
<u>Thema:</u> Die Komplexen Zahlen

a) Zahlenmengen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen N = {0, 1, 2, 3, ...} wurden die Zahlenmengen systematisch „anwendungsorientiert“ erweitert.

- Die Subtraktion über Null hinaus führte zu den negativen Zahlen und zur Zahlenmenge **Z**.

- Die Division führte zu den Brüchen, also zur Zahlenmenge **Q**.

- Das Radizieren erzwingt die Zahlenerweiterung um die irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$, wir erhalten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Erinnern wir uns:

$L = \{x \mid x^2 -2x +6 = 0 \}$ Das Lösen dieser quadratischen Gleichung bereitet in der Grundmenge $\mathbb{R}$ Probleme. In dieser Grundmenge konnten wir keine Elemente benennen, die die Gleichung in eine wahre Aussage überführen. Daher schrieben wir:

$L = \{ \}$
=====

Rechnung: $x^2 -2x +1 = -6 +1$

$\underbrace{(x - 1)^2}$ $= -5$

Ein Quadrat kann nicht negativ werden.

Um dieses Grundproblem in der Mathematik klären zu können, müssen wir die Wurzel aus einer negativen Zahl definieren.

$\sqrt{-5}$= ??????

Klären wir die Frage: $\boxed{\sqrt{-1} = ?}$

*Nehmen wir an, eine solche Zahl würde existieren. Diese Zahl ist auf dem Zahlenstrahl nicht mehr darstellbar. Daher geben wir ihr den Namen **„imaginäre Zahl“** und geben ihr das Zeichen **„j“**.*

Welche Eigenschaften müsste diese Zahl haben?

Grundeigenschaft: $j \cdot j = j^2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{j = \sqrt{-1}}$

Mit dieser **imaginären Einheit** könnten wir das Problem formal lösen:

$$| x - 1 | = \sqrt{-5}$$

1. Fall : $x-1 \geq 0$

$$+(x-1) = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5}$$
$$+(x-1) = j \cdot \sqrt{5}$$
$$x = 1 + j \cdot \sqrt{5}$$

2. Fall: $x-1 < 0$

$$-(x-1) = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5}$$
$$-(x-1) = j \cdot \sqrt{5}$$
$$x = 1 - j \cdot \sqrt{5}$$

Als Lösungsmenge erhalten wir: $\underline{L = \{ 1 + j \cdot \sqrt{5} ;\ 1 - j \cdot \sqrt{5} \}}$

Probe: $(1 + j \cdot \sqrt{5})^2 \quad -2 \cdot (1 + j \cdot \sqrt{5}) \quad +6 = 0$

$$1 + 2 \cdot j \cdot \sqrt{5} + (j \cdot \sqrt{5})^2 - 2 \quad - 2 \cdot j \cdot \sqrt{5} \quad +6 = 0$$
$$1 + 2 \cdot j \cdot \sqrt{5} + j^2 \cdot (\sqrt{5})^2 - 2 \quad - 2 \cdot j \cdot \sqrt{5} \quad +6 = 0$$
$$1 + 2 \cdot j \cdot \sqrt{5} - 1 \cdot 5 \quad -2 \quad - 2 \cdot j \cdot \sqrt{5} \quad +6 = 0 \quad [w]$$