

## KAP 1.2

### BEFREUNDETE ZAHLEN

Bildet man  $\sigma^*(220)=284$  und überprüft dann die Teilersumme von 284, so erlebt man eine Überraschung:  $\sigma^*(284)=220$ . Dieses ungewöhnliche Zahlenpaar war schon in der Antike bekannt. So soll Pythagoras (ca. 570-500 v.Chr.) geschrieben haben: "...ein Freund ist einer, der ein anderes Ich ist, wie 220 und 284". So geht auch die folgende Definition auf Pythagoras zurück:

**DEFINITION** Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  heißen befreundet, wenn gilt:  $\sigma^*(a)=b$  und  $\sigma^*(b)=a$ .

Lange blieb dieses eine Zahlenpaar, das angeblich auch Aristoteles in der „Ethik“ benutzte, um den Begriff Freundschaft zu charakterisieren, das einzige bekannte. Erst Fermat(1601-1665) und der uns schon bestens bekannte Pater Mersenne veröffentlichten 1636 ein weiteres:

**AUFGABE 1.44** Zeige, daß 17296 und 18416 befreundet sind.

Wie fanden Fermat und Mersenne dieses Paar? Es scheint, daß sie ein Rezept wiederfanden, das der im 9.Jahrhundert in Bagdad lebende Arzt Thâbit Ibn Kurah entwickelt hat (ohne damit allerdings ein weiteres Zahlenpaar außer dem schon bekannten 220/284 zu finden). Bei Fermat hört sich das etwa so an:

- bilde vier Zeilen von Zahlen
- schreibe in die erste Zeile die Potenzen von 2
- schreibe in die zweite Zeile das Dreifache der Zahlen aus der ersten Zeile
- vermindere die zahlen der zweiten Zeile um 1 und schreibe sie in die dritte Zeile
- in der vierten Zeile steht das Produkt der in der zweiten Zeile stehenden Zahl mit ihrem linken Nachbarn vermindert um 1
- sind zwei benachbarte Zahlen aus der dritten Zeile sowie die unter der größeren Zahl stehende Zahl aus der vierten Zeile Primzahlen, so hat man zwei befreundete Zahlen  $a$  und  $b$  nach dem folgenden Schema gefunden:

1.Zeile....x

2.Zeile.....

3.Zeile...zy

4.Zeile.....t

$$a=x \cdot z \cdot y; b=x \cdot t$$

**AUFGABE 1.45** Schreibe die ersten 7 Spalten des oben beschriebenen Schemas auf. Welche befreundeten Zahlenpaare ergeben sich?

**AUFGABE 1.46** Formalisiere das oben angegeben Verfahren.

Die Lösung von Aufgabe 1.46 bringt die folgende Regel an den Tag:

**REGEL:** Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a=2^nxy$  und  $b=2^nz$  sind befreundet, wenn  $x=3 \cdot 2^n - 1$ ,  $y=3 \cdot 2^{n-1} - 1$  und  $z=9 \cdot 2^{2n-1} - 1$  prim sind.

Das dritte Paar, welches sich nach dieser Regel für  $n=7$  ergibt, gab Descartes(1596-1650) an: 9.363.584 und 9.437.056 sind befreundet.

Beweis der REGEL:  $\sigma^*(a) = (2^{n+1} - 1)(x+1)(y+1) - a$

$$\begin{aligned}
 &= (2^{n+1} - 1)3 \cdot 2^n \cdot 3 \cdot 2^{n-1} - 2^n \cdot (3 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^{n-1} - 1) \\
 &= (2^{n+1} - 1) \cdot 9 \cdot 2^{2n-1} - 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 1) \\
 &= 2 \cdot 2^n \cdot 9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^n \cdot 2^{n-1} - 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1} + 1) \\
 &= 2^n(18 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1} - 9 \cdot 2^{2n-1} + 9 \cdot 2^{n-1} - 1) \\
 &= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) \\
 &= 2^n \cdot z \\
 &= b
 \end{aligned}$$

**AUFGABE 1.47** Führe die Rechnung für  $\sigma^*(b)$  durch.

Trotz der angegebenen Regel dauerte es bis 1747, bis Euler (1707-1783) auf einen Schlag 30(!) weitere befreundete Zahlenpaare veröffentlichte (in seinem Werk „De numeris amicabilebus“). 1750 gab er weitere 34 Paare bekannt, von denen allerdings zwei falsch waren. Das größte von Euler gefundene Paar ist  $a = 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 6959$  und  $b = 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 179 \cdot 2087$ .

