Aufgabenbeispiel zum Thema Polstelle, Lücke, Stetigkeit

$$f(x) := \frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3}$$

Ermittlung des Definitionsbereiches:

Der Nenner des Bruches darf nicht Null werden. Eine Division durch Null ist nicht definiert.

$x^2 - 2\cdot x - 3 = (x-3)\cdot(x+1) = 0$ => $x - 3 = 0$ auflösen, $x \rightarrow 3$ $\quad x + 1 = 0$ auflösen, $x \rightarrow -1$

D = R \ { -1, 3}

Unterscheidung Polstelle/Lücke:

$Z(x) := 4\cdot x^2 + x - 3 \qquad N(x) := x^2 - 2\cdot x - 3$

$x_0 := -1 \qquad Z(-1) = 0 \quad N(-1) = 0$ => **Lücke**

$x_0 := 3 \qquad Z(3) = 36 \quad N(3) = 0$ => **Polstelle**

$$g_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\cdot\left(4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{4}{1} \qquad g_1 = 4$$

$$g_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\cdot\left(4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{4}{1} \qquad g_2 = 4$$

Konvergenznachweis für g2:

$$\left|\frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} - 4\right| < \varepsilon$$ für alle $x < x_\varepsilon$ mit ε Element R*+

$$\left|\frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} - \frac{4\cdot\left(x^2 - 2\cdot x - 3\right)}{x^2 - 2\cdot x - 3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} - \frac{4\cdot x^2 - 8\cdot x - 12}{x^2 - 2\cdot x - 3}\right| < \varepsilon \qquad 4\cdot x^2 + x - 3 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{4\cdot x^2 + x - 3 - 4\cdot x^2 + 8\cdot x + 12}{x^2 - 2\cdot x - 3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{9\cdot x + 9}{x^2 - 2\cdot x - 3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{9\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(x+1)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{9}{(x-3)}\right| < \varepsilon$$

Für x-> - unendl. ist dieser **Nenner** immer **negativ**!!!!

$$-\left(\frac{9}{x-3}\right) < \varepsilon$$

$$\frac{-9}{\varepsilon} > x - 3$$

$$x < 3 - \frac{9}{\varepsilon}$$

Also ist g2 GW für x-> - unendl. für f(x)

Grenzwertberechnung für x -> xo:

$$g_3 = \lim_{x \to -1^+} \frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} = \lim_{n \to \infty} \frac{4\cdot\left(-1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{n}\right) - 3}{\left(-1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot\left(-1 + \frac{1}{n}\right) - 3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} - 1 + \frac{1}{n} - 3}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 2 - \frac{2}{n} - 3} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{-7}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\left(-7 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\left(-4 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

$$g_4 = \lim_{x \to 3^-} \frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} = \lim_{n \to \infty} \frac{4\cdot\left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{n}\right) - 3}{\left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot\left(3 - \frac{1}{n}\right) - 3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{36 - \frac{24}{n} + \frac{4}{n^2} + 3 - \frac{1}{n} - 3}{9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} - 6 + \frac{2}{n} - 3} = \lim_{n \to \infty} \frac{36 - \frac{25}{n} + \frac{4}{n^2}}{-\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\left(36\cdot n - 25 + \frac{4}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\left(-4 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\infty}{-4} = -\infty$$

Stetigkeit und stetige Fortsetzung:

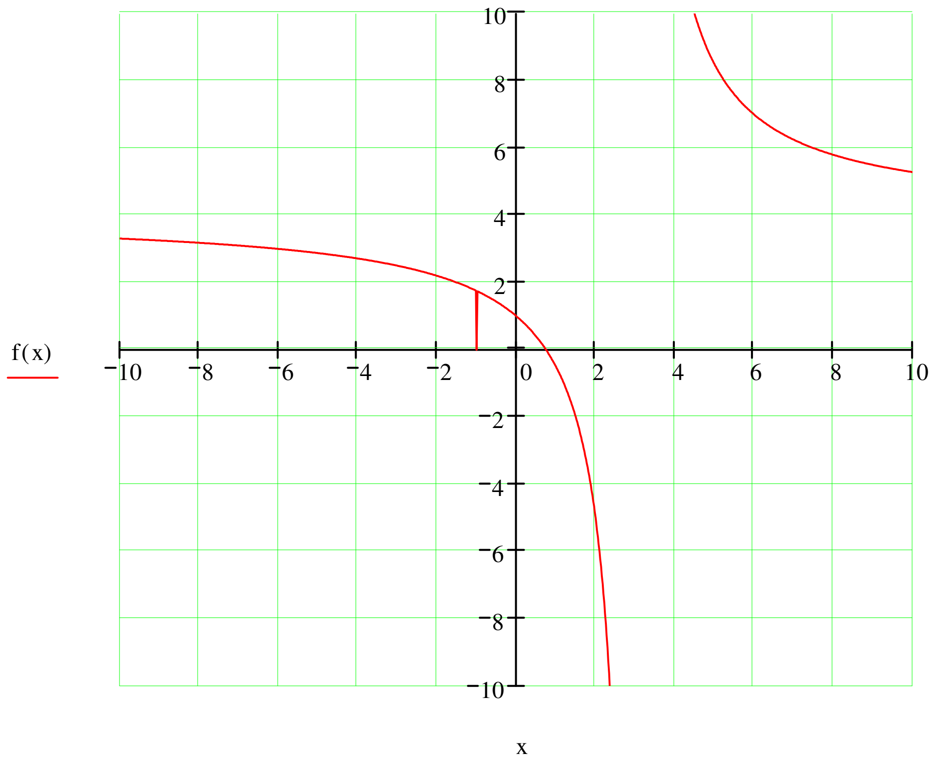
Die Lücke kann "repariert", d.h. geschlossen werden. Bem: $f^* = f_{neu}$

$$f(x) := \frac{(4\cdot x - 3)\cdot(x + 1)}{(x - 3)\cdot(x + 1)} \qquad f_{neu}(x) := \frac{4\cdot x - 3}{x - 3} \qquad f_{neu}(-1) = \frac{7}{4}$$

= stetige Fortsetzung

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{4\cdot x^2 + x - 3}{x^2 - 2\cdot x - 3} & \text{für x ungleich -1 und 3} \\ \frac{7}{4} & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Graph:



Beachte das Verhalten bei der **Lücke xo = -1**!!!!! (g_3)

Es liegt eine waagerechte Asymptote vor bei y = 4 (g_1=g_2=4)

Es liegt eine senkrechte Asymptote vor bei x0 = 3 (g_3= +/- unendlich)