KAP 1
BAUSTEINE DER ZAHLENTHEORIE

In diesem Kapitel geht es um die grundlegenden Begriffe der Zahlentheorie wie „Teilbarkeit“ und „Primzahl“. Es werden viele Dinge wiederholt, die Du aus den Klassen 6 bis 8 kennst.

DEFINITION 1.1 Es seien k und n aus $\mathbb{N}$. k heißt "Teiler von n", wenn es eine Zahl $r\in\mathbb{N}$ gibt mit $r\cdot k=n$. r heißt dann der „zu k komplementäre Teiler" von n.
Man schreibt $k|n$ bzw. $r|n$.

Bemerkung: Auch 1 und n selbst sind Teiler von n. Alle Teiler von außer n selbst nennt man „echte Teiler“ von n. Für die „Spezialzahl“ 0 gilt „per definitionem“: $n|0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. 1 hat nur einen einzigen Teiler, nämlich 1 selbst.

SATZ 1.1 **(Grundregeln der Teilbarkeit)**

Für alle a, , $\in\mathbb{N}$ gilt
(T1) $a|b \wedge b|a \Rightarrow a=b$
(T2) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$
(T3) $a|b \Rightarrow a|c\cdot b$
(T4) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c$
(T5) $a|b \wedge \neg(a|c) \Rightarrow \neg(a|b\pm c)$
(T6) $a|b \wedge a|b\pm c \Rightarrow a|c$

Beweise (teilweise):
ad (T1): $(a|b \Rightarrow b=r_1\cdot a;\ b|a \Rightarrow a=r_2\cdot b) \Rightarrow b=r_1(r_2b)=(r_1\cdot r_2)b \Rightarrow r_1\cdot r_2=1 \Rightarrow r_1=r_2=1$
ad (T2): $(a|b \Rightarrow b=r_1\cdot a;\ b|c \Rightarrow c=r_2\cdot b) \Rightarrow c=r_2(r_1a)=(r_2\cdot r_1)\cdot a=r\cdot a \Rightarrow a|c$
Versuche, die restlichen Beweise selbst zu führen.

Beispiele: zu (T4) $17|3400 \wedge 17|136 \Rightarrow 17|3536$ (oder $17|3264$
zu (T5) $17|3400 \wedge\neg(17|137) \Rightarrow \neg(17|3537)$

AUFGABE 1.1 Begründe ohne TR, aber mit den obigen Regeln, ob die folgenden Aussagen wahr sind:
(1) $13|13.407$ (2) $13|13403$ (3) $19|40.945$ (4) $29|69.917$

AUFGABE 1.2 a) Zeige, daß jede sechsstellige Zahl n der Form $\overline{abcabc}$ durch 7, 11 und 13 teilbar ist. (Suche einen geeigneten Teiler von $\overline{abcabc}$.)
b) Zeige entsprechend, daß $n=\overline{abcdabcd}$ durch 73 und 137 teilbar ist.

AUFGABE 1.3 Beweise oder gib ein Gegenbeispiel an:
a) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|5b+7c$ b) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a^2|bc$
c) $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$ d) $n|a-1 \Rightarrow n|a^2-1$

e) $n \mid a+3 \Rightarrow n \mid a^2+2a-3$
f) Zeige, daß n und n+1 teilerfremd sind.

AUFGABE 1.4 a) Zeige, daß nicht immer gilt: $a \mid c \wedge b \mid c \Rightarrow ab \mid c$. Welche Bedingung ist zu stellen, damit die Aussage immer gilt?
b) Beweise: Das Quadrat einer ungeraden Zahl läßt bei Division durch 8 den Rest 1.

AUFGABE 1.5 Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (1) $2 \mid n^2+n$ (2) $6 \mid n^3-n$ (3) $12 \mid n^4-n^2$

Im folgenden Beispiel führen wir ein wichtiges Beweisverfahren ein:
Sieht man sich die Zahlenbeispiele: $8-1=2^3-1=1\cdot 7$, $64-1=2^6-1=9\cdot 7$, $512-1=2^9-1=73\cdot 7$ usw. an, so könnte man die Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $7 \mid 2^{3n}-1$ (*) aufstellen.

