Thema: Kurvendiskussion

(1) $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2$

a) Def.-Bereich: $D = \mathbb{R}$

b) Symmetrie: $f(-x) = \frac{4}{3}(-x) - \frac{1}{3}(-x)^2 = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 \neq f(x)$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie   Punktsymmetrie nicht möglich (Fkt 2. grad)

c) Nullstellen: $(f(x)=0)$

$f(x) = 0 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 = x\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x\right)$

$\Rightarrow x = 0 \vee \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$

evtl. Polstelle

Nullstellen bei $x_{01} = 0$ und $x_{02} = 4$

Schnittpkt mit f(x)-Achse: $(x=0)$

$f(0) = \frac{4}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}0^2 = 0$

d) Stetigkeit: f ist eine ganzrat Fkt $\Rightarrow$ f in $\mathbb{R}$ stetig

e) Extremwerte $(f'(x)=0)$

$f'(x) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x$

$f'(x) = 0 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x \quad |\cdot 3$

$0 = 4 - 2x$

$x_E = 2$

$f''(x) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow$ Max

$f(2) = \frac{4}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3}\cdot 2^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

Maximum in $P_{max}\left(2, \frac{4}{3}\right)$

f) Wendepunkte $f''(x)=0$

$f''(x) = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ keine Wendepunkte

g) Monotonie

$]-\infty, x_E[\ = \ ]-\infty, 2[\ ,\ f'(0) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\,0 = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ monoton steigend

$]x_E, \infty[\ = \ ]2; \infty[\ ,\ f'(3) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\cdot 3 = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

Krümmungsverhalten

$$f''(x) = -\frac{2}{3} < 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Rechtskrümmung in ganz } \mathbb{R}}$$

h) Wertebereich Da in $P(2, \frac{4}{3})$ ein Maximum vorliegt gilt

$$\underline{f(x) \leq \frac{4}{3}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

i) Rand d. Defbereich

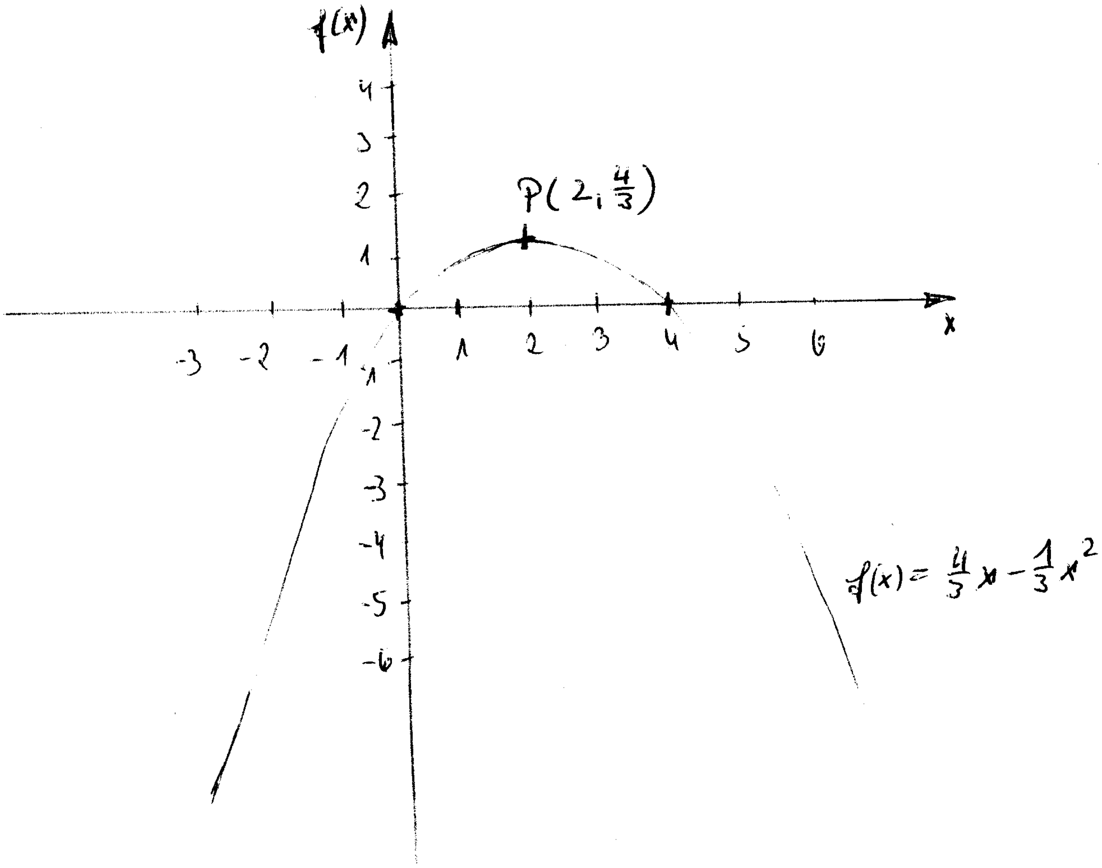
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 = \underline{-\infty}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2\right)$$

