

# Zusammenfassung der Analytischen Geometrie

## 1 Verschiedenes zu Vektoren

Die folgenden Definitionen werden Ihnen immer wieder in der Analytischen Geometrie begegnen. Deshalb hier einmal kurz zusammen gefasst:

### 1.1 Betrag eines Vektors

Der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  hat den **Betrag** (die Länge)  $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

### 1.2 Skalarprodukt

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  seien zwei Vektoren und  $\gamma$  der Winkel zwischen diesen Vektoren. Dann bezeichnet man

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

als das **Skalarprodukt** von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Das Skalarprodukt berechnet sich wie folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (2)$$

### 1.3 Die Kosinusformel

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren und  $\gamma$  sei der Winkel zwischen ihnen. Dann gilt:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (3)$$

### 1.4 Der Abstand zweier Punkte

Der Abstand der Punkte  $A(a_1|a_2|a_3)$  und  $B(b_1|b_2|b_3)$  ist gleich dem Betrag des Vektors  $\overrightarrow{AB}$ . Es ist also:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \quad (4)$$

## 2 Geraden und Ebenen

### 2.1 Die Gerade ist durch Punkt und Richtungsvektor festgelegt

Eine Gerade  $g$  kann festgelegt werden durch den Aufpunkt  $\vec{a}$  und einem Richtungsvektor  $\vec{u}$ :

$$g : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Bitte wenden...



# Zusammenfassung der Analytischen Geometrie

## 2.2 Ebenengleichungen

- (a) **Vektorielle Parametergleichung einer Ebene** Eine Ebene  $E$  kann festgelegt werden durch den Aufpunkt  $\vec{a}$  und zwei Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ .

$$E : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R} \quad (6)$$

- (b) **Koordinatengleichung einer Ebene** Eine Ebene kann durch eine **Koordinatengleichung** der Form  $ax + by + cz = d$  dargestellt werden, wobei  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  ist.

## 3 Lagebeziehungen

### 3.1 Lagebeziehungen von Punkten bezüglich einer Geraden im Raum

Gegeben sei der Punkt  $P(p_1|p_2|p_3)$  und die Gerade  $g : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ . Um zu überprüfen, ob  $P$  auf  $g$  liegt, gehe man wie rechts dargestellt vor.

Koordinate des Punktes in die Geradengleichung einsetzen.	
Ist das lineare Gleichungssystem lösbar?	
ja	nein
P liegt auf g	P liegt nicht auf g
	Abstand von P zu g bestimmen

### 3.2 Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden

Zwischen zwei Geraden im Raum sind drei charakteristische Lagebeziehungen möglich. Sie können

- (a) parallel liegen (Sonderfall: sie sind identisch);
- (b) sich schneiden;
- (c) windschief sein.

Die Geraden seien gegeben durch  $g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{u}_1$  und  $g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{u}_2$  mit  $r, s \in \mathbb{R}$

Sind die Richtungsvektoren linear abhängig?			
ja		nein	
Dann gilt: $g_1$ parallel $g_2$		Dann gilt: $g_1$ nicht parallel $g_2$	
Haben $g_1$ und $g_2$ einen gemeinsamen Punkt?		Liegt ein Punkt von $g_1$ auch auf $g_2$ ?	
ja		nein	
Dann ist $g_1 \equiv g_2$	Dann ist $g_1 \parallel g_2$	Dann ist $g_1 \cap g_2 = \{S\}$	Dann ist $g_1 \cap g_2 = \emptyset$
		$g_1$ und $g_2$ schneiden sich im Punkt S	$g_1$ und $g_2$ sind windschief



## Zusammenfassung der Analytischen Geometrie

### 3.3 Lagebeziehung zwischen einem Punkt und einer Ebene

Gegeben sei der Punkt  $P(p_1|p_2|p_3)$  und die Ebene  $E : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$  mit  $r, s \in \mathbb{R}$

Koordinate des Punktes in die Ebenengleichung einsetzen.	
Ist das lineare Gleichungssystem lösbar?	
ja	nein
$P$ liegt in $E$	$P$ liegt nicht in $E$
	Abstand von $P$ zu $E$ bestimmen

### 3.4 Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

Es gibt drei unterschiedliche gegenseitige Lagebeziehungen zwischen einer Geraden und einer Ebene:

- (a) Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt.
- (b) Die Gerade verläuft parallel zur Ebene.
- (c) Die Gerade liegt ganz in der Ebene.

Gegeben sei die Gerade  $g : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{u}_1$  und die Ebene  $E : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{u}_2 + t\vec{v}_2$  mit  $r, s, t \in \mathbb{R}$

Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ linear abhängig?	
ja	nein
$g$ schneidet $E$	$g$ ist parallel zu $E$
$g \cap E = \{S\}$	Wir prüfen:
	Ist $\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2$ linear unabhängig?
	ja
$g$ ist parallel zu $E$	$g$ liegt in $E$
$g \cap E = \emptyset$	$g \cap E = g$

### 3.5 Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen

Es gibt drei unterschiedliche gegenseitige Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen:

- (a) Die Ebenen sind echt parallel.
- (b) Die Ebenen sind identisch.
- (c) Die Ebenen schneiden einander. Sie haben dann eine Schnittgerade gemeinsam.

Gegeben seien die Ebenen  $E_1 : \vec{x} = \vec{s}_1 + r\vec{u}_1 + s\vec{v}_1$  und  $E_2 : \vec{x} = \vec{s}_2 + t\vec{u}_2 + k\vec{v}_2$  mit  $r, s, t, k \in \mathbb{R}$

Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear abhängig?	
ja	nein
$E_1$ schneidet $E_2$	$E_1$ ist parallel zu $E_2$
$E_1 \cap E_2 = \{g\}$	Wir prüfen:
	Ist $\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{u}_1, \vec{v}_1$ linear unabhängig?
	ja
$E_1 \equiv E_2$	$E_1 \neq E_2$

