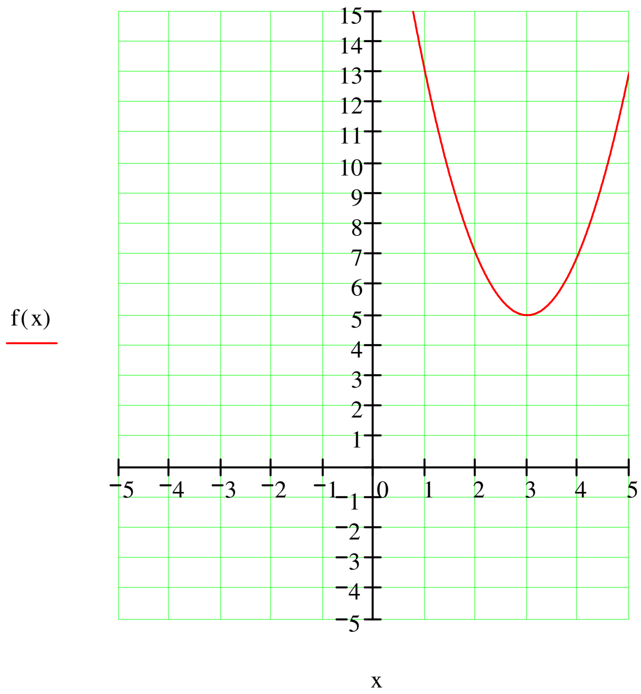
Beispiel zum Thema "Umkehrfunktion"

- quadratische Funktion-

$$f(x) := 2\cdot x^2 - 12\cdot x + 23$$



Der Graph der Funktion zeigt uns, dass die Parabel einen steigenden und einen fallen Ast besitzt. **Nur monoton steigende oder fallende Funktionen sind umkehrbar.** Somit muss hier durch eine Einschränkung des Definitionsbereiches diese Monotonie "erzwungen" werden. Es bestehen aber zwei Möglichkeiten.

Die Änderung des Monotonieverhaltens beginnt im **Scheitelpunkt**. Daher müssen wir diesen zunächst bestimmen.

$$f(x) = 2\cdot x^2 - 12\cdot x + 23$$

$$f(x) = 2\cdot\left(x^2 - 6\cdot x + 9 - 9 + \frac{23}{2}\right)$$

$$f(x) = 2\cdot\left[\left(x^2 - 6\cdot x + 9\right) + \frac{5}{2}\right]$$

$$f(x) = 2\cdot(x-3)^2 + 5$$

S(+3|+5)
=======

Rechts vom Scheitelpunkt liegt eine monoton steigende und links eine monoton fallende Teilfunktion vor.

Gewählt sei exemplarisch der linke Parabelast.

D_f = {x | x>= 3] ; W_f = { y | y >= 5 } also: D_{f-1} = {x | x>= 5] ; W_{f-1} = { y | y >= 3 }

Auf dieser Basis ermitteln wir die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion:

$$y = 2\cdot(x-3)^2 + 5$$

wir vertauschen x und y

$$x = 2\cdot(y-3)^2 + 5$$

$$(y-3)^2 = \frac{x-5}{2}$$

$$|y-3| = \sqrt{\frac{x-5}{2}}$$

Hier ist eine Fallunterscheidung notwendig.
Da aber für die Umkehrfunktion der obige Wertebereich gilt, ist y>=3.
Somit kommt nur der +(y-3)-Fall zum Tragen.

$$(y-3) = \sqrt{\frac{x-5}{2}}$$

$$y = 3 + \sqrt{\frac{x-5}{2}}$$

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{\frac{x-5}{2}}$$

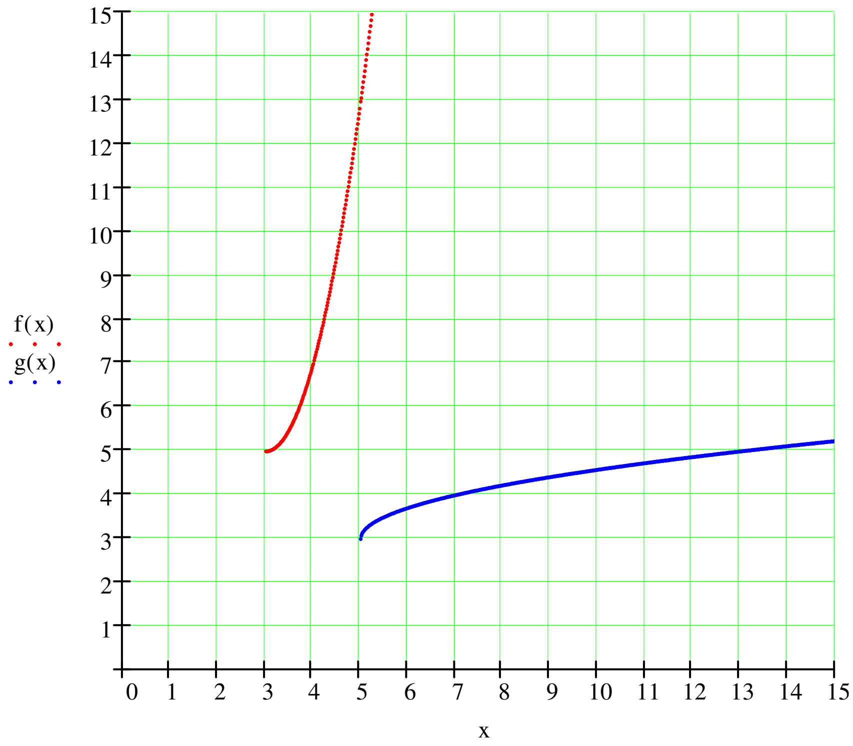
=============

$$f(x) := \text{wenn}\left(x \geq 3, 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 23, \infty\right)$$

Besonderheit der MathCad-Darstellung.
Es sind die Zuordnungsvorschriften wie oben.

Umkehrfunktion: hier g(x)

$$g(x) := \text{wenn}\left(x \geq 5, 3 + \sqrt{\frac{x-5}{2}}, \infty\right)$$



Bemerkung: Die erste Winkelhalbierende y=x ist die Spiegelachse.