Thema: Potenzieren und Radizieren komplexer Zahlen

a) Potenzieren

Betrachten wir die Euler'sche Form einer beliebigen komplexen Zahl $\underline{z}$:

$$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\varphi}$$

Diese komplexe Zahl wird potenziert:

$$\underline{z}^{n} = (|\underline{z}|\, e^{j\varphi})^{n}$$

Mit Hilfe der Potenzgesetze erhalten wir:

$$\boxed{\underline{z}^{n} = (|\underline{z}|\, e^{j\varphi})^{n} = |\underline{z}|^{n} (e^{j\varphi})^{n} = |\underline{z}|^{n}\, e^{jn\varphi}}$$

In Worten:
Eine komplexe Zahl wird potenziert, in dem der Betrag potenziert und der Winkel mit dem Grad des Exponenten multipliziert wird.

b) Radizieren

Betrachten wir die Euler'sche Form einer beliebigen komplexen Zahl $\underline{z}$:

$$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\varphi}$$

Diese komplexe Zahl wird radiziert:

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{(|\underline{z}|\, e^{j\varphi})}$$

Wurzeln können in die Potenschreibweise umgewandelt werden:

$$\underline{z}^{\frac{1}{n}} = \left(|\underline{z}| \cdot e^{j\cdot\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = (|\underline{z}|)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(e^{j\cdot\varphi}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\underline{z}^{\frac{1}{n}} = (|\underline{z}|)^{\frac{1}{n}} \cdot e^{j \cdot \frac{\varphi}{n}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{|\underline{z}|}\; e^{j \cdot \frac{\varphi}{n}}}$$ (Hauptlösung)

Warum ist dieses aber nur die Hautlösung? Wir wissen:

$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\varphi} \quad = |\underline{z}|\, e^{j(\varphi + 360°)} \; = |\underline{z}|\, e^{j(\varphi + 2 \cdot 360°)} \; = |\underline{z}|\, e^{j(\varphi + 3 \cdot 360°)}$ = usw.

Welche weiteren Lösungen ergeben sich aus diesem Sachverhalt? Ermitteln Sie die weiteren Lösungen!

Stellen Sie abschließend alle Lösungen in der Gauss'schen Zahlenebene dar! Welcher allgemeine Zusammenhang lässt sich formulieren?