# Zusammenfassung der Analytischen Geometrie

## 1 Verschiedenes zu Vektoren

Die folgenden Definitionen werden Ihnen immer wieder in der Analytischen Geometrie begegnen. Deshalb hier einmal kurz zusammen gefasst:

### 1.1 Betrag eines Vektors

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ hat den **Betrag** (die Länge) $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

### 1.2 Skalarprodukt

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien zwei Vektoren und $\gamma$ der Winkel zwischen diesen Vektoren. Dann bezeichnet man

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma \tag{1}$$

als das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das Skalarprodukt berechnet sich wie folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \tag{2}$$

### 1.3 Die Kosinusformel

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren und $\gamma$ sei der Winkel zwischen ihnen. Dann gilt:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \tag{3}$$

### 1.4 Der Abstand zweier Punkte

Der Abstand der Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$. Es ist also:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \tag{4}$$

## 2 Geraden und Ebenen

### 2.1 Die Gerade ist durch Punkt und Richtungsvektor festgelegt

Eine Gerade $g$ kann festgelegt werden durch den Aufpunkt $\vec{a}$ und einem Richtungsvektor $\vec{u}$:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Bitte wenden...





Rendtel, 12.09.2011 - mb_anageo.tex

### 2.2 Ebenengleichungen

**(a)** **Vektorielle Parametergleichung einer Ebene** Eine Ebene $E$ kann festgelegt werden durch den Aufpunkt $\vec{a}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

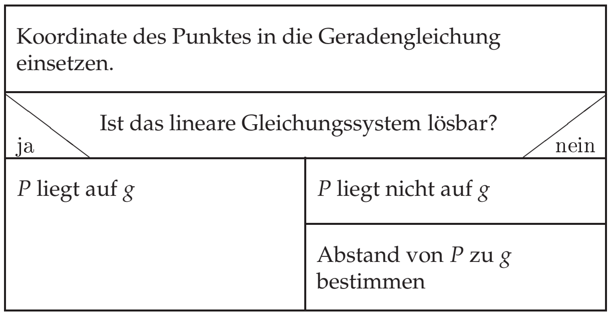
$$E : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R} \tag{6}$$

**(b)** **Koordinatengleichung einer Ebene** Eine Ebene kann durch eine **Koordinatengleichung** der Form $ax + by + cz = d$ dargestellt werden, wobei $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ist.

## 3 Lagebeziehungen

### 3.1 Lagebeziehungen von Punkten bezüglich einer Geraden im Raum

Gegeben sei der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und die Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$. Um zu überprüfen, ob $P$ auf $g$ liegt, gehe man wie rechts dargestellt vor.




### 3.2 Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden

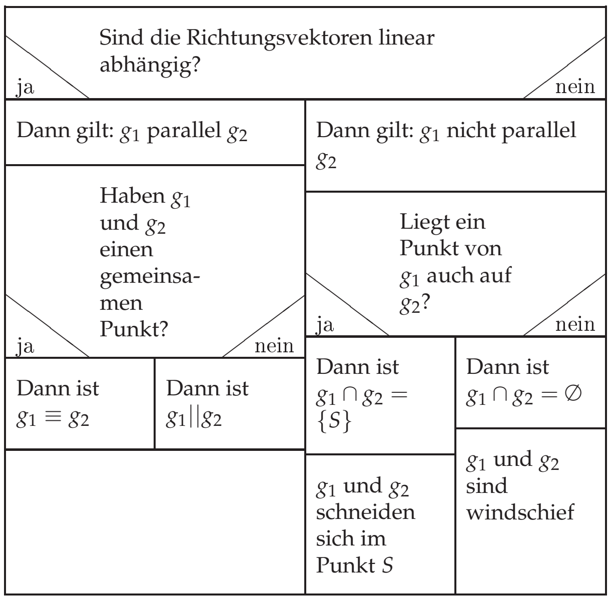
Zwischen zwei Geraden im Raum sind drei charakteristische Lagebeziehungen möglich. Sie können