**AUFGABE 1.48** Bestimme die Dezimaldarstellung von a und b und zeige, daß die beiden Zahlen befreundet sind.

**AUFGABE 1.49** Im Jahr 1867 überraschte der 16 Jahre alte Nicolo Paganini (der im übrigen nichts mit dem gleichnamigen Violinvirtuosen zu tun hat) die Fachwelt mit dem Paar 1184/1210. Dieses ist das zweitkleinste befreundete Zahlenpaar und war bis dahin von allen Großmeistern glatt übersehen worden.

Übrigens fand Euler seine „Pärchen“ nicht nach dem Rezept von Fermat, denn heute ist bekannt, daß die drei angegebenen Paare die einzigen sind, die sich nach diesem Verfahren für  $n < 20.000$  finden lassen. Herman te Riele aus Amsterdam berechnete 1985 alle 1427 befreundeten Zahlenpaare unter 10.000.000.000. Von Walter Borho von der Universität Bonn, der 1987 diese Liste nochmals um 10455 Freundespaare bereicherte, stammt das folgende Rezept zur Konstruktion großer Freundespaare:

Man nehme ein befreundetes Zahlenpaar  $A = a \cdot u$  und  $B = a \cdot s$ , wobei s prim ist. Ist  $p = u + s + 1$  eine Primzahl und p nicht Teiler von a, so gilt für  $n \in \mathbb{N}$ : sind  $q_1 = (u+1) \cdot p^n - 1$  und  $q_2 = (u+1)(s+1)p^n - 1$  prim, so sind  $A_1 = A p^n q_1$  und  $B_1 = a p^n q_2$  befreundet.

Dazu ein Beispiel mit dem kleinsten Pärchen: Es sei  $A = 220 = 2^2 \cdot 55$  und  $B = 2^2 \cdot 71$ . Dann ist  $a = 2^2$ ,  $u = 55$  und  $s = 71$  prim.  $p = 55 + 71 + 1 = 127$  ist auch prim und nicht Teiler von a. Nun müssen wir mit  $n \in \mathbb{N}$  testen: Für  $n = 1$  ergibt sich  $q_1 = 56 \cdot 127 - 1 = 7111 = 13 \cdot 547$  - ein Fehlversuch. Also nehmen wir  $n = 2$ :  $q_1 = 903 \cdot 223$  und  $q_2 = 65 \cdot 032 \cdot 127$  - zwei Primzahlen (nachprüfen!). Wir erhalten damit das befreundete Paar  $A_1 = 220 \cdot 127^2 \cdot 903 \cdot 223$  und  $B_1 = 2^2 \cdot 127^2 \cdot 65 \cdot 032 \cdot 127$ . (Wie viele Stellen hat  $B_1$ ?)

**AUFGABE 1.50** Zeige, daß es sich bei den folgenden Zahlenpaaren um befreundete Zahlen handelt:

a) 5020/5564 b) 10744/10856 c) 63020/76084 d) 67095/71145

**AUFGABE 1.51** Zeige an Hand der Beispiele von 1.50, daß die kleinere der beiden befreundeten Zahlen abundant ist, während die größere defizient ist.

**AUFGABE 1.52** Beweise den Sachverhalt von Aufgabe 1.51 allgemein.

Wir wollen am Beispiel von  $A_1$  aus dem vorangegangenen Abschnitt einmal zeigen, wie man mit solchen „Zahlenriesen“ zurechtkommt:

$$\begin{aligned}
 \sigma^*(A_1) &= 7 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{127^3 - 1}{127 - 1} \cdot 903.224 - A_1 \\
 &= 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 16.257 \cdot 903.224 - A_1 \\
 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 5419) \cdot (2^3 \cdot 7 \cdot 127^2) - A_1 \\
 &= 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 127^2 \cdot 5419 - 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 127^2 \cdot 903.223 \\
 &= 2^2 \cdot 127^2 \cdot (2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 5419 - 5 \cdot 11 \cdot 903.223) \\
 &= 2^2 \cdot 127^2 \cdot (114.709.392 - 49.677.265) \\
 &= 2^2 \cdot 127^2 \cdot 65.032.127 \\
 &= B_1
 \end{aligned}$$

Zeige entsprechend:  $\sigma^*(B_1) = A_1$

Konstruiere aus  $A = 11.498.355$  und  $B = 12.024.045$  nach der Regel von Borho ein weiteres Paar befreundeter Zahlen.