Polstelle?

$$= \lim_{-x \to -\infty} \left(\frac{4}{3}(-x) - \frac{1}{3}(x)^2\right) = \underline{-\infty}$$

j) Graph



① /330

a) $f(x) = 2x^4 - 2x^2$

a) Def-Bereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

b) Symmetrie: $f(-x) = 2(-x)^4 - 2(-x)^2 = 2x^4 - 2x^2 = f(x)$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie

c) Nullstellen: ($f(x) = 0$)

$f(x) = 0 = 2x^4 - 2x^2$

$0 = 2x_N^2(x_N^2 - 1)$

$\Rightarrow x_N = 0 \lor x_N^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x_N = -1 \lor x_N = 1$

Nullstellen bei $x_{01} = 0$, $x_{02} = -1$, $x_{03} = 1$

Schnittpkt mit $f(x)$-Achse ($x = 0$)

$f(0) = 2 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0$

d) Stetigkeit: f ist in $\mathbb{R}$ stetig

e) Extremwerte: ($f'(x) = 0$)

$f'(x) = 8x^3 - 4x$

$f''(x) = 24x^2 - 4$

$0 = 8x_E^3 - 4x_E = 4x_E(2x_E^2 - 1)$

$\Rightarrow x_E = 0 \lor 2x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$x_E = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lor x_E = +\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(0) = 0 - 4 < 0$ Max.

$f''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 24(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$ Min

$f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 24(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 4 = \quad = 8 > 0$ Min

Funktionswerte

$f(0) = 0$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2(-\frac{1}{\sqrt{2}})^4 - 2(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} - \cancel{1} \cancel{0} - \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) =$ $\quad = -\frac{1}{2}$

$P_{1\,max}(0;0)$, $P_{2\,min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right)$ $P_{3\,min}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$

f) Wendepunkte

$f''(x)=0$

$f'''(x)\neq 0$

$f''(x)=24x^2-4$

$0=24x_W^2-4 \quad | : 4$

$0=6x_W^2-1$

$x_W^2=\frac{1}{3}$

$|x_W|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x_W=\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x_W=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'''(x)=48x$

$f'''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=48\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$

$f'''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-48\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$

Funktionswerte:

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{1}{9}-2\frac{1}{3}=\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=\frac{2-6}{9}=-\frac{4}{9}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)= \quad =-\frac{4}{9}$

g) $P_{3\,wende}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{4}{9}\right)$; $P_{4\,wende}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{9}\right)$

g) Monotonie

h) Wertebereich

$f(x)\geq -\frac{1}{2}$ Minimum

i) Rand d. Def.bereich

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ldots = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \quad = \infty$

ii) Graph