**(a)** parallel liegen (Sonderfall: sie sind identisch);

**(b)** sich schneiden;

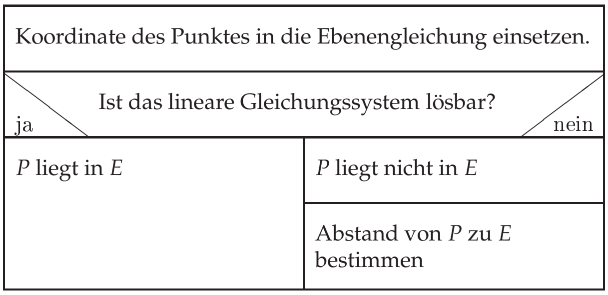
**(c)** windschief sein.

Die Geraden seien gegeben durch $g_1 : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{u}_1$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{u}_2$ mit $r, s \in \mathbb{R}$



### 3.3 Lagebeziehung zwischen einem Punkt und einer Ebene

Gegeben sei der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und die Ebene $E : \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$




### 3.4 Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

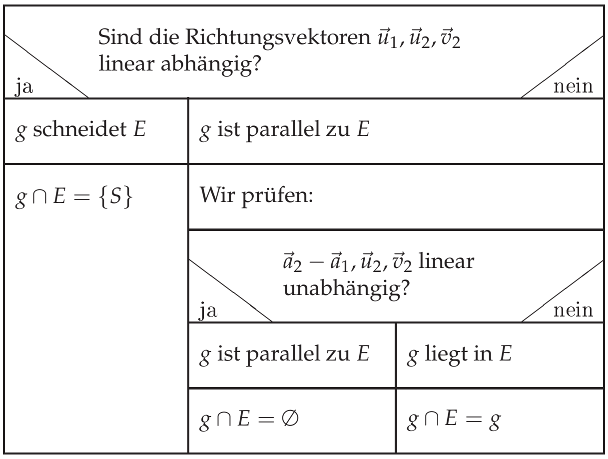
Es gibt drei unterschiedliche gegenseitige Lagebeziehungen zwischen einer Geraden und einer Ebene:

**(a)** Gerade und Ebene schneiden sich in einem Punkt.

**(b)** Die Gerade verläuft parallel zur Ebene.

**(c)** Die Gerade liegt ganz in der Ebene.

Gegeben sei die Gerade $g : \vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{u}_1$ und die Ebene $E : \vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{u}_2 + t\vec{v}_2$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$




### 3.5 Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen

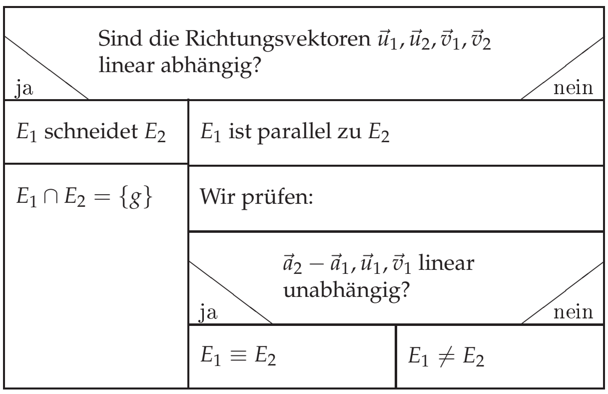
Es gibt drei unterschiedliche gegenseitige Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen:

**(a)** Die Ebenen sind echt parallel.

**(b)** Die Ebenen sind identisch.

**(c)** Die Ebenen schneiden einander. Sie haben dann eine Schnittgerade gemeinsam.

Gegeben seien die Ebenen $E_1 : \vec{x} = \vec{s}_1 + r\vec{u}_1 + s\vec{v}_1$ und $E_2 : \vec{x} = \vec{s}_2 + t\vec{u}_2 + k\vec{v}_2$ mit $r, s, t, k \in \mathbb{R}$








Rendtel, 12.09.2011 - mb_anageo.tex