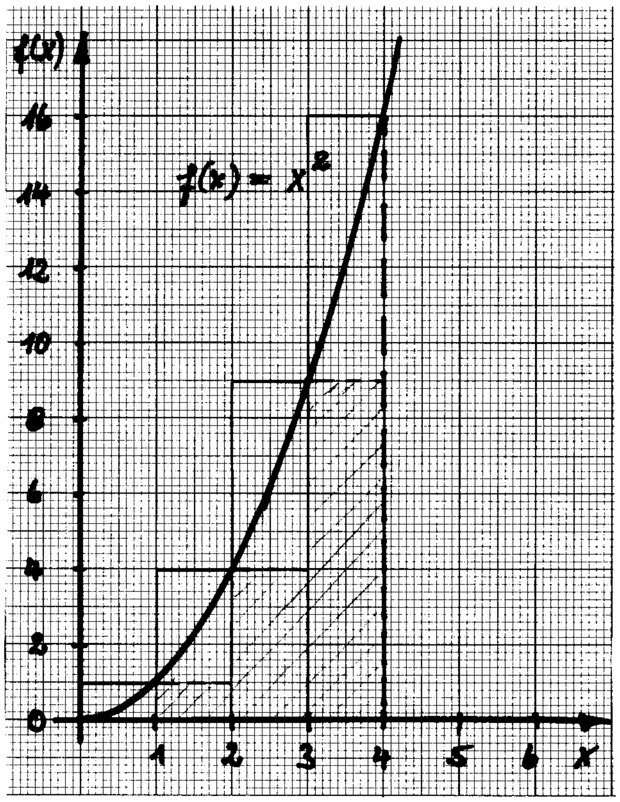
Thema: Integralrechnung -Flächenberechnung-

Die Fläche zwischen dem Graphen einer nichtlinearen Funktion und der x-Achse haben wir berechnet, in dem wir diese Fläche in ***Streifen*** zerlegt haben. Je nach Höhe dieser Streifen erhielten wir eine ***Obersumme*** bzw. eine ***Untersumme*** der einzelnen Streifen. Die tatsächliche Fläche liegt zwischen diesen beiden Flächensummen.



$$\boxed{U_{\square} \leq F \leq O_{\square}}$$

Eine verbesserte Näherung war über eine Mittelwertbildung zu erreichen.

Merke: **Die Genauigkeit dieser Methode ist von der gewählten Streifenbreite abhängig**.

Bei **unendlich vielen Streifen** wird die Streifenbreite unendlich klein und haben die beiden Flächensummen die zu bestimmende Fläche F als gemeinsamen Grenzwert.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} U_{\square} = F = \lim_{n \to \infty} O_{\square}}$$

a) Es soll nun die genaue Fläche über die Obersumme bestimmt werden. Bei einer **unendlichen Streifenanzahl** müssen wir auf die **Grenzwertrechnung** zurückgreifen.

Es ist: x_0 = rechte Grenze der zu bestimmenden Fläche
n = Anzahl der Streifen ($n \to \infty$)
$f(x) = x^2$ Zuordnungsvorschrift des Funktionsgraphen

Streifen-breite

$$F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left[(\Delta x)\, f(\Delta x\, 1) + (\Delta x)\, f(\Delta x\, 2) + (\Delta x)\, f(\Delta x\, 3) + \ldots + (\Delta x)\, f(\Delta x\, n) \right]$$

Streifen-höhe

$$F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left[(\Delta x)(\Delta x\, 1)^2 + (\Delta x)(\Delta x\, 2)^2 + (\Delta x)(\Delta x\, 3)^2 + \ldots + (\Delta x)(\Delta x\, n)^2 \right]$$

$$F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{x_0}{n}\right)\left(\frac{x_0}{n}\, 1\right)^2 + \left(\frac{x_0}{n}\right)\left(\frac{x_0}{n}\, 2\right)^2 + \left(\frac{x_0}{n}\right)\left(\frac{x_0}{n}\, 3\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_0}{n}\right)\left(\frac{x_0}{n}\, n\right)^2 \right]$$

$$F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{x_0}{n}\right)\left[\left(\frac{x_0}{n}\, 1\right)^2 + \left(\frac{x_0}{n}\, 2\right)^2 + \left(\frac{x_0}{n}\, 3\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_0}{n}\, n\right)^2 \right]\right]$$

$$F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{x_0}{n}\right)^3 \left[(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (n)^2 \right]\right]$$

$$F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{x_0}{n}\right)^3 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right]$$

$$\boxed{F(x_0) = \frac{x_0^3}{3}}$$

Mit diesem Grenzwert haben wir eine **Flächenformel**, die uns das Berechnen von Flächen der oben beschriebenen Art bei beliebigem x_0 ermöglicht.

Mit $x_0=4$ gilt: $F(4) = A = \frac{4^3}{3} = 21.333$ FE

b) Die quadratische Funktion **$f(x)=ax^2+b$**

$$F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \Big[\underbrace{\left(\frac{x_0}{n}\right)}_{\text{Streifenbreite}}\Big[\big(\underbrace{a(\tfrac{x_0}{n}\,1)^2 +b}_{\text{1. Streifenhöhe}}\big) + \big(\underbrace{a(\tfrac{x_0}{n}\,2)^2 +b}_{\text{2. Streifenhöhe}}\big) + \ldots + \big(\underbrace{a(\tfrac{x_0}{n}\,n)^2 +b}_{\text{n. Streifenhöhe}}\big)\Big]\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\left(\frac{x_0}{n}\right)\Big[\Big(a\left(\frac{x_0}{n}\right)^2 (1^2+2^2+3^2+ \ldots+n^2\Big) +(b\, n)\Big]\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\Big[\Big(a\left(\frac{x_0}{n}\right)^3 (1^2+2^2+3^2+ \ldots+n^2\Big) +\Big(\frac{x_0}{\cancel{n}}\, b\, \cancel{n}\Big)\Big]\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\Big[\Big(a\left(\frac{x_0}{n}\right)^3 \Big(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Big) +(x_0\, b)\Big]\Big]$$

$$\boxed{F(x_0) = a\,\frac{x_0^{\,3}}{3} + b\,x_0}$$

Flächenfunktion zur obigen quadratischen Funktion **$f(x)=ax^2+b$**

Anwendung: a) $f(x) = 2x^2$ => $a=2$ und $b=0$

$$F(x_0) = 2\,\frac{x_0^{\,3}}{3}$$

mit $x_0=4$ gilt: $F(4) = A = 2\cdot\frac{4^3}{3} = 42.667$ FE

b) $f(x) = x^2$ => $a=1$ und $b=0$

$F(x_0) = \frac{x_0^{\,3}}{3}$; mit $x_0=4$ gilt: $F(4) = A = \frac{4^3}{3} = 21.333$ FE