Dabei ist Vorsicht geboten, denn man schließt ja von nur drei Beispielen auf unendlich viele Beispiele. Aber auch bei 999 Beispielen steht man nicht besser da, wie die falsche Aussage: „Alle natürlichen Zahlen sind kleiner als 1000." zeigt.
Wir zeigen deshalb die Aussage (*) in zwei Schritten. Vorher führen wir noch die Bezeichnung $a_n := 2^{3n}-1$ ein.

(I) (*) gilt für n=1, also $7 \mid 2^3-1$, was ja offensichtlich gilt
(II) (*) gilt für $a_{n+1}-a_n$: $a_{n+1}-a_n=(2^{3(n+1)}-1)-(2^{3n}-1)=2^{3n+3}-2^{3n}=2^{3n}\cdot 2^3-2^{3n}=2^{3n}(8-1)=$
$=7\cdot 2^{3n}$, als0 teilt 7 $a_{n+1}-a_n$

Mit (I) und (II) folgt nun $7 \mid a_2-a_1$ und daher mit (T6) $7 \mid a_2$. Dann folgt aber aus $7 \mid a_3-a_2$ wieder mit (T6) $7 \mid a_3$ usw.usw. Wir rollen das Feld also von unten auf. Man nennt einen solchen Beweis einen „Induktionsbeweis" (oder „Beweis durch Induktion").

AUFGABE 1.6 Beweise durch Induktion (berechne vorher für n=1,2,3):
a) $3 \mid n^3+2n$ b) $8 \mid 3^{2n}+7$ c) $9 \mid 10^n+3\cdot 4^{n+2}+5$ d) $3 \mid 4n^3-n$
e) $6 \mid n^3-n$ f) $6 \mid 7^n-1$ g) $3 \mid n^3-6n^2+14n$
h) $133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$ i) $9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$

SATZ 1.2 (nützliche Formeln zur Teilbarkeit);

Für alle $a,b \in \Re$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(F1) $(a^n-b^n):(a-b)=a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+...+a^2\cdot b^{n-3}+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}$

(F2) $(a^{2n}-b^{2n}):(a+b)=a^{2n-1}-a^{2n-2}b+-+-...+ab^{2n-2}-b^{2n-1}$

(F3) $(a^{2n+1}+b^{2n+1}):(a+b)=a^{2n}-a^{2n-1}b+-+-...-ab^{2n-1}+b^{2n}$

AUFGABE 1.7 a) Berechne α) $(x^7-y^7):(x-y)$ β) $(r^8-s^8):(r+s)$ γ) $(u^5+v^5):(u+v)$
b) Beweise mit Satz 1.2 die folgenden weiteren Teilbarkeitsregeln:
(T7) $x-1 \mid x^n-1$ (T8) $x+1 \mid x^{2n+1}+1$ (T9) $x+1 \mid x^{2n}-1$
Zeige dann, daß gilt: $7 \mid 8^n-1$ und $17 \mid 18^n-1$

AUFGABE 1.8 a) Zeige: (F4) $1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$ für $x\neq 1$.

b) Berechne damit die berühmte „Schachbrettaufgabe"

c) Auch die aus unendlich vielen Summanden bestehende Summe: $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, läßt sich mit F4 berechnen.
Berechne dazu erst mal einige „Teilsummen"
$s_1=\frac{1}{2}$; $s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; $s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$;… Schreibe dann die Teilsumme s_n auf (welches ist der letzte Summand?).
Überlege nun, was mit den auftretenden Zahlen passiert, wenn n immer größer wird.

AUFGABE 1.9 drei Aufgaben aus dem Jahr 1996 (beachte F1 - F4 und T7 - T9):

a) Es sei n=11..1122..22, wobei auf 1996 Einsen 1996 Zweien folgen. Zeige: $13.200 \mid n^3-3n^2-18n$.(Benütze die Quersummen–regeln, auch wenn sie erst später bewiesen werden!)

b) Es sei $s=6+6^2+6^3+...+6^{1996}$. Zeige: $1554 \mid s$.

c) Zeige: $1996 \mid 1+1995^{1995}$

<u>DEFINITION 1.2</u> Die Menge $T_n:=\{x \mid x \text{ ist Teiler von } n\}$ heißt „Teilermenge" von n. Die Anzahl der Elemente von T_n wird mit $\tau(n)$ bezeichnet.

