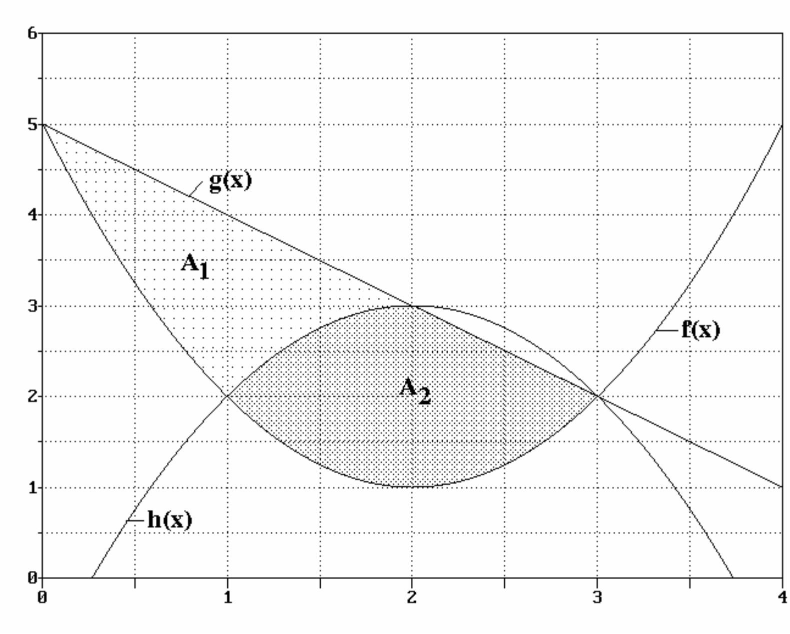
Aufgabe: (Buch Seite 47, 12a) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f, g und h!

1. Skizze erstellen:



Entsprechend der Aufgabenstellung soll die Fläche von den **drei** Funktionen begrenzt sein. Daraus folgt dann aber, daß zwei verschiedene Flächen möglich sind, A_1 und A_2. Diese Flächen müssen getrennt betrachtet werden, denn $A=A_1+A_2$ wird nur von **zwei** Flächen begrenzt!

Aus der Skizze sind die zu berechnenden Schnittpunkte ersichtlich. Diese müssen berechnet werden, obwohl sie aus der Skizze als ganzzahlige x-Werte zu entnehmen sind!

2. Schnittpunkte bestimmen:
a) zwischen f(x) und g(x):

$$
\begin{aligned}
f(x_s) &= g(x_s)\\
x_s^2-4x_s+5 &= -x_s+5\\
x_s^2-3x_s &= 0\\
x_s(x_s-3) &= 0\\
x_s &= 0 \vee x_s = 3
\end{aligned}
$$

b) zwischen f(x) und h(x)

$$
\begin{aligned}
f(x_s) &= h(x_s)\\
x_s^2-4x_s+5 &= -x_s^2+4x_s-1\\
2x_s^2-8x_s+6 &= 0\\
x_s^2-4x_s+3 &= 0\\
x_s &= 2\pm\sqrt{4-3}\\
x_s &= 3 \vee x_s = 1
\end{aligned}
$$

c) zwischen g(x) und h(x)

$$g(x_s) = h(x_s)$$
$$-x_s + 5 = -x_s^2 + 4x_s - 1$$
$$x_s^2 - 5x_s + 6 = 0$$
$$x_s = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6}$$
$$x_s = 2{,}5 \pm 0{,}5$$
$$x_s = 3 \vee x_s = 2$$

3. Intervallweise Integration:

$$A_1 = \left|\int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(g(x) - h(x)\right)dx\right|$$
$$= \left|\int_0^1 \left(x^2 - 3x\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(x^2 - 5x + 6\right)dx\right|$$
$$= \left|\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right|_0^1 + \left|\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right|_1^2 = \left|\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6\right)\right| = \left|-\frac{7}{6}\right| + \left|\frac{14}{3} - \left(\frac{23}{6}\right)\right|$$
$$= \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2FE$$

$$A_2 = \left|\int_1^2 \left(f(x) - h(x)\right)dx\right| + \left|\int_2^3 \left(f(x) - g(x)\right)dx\right|$$
$$= \left|\int_1^2 \left(2x^2 - 8x + 6\right)dx\right| + \left|\int_2^3 \left(x^2 - 3x\right)dx\right|$$
$$= \left|\frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 + 6x\right|_1^2 + \left|\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right|_2^3$$
$$= \left|\frac{2}{3}8 - \frac{8}{2}4 + 12 - \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2} + 6\right)\right| + \left|\frac{27}{3} - \frac{3}{2}9 - \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2}4\right)\right|$$
$$= \left|\frac{16}{3} - 16 + 12 - \left(\frac{8}{3}\right)\right| + \left|9 - \frac{27}{2} - \left(-\frac{10}{3}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{4}{3} - \frac{8}{3}\right| + \left|-\frac{27}{6} + \frac{20}{6}\right| = \frac{4}{3} + \frac{7}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5FE$$