac{4 \cdot x \cdot (x-4)}{(x+3)\cdot(x-4)}$ oder $f_2(x) = \dfrac{a\,(x-4)}{(x+3)\cdot(x-4)} + 4$ wobei a bel. aber ungleich 0 sein kann

Wichtig hier: Der Zähler- und Nenner-grad muss gleich sein und angepasst werden

Z.B. mit a=1: $f_2(x) := \dfrac{(x-4)}{(x-4)\cdot(x+3)} + 4$