AUFGABE 1.10 a) Bestimme $\tau(n)$ für n=40, 41, 345.684.

b) Vergleiche $\tau(n)$ von einigen Quadratzahlen mit $\tau(n)$ für Nichtquadrate. Welche Vermutung drängt sich auf? Beweis?

<u>DEFINITION 1.3</u> Eine Zahl $p\in\mathbb{N}$ heißt „Primzahl" genau dann, wenn $\tau(p)=2$ ist. Jede Zahl größer als 1, die nicht prim ist, heißt "zusammen- gesetzt".

SATZ 1.3 Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: (Der im folgenden angedeutete Beweis geht auf Euklid (ca. 300 v.Chr. zurück.)

Betrachte

$$2+1=3 \quad (1)$$
$$2\cdot3+1=7 \quad (2)$$
$$2\cdot3\cdot5+1=31 \quad (3)$$
$$2\cdot3\cdot5\cdot7+1=211 \quad (4)$$

Setze die Folge um drei weitere Zeilen fort. Warum ist z.B. die 4.Zeile weder durch 2 noch 3 noch 5 noch7 teilbar?
Ist das Ergebnis immer eine Primzahl?
Nun nehmen wir einmal an, es gäbe eine größte Primzahl P. Wie verhält es sich mit dem Zahl $z=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots P+1$? Unterscheide zwei Fälle.

Der folgende Satz ist sehr hilfreich, wenn man von einer Zahl entscheiden will, ob sie Primzahl ist oder nicht.

SATZ 1.4 Jede zusammengesetzte Zahl n besitzt einen Primteiler $p \leq \sqrt{n}$.

Beweis: Da n zusammengesetzt ist, besitzt n sicher einen Primteiler a mit $a \neq 1$ und $a \neq n$. Zu a existiert ein komplementärer Teiler b. Ist b nicht prim, so hat b einen Primteiler c mit $c \neq 1$ und $c \neq n$.
Ist b selbst prim, so kann nicht gelten $a > \sqrt{n}$ und $b > \sqrt{n}$, da sonst $a \cdot b > n$. Also ist entweder a oder $b \leq \sqrt{n}$. Den zweiten Fall (a, c) behandelt man entsprechend.

(Programme: TEILERNEU - PRIMITIV - ERATHOST - PRIMTEST)

Im Zusammenhang mit Primzahlen gibt es jede Menge ungelöster Probleme. Hier einige Stichpunkte:

- Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge bzw. -drillinge?
  Primzahlzwillinge sind zwei Primzahlen mit der Differenz 2.
  Primzahldrillinge sind nicht etwa drei Primzahlen p,p+2,p+4.
  Warum können nie drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen alle Primzahlen sein, wenn schon die erste größer als 3 ist?

- Liegt zwischen n und 2n mindestens eine Primzahl?
  Untersuche für n bis 500.

- Liegt zwischen n^2 und $(n+1)^2$ mindestens eine Primzahl?
  Untersuche bis n=50.

- Läßt sich jede gerade Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen schreiben (Goldbachsche Vermutung - nach Chr. Goldbach (1690-1764))?
  Warum äußerte Goldbach seine Vermutung nicht für ungerade Zahlen?

AUFGABE 1.11

a) Ermittle alle Primzahlzwillinge und -drillinge unter 200!
b) Schreibe (wenn möglich) alle Zahlen bis 50 als Summe zweier Primzahlen.
c) Suche alle MIRP-Zahlen unter 1000. Dies sind solche Primzahlen, bei denen auch die Spiegelzahl prim ist (z.B. 31 und 13 oder 11 und 11)
d) Wie viele Zahlen bleiben über, wenn man von den Zahlen von 1 bis 50.000 nacheinander alle Vielfachen der ungeraden Primzahlen streicht.
e) Welche der Zahlen, die sich als Produkt von genau zwei Primzahlen schreiben läßt, liegt am nächsten bei 100?

Der folgende Satz zeigt, wie man die Primalität (Primeigenschaft) einer Zahl geschickt ausnutzen kann:

Jede Primzahl p>2 läßt sich eindeutig als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

Beweis: Wir versuchen´s einfach mal: $p=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. Da p prim ist, muss einer der beiden Faktoren Eins sein (also x-y=1), während der andere p ist (also x+y=p). Das liefert ein LGS mit 2 Variablen: $x+y=p$
$x-y=1$

$\Rightarrow 2x=p+1 \wedge 2y=p-1 \Rightarrow x=\frac{p+1}{2} \wedge y=\frac{p-1}{2}$. Wir haben damit die beiden gesuchten Quadratzahlen gefunden: $p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

Diese Darstellung gilt übrigens für alle ungeraden Zahlen p, wie man leicht nachrechnet.

AUFGABE 1.12 a) Bestimme alle Primzahlen p, für die 4p+1 Quadratzahl ist. (Hinweis: Angenommen $4p+1=x^2 \Rightarrow$.....)
b) Zeige, das p=2 die einzige Primzahl p ist, für die gilt: $10 \mid (p+9)^2-1$

DEFINITION 1.4 Ist n>1, so heißt $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ mit Primzahlen $p_1<p_2<...<p_r$ und $\alpha_i \in \mathbb{N}$ die „Primfaktorzerlegung“ von n.
α_i heißt die „Vielfachheit“ von p_i.

Ein ganz wichtiger, dennoch leicht einleuchtender Satz ist der folgende Fundamentalsatz. In der Mathematik wird der Zahlbegriff später etwas erweitert. Dann ist die Aussage dieses Satzes schon gar nicht mehr so selbstverständlich. Wir geben den Satz hier ohne Beweis an.

Satz 1.5 **(Fundamentalsatz der Zahlentheorie)**

Jede natürliche Zahl n>1 besitzt eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Primfaktorzerlegung.

Beispiel: $980=10\cdot 98=(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 49)=2^2\cdot 5\cdot 7^2$
$980=20\cdot 49=(4\cdot 5)\cdot(7\cdot 7)= 2^2\cdot 5\cdot 7^2$
Wir haben die Zahl auf zwei verschiedenen Wegen zerlegt, die Ergebnisse sind dennoch gleich.

AUFGABE 1.13 Prüfe, welche der folgenden Produkte den selben Wert haben:
$a=10\cdot 11\cdot 44\cdot 78\cdot 210\cdot 385\cdot 847$ $b=15\cdot 26\cdot 28\cdot 40\cdot 77\cdot 99\cdot 363$
$c=14\cdot 18\cdot 20\cdot 22\cdot 90\cdot 121\cdot 1001$ $d=8\cdot 22\cdot 35\cdot 36\cdot 143\cdot 225\cdot 847$
$e=21\cdot 26\cdot 40\cdot 49\cdot 75\cdot 242\cdot 1331$

AUFGABE 1.14 Berechne x, y und z in:
a) $2^3\cdot 3^{x-1}\cdot 10\cdot 11=2640$ b) $24\cdot 3^{x-1}\cdot 5^y\cdot 7^{z+2}=9000$
c) $3\cdot 11^{x-3}\cdot 13^{y+1}=51.903$

Ein einfaches Beispiel soll uns nun zeigen, daß der Satz 1.5 nicht immer trivial ist:

Es sei $M:=\{x \mid x=4n+1 \text{ mit } n\in\mathbb{N}_0\}=\{1,5,9,13......\}$. Nehme ich zwei Zahlen aus M, also z.B. 4k+1 und 4l+1, so liegt wegen $(4k+1)\cdot(4l+1)=16kl+4k+4l+1=4(4kl+k+l)+1$ auch ihr Produkt in M (M ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.) Nun kann man sich fragen, welche der Zahlen von M sich wie $25=5\cdot5$ oder $45=5\cdot9$ in M zerlegen lassen. Die nicht zerlegbaren Zahlen von M nennen wir „irreduzibel“ (in M). Sie entsprechen den Primzahlen in $\mathbb{N}$.

a) Bestimme alle irreduziblen Zahlen in $M \leq 301$.
b) Zeige, dass 693 auf zwei verschiedenen Arten als Produkt irreduzibler Elemente von M dargestellt werden kann.
c) Versuche weitere Elemente dieser Art zu finden.

AUFGABE 1.15 a) Beweise: Ist n ungerade und n>2, so gilt $24 \mid n^3-n$
b) Ist p>5 prim so gilt $1920 \mid p^4-10p^2+9$
c) Für welche Primzahlen p ist 2p+1 eine Kubikzahl?
d) Das Produkt von drei Primzahlen ist gleich dem Siebenfachen ihrer Summe. Um welche Primzahlen handelt es sich?
e) Aus zwei verschiedenen natürlichen Zahlen a und b werden vier neue natürliche Zahlen gebildet: ihre Summe, ihr Produkt, die Differenz und der Quotient aus größerer und kleinerer Zahl. Die Summe der vier neuen Zahlen ist 243. Wie heißen die beiden Zahlen a und b?

Will man alle Teiler einer Zahl bestimmen, so kann man dies sehr systematisch über die Primfaktorzerlegung der Zahl tun. Ist z.B. die Zahl $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ gegeben, so ergeben sich die Teiler: $2^0\cdot3^0\cdot5^0$; $2^0\cdot3^0\cdot5^1$; $2^0\cdot3^1\cdot5^0$, $2^0\cdot3^1\cdot5^1$, $2^0\cdot3^2\cdot5^0$, $2^0\cdot3^2\cdot5^1$; $2^1\cdot3^0\cdot5^0$ usw. (die Teiler sind dann allerdings nicht nach Größe geordnet)
Im Endeffekt muß an alle möglichen Exponentenkombinationen aufspüren. Im Beispiel ergeben sich $4\cdot3\cdot2=24$ mögliche Teiler (einschließlich 1 und 360 - nicht geordnet).
Im allgemeinen Fall $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ ergeben sich also $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_r+1)$ mögliche Teiler.

SATZ 1.6	Hat n die Primfaktorzerlegung $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, so gilt für die Anzahl der Teiler von n: $\tau(n)=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_r+1)$.

AUFGABE 1.16 a) Bestimme $\tau(n)$ für n=32, 200, 9295
b) Ermittle alle Zahlen, die durch x teilbar sind und genau x Teiler haben, für α) x=11 β) x=6 γ) x=30
c) Ermittle alle Zahlen, die durch 30 teilbar sind und genau 70 Teiler haben.

AUFGABE 1.17 Achte bei den folgenden Aufgaben auf notwendige Fallunterscheidungen:

a) Bestimme alle $z<20.000$ mit $\tau(z)=45$.

b) Bestimme alle $z<20.000$ mit $\tau(z)=50$.

c) Eine Zahl z mit $10.000<z<20.000$ ist durch 30 teilbar. Bestimme z, wenn noch $\tau(z)=56$ gegeben ist. (4 Lösungen)

d) Warum gibt es kein z mit $\tau(z)=11$ und $z<1.000$?

DEFINITION 1.5 Für $n>1$ heißt $\sigma(n):=t_1+t_2+...+t_r$ mit $t_i \in T_n$ die „Teilersumme" von n. Dabei wird über alle Teiler von n summiert; also sind auch 1 und n unter den Summanden.

AUFGABE 1.18 a) Berechne $\sigma(n)$ für n=32, 200 und 9295.

b) Bestimme $\sigma(n)$ für alle Zahlen von 15 bis 32. Kannst Du eine Regel für Primzahlen erkennen?

AUFGABE 1.19 Beweise: $a+aq+aq^2+aq^3+...+aq^{n-1}= a\frac{q^n-1}{q-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}$ (vergleiche Aufgabe 1.8)

Berechne nun (1) 6+18+54+...+118.098 und (2) $144+72+36+ \quad \frac{9}{64}$

AUFGABE 1.20 a) Zeige an den Beispielen n=8 ,n=16 und n=27:

$$n \text{ prim} \Rightarrow \sigma(n^k)=\frac{n^{k+1}-1}{n-1}$$

Beweise diese Formel nun.

AUFGABE 1.21 Zeige an den Beispielen n=72 und n=2000 :

$$n=p^kq^l \wedge p,q \text{ prim} \Rightarrow \sigma(n)=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{l+1}-1}{q-1}$$

Beweise diese Formel nun.

SATZ 1.7 Hat n die Primfaktorzerlegung $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, so gilt :

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

Beweis: Nur kurz angedeutet: Man wendet i.P. mehrfach den Sachverhalt von Aufgabe 1.21 an.

DEFINITION 1.6 $\sigma^*(n):=\sigma(n)-n$ heißt „Summe der echten Teiler" von n (oder kurz „echte Teilersumme" von n)

AUFGABE 1.22 Berechne für die folgenden Zahlen n jeweils $\tau(n)$, $\sigma(n)$ und $\sigma^*(n)$.

a) n=128	b) n=31.104	c) n=3087
d) n=3.836.437.605	e) n=1184	f) n=10.935.925
g) n=1.084.730.902.983 (Tip: $1007\mid n$)		h) $n=3\cdot10^k$, $k\in\mathbb{N}$

AUFGABE 1.23 a) Eine Zahl n hat genau 8 Teiler. Sie ist kleiner als 50 und durch 7 teilbar. Berechne n.
b) Die Zahl $n=2^2\cdot 3^x\cdot 11^2$ hat 36 Teiler. Bestimme n.
c) Die Zahl $n=3^4\cdot 5^x$ hat die Teilersumme $\sigma(n)=3751$. Bestimme n.
d) Für eine Zahl n mit genau zwei Primfaktoren gelte $\tau(n^2)=81$. Berechne $\tau(n^3)$. (zwei mögliche Lösungen)

AUFGABE 1.24 a) Das Quadrat der Zahl $n=a^x b^y c^z$ (a,b,c prim; $x,y,z\in\mathbb{N}$) hat genau 455 Teiler. Bestimme $\tau(n)$. Bestimme dieses n, wenn zusätzlich bekannt ist: $9000 \mid n \wedge n<1.000.000$.
b) Bestimme k und l, wenn von $n=2^k\cdot 11^l$ (k,l>1) bekannt ist: $\sigma(n)=45.384$.

AUFGABE 1.25 a) Eine Zahl z mit 56 Teilern und drei verschiedenen Primfaktoren hat die Teilersumme 40.640. Bestimme z.

b) Eine Zahl z mit drei verschiedenen Primfaktoren und 30 Teilern hat die Teilersumme 52.514 und ist durch 36 teilbar. Berechne $\sigma^*(z)$!
c) Eine Zahl z mit 28 Teilern hat die Teilersumme 40.640 und ist durch 12 teilbar. Berechne z.
d) Eine Zahl z mit $\tau(z)=25$ ist durch 10 teilbar. Bestimme $\sigma(z)$.
e) Für $z=2^3\cdot p\cdot q$ (p,q prim) mit $\sigma(z)=540.960$ gilt, daß q um 270 größer als p ist. Berechne z.

<u>DEFINITION 1.7</u> Eine Zahl n>1 mit $\sigma(n)<2n$ (bzw. $\sigma^*(n)<n$) heißt „defizient“ .

Eine Zahl n>1 mit $\sigma(n)>2n$ (bzw. $\sigma^*(n)>n$) heißt „abundant“.

Eine Zahl n>1 mit $\sigma(n)=2n$ (bzw. $\sigma^*(n)=n$) heißt vollkommen“.

AUFGABE 1.26 Untersuche die Zahlen aus Aufgabe 1.22 auf Abundanz oder Defizienz.

AUFGABE 1.27 a) 12 ist abundant - untersuche 12k für k= 5, 14, 96
b) 10 ist defizient - untersuche 10k für k=2, 3, 4, 5, 6

AUFGABE 1.28 Suche zu jedem der folgenden Kriterien für Abundanz und Defizienz drei mindestens zweistellige Beispiele und verifizere damit:

SATZ 1.8 Im Folgenden seien p und q (wie immer) Primzahlen.
Eine Zahl n ist defizient, wenn

a) n eine Primzahlpotenz ist. ($n=p^r$)
b) $n=p\cdot q$ mit p, $q\geq 3$ ist.
c) $n=p^r\cdot q^s$ mit p, $q\geq 3$ uns r,s ≥ 1 ist.
d) n ein Produkt von bis zu 6 Primzahlpotenzen mit $p_i>3$ ist.
e) $n=3^k\cdot 5\cdot 7$ mit k<3 ist.
f) $n=2^k\cdot p$ mit $p\geq 3$ und $2^{k+1}<p+1$ ist.

SATZ 1.9 Eine Zahl n ist abundant, wenn

a) n ein Vielfaches einer vollkommenen Zahl ist.
b) n ein Vielfaches einer abundanten Zahl ist.
c) $n=2^k \cdot p$ mit $p \geq 3$ und $2^{k+1}>p+1$ ist.
d) $n=2^k \cdot p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$ ist und für mindestens ein $p_i>3$ gilt: $2^{k+1}>p_i+1$
e) $n=3^k \cdot 5 \cdot 7$ mit $k \geq 3$ ist.
f) die Primfaktorzerlegung von n den Faktor: $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ enthält.

AUFGABE 1.29 Untersuche die folgenden Zahlen mit Hilfe der Sätze 1.8 und 1.9 auf Abundanz und Defizienz. Berechne jeweils auch σ.

a) 2835	b) 243	c) 66	d) 391	e) 2184
f) 100	g) 186	h) 104	i) 107.653	
j) 463.287.825				

AUFGABE 1.30 Untersuche alle Zahlen von 5500 bis 5520 mit Hilfe der Sätze 1.8 und 1.9 auf Abundanz, Defizienz und Vollkommenheit.
(ebenso für die Zahlen von 15500 bis 15510)

AUFGABE 1.31 a) Die Zahl $n=2^x \cdot 11^y$ hat genau 21 Teiler und ist abundant.
Bestimme $\sigma(n)$.

b) Für die Zahl $n=a^x \cdot b^y \cdot c^z$ (a,b,c prim; $1 \leq x \leq y \leq z$) gelte: $\tau(n^3)=1729$.
Bestimme $\tau(n)$ und $\tau(n^2)$.

AUFGABE 1.32 Beweise: n ist abundant, wenn n Produkt von mindestens drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist.

BEWEISE, BEWEISE, BEWEISE

Hier sollen die Beweise zu den Kriterien für Abundanz und Defizienz aus den Sätzen 1.8 und 1.9 nachgeholt werden.

ad 8a Wir haben zu zeigen $\sigma(p^r)<2\cdot p^r$. Wir formen diese Aussage zunächst äquivalent um:

$$\sigma(p^r)=\frac{p^{r+1}-1}{p-1}<2p^r \quad \vert\cdot(p-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad p^{r+1}-1<2p^{r+1}-2p^r$$
$$\Leftrightarrow \quad 2p^r-1<p^{r+1} \qquad (*)$$

Um die Aussage zu beweisen, reicht es also, die umgeformte Aussage (*) aus einer allgemeingültigen Aussage abzuleiten. Einen Hinweis für eine geeignete Aussage liefert (*) nach Division durch p^r: $2-\frac{1}{p^r}<p$. $\frac{1}{p^r}$ ist unbedeutend klein - daher versuchen wir es mit der für alle akzeptablen Aussage:

$$2\leq p \quad \text{(p prim!)}$$
$$\Rightarrow \quad 2p^r\leq p^{r+1}$$
$$\Rightarrow \quad 2p^r-1<p^{r+1} \qquad \text{- und das ist Aussage (*).}$$

Damit ist der Beweis vollständig. Man beachte den „Trick“ in der letzten Zeile: die „kleiner-Seite“ einer Ungleichung kann man getrost noch kleiner machen, ohne etwas am Wahrheitsgehalt der Ungleichung zu verändern (natürlich kann man ebenso die „größer-Seite“ vergrößern).

ad 8b Wir beginnen mit einer in Mathematikerkreisen beliebten Floskel: oBdA (d.h. ohne Beschränkung der Allgemeinheit (des Beweises)) gelte $2<p<q$. Wir haben zu zeigen $\sigma(pq)<2pq$. Leicht stellt man fest, dass pq nur die Teiler 1,p,q und pq hat. Wir formen also um:

$$\sigma(pq)<2pq$$
$$\Leftrightarrow \quad 1+p+q+pq<2pq$$
$$\Leftrightarrow \quad 1+p+q<pq \qquad (*)$$

Da $p>2$ ist, können wir ersetzen: $p=2+n$ mit $n\geq 1$. Damit gilt:

$$pq=(2+n)\cdot q=2q+nq=q+q+nq>p+q+nq>p+q+1 \quad \text{- das ist (*)!}$$

Dabei gilt das erste „>“ wegen $q>p$ und das zweite wegen $nq>1$.

In diesem und auch im nächsten Beweis benötigen wir zwei Hilfssätze, die vorweg bewiesen werden sollen.

HS1: $1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^k}<\frac{p}{p-1}$

Beweis: Der linke Teil der Ungleichung läßt sich mit der Summenformel zur geometrischen Reihe (A 1.8) zusammenfassen:

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^k}=\frac{1-\left(\frac{1}{p}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}}\cdot\frac{p}{p-1}<1\cdot\frac{p}{p-1}<\frac{p}{p-1}$$

Man beachte, daß der Zähler im ersten Bruch nach dem zweiten „=“-Zeichen kleiner ist als der Nenner und damit der Bruch kleiner als 1 ist.

HS2: $a_n := \frac{n}{n-1}$ ist streng monoton fallend (d.h. die Glieder der Folge werden mit größer werdenden n immer kleiner).

Beweis: $\frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$. Mit zunehmendem n wird n-1 größer und der Summand, der zu 1 addiert wird, deshalb immer kleiner.

ad 8c Nach Aufgabe 1.21 wissen wir : $\sigma(p^r \cdot q^s) = \sigma(p^r) \cdot \sigma(q^s)$. Dann gilt:

$$\sigma(p^r \cdot q^s) < 2 \cdot (p^r \cdot q^s)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sigma(p^r) \cdot \sigma(q^s) < 2 \cdot (p^r \cdot q^s)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sigma(p^r) \cdot \sigma(q^s)}{p^r q^s} < 2 \qquad (*)$$

Wir beweisen nun wieder die äquivalente Ungleichung (*):

$$\frac{\sigma(p^r) \cdot \sigma(q^s)}{p^r q^s} = \frac{1+p+p^2+\ldots+p^r}{p^r} \cdot \frac{1+q+q^2+\ldots+q^s}{q^s} =$$

$$\left(\frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^{r-1}} + \frac{1}{p^{r-2}} + \ldots + \frac{1}{p} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{s-1}} + \ldots + \frac{1}{q} + 1\right) \overset{HS1}{<} \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \overset{HS2}{<} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2$$

Würde man bei der letzten Abschätzung mit p=2 beginnen, so wäre das Produkt nicht mehr kleiner als 2. Dies erklärt die Bedingung $p,q \geq 3$ in Satz 8c.

ad 8d Der Beweis von Satz 8d läuft analog zu dem von 8c:

$$\frac{\sigma\left(p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_6^{r_6}\right)}{p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_6^{r_6}} = \frac{\sigma\left(p_1^{r_1}\right)}{p_1^{r_1}} \cdots \frac{\sigma\left(p_6^{r_6}\right)}{p_6^{r_6}} = \frac{1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}}{p_1^{r_1}} \cdots \frac{1+p_6^2+\ldots+p_6^{r_6}}{p_6^{r_6}} =$$

$$= \left(\frac{1}{p_1^{r_1}} + \ldots + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{p_6^{r_6}} + \ldots + 1\right) < \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_6}{p_6 - 1} \qquad \text{(HS1)}$$

$$< \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \approx 1{,}95 < 2$$

Am letzten Produkt erhellt sich, warum ausgerechnet 6 Faktoren zulässig sind: für einen weiteren Faktor müßte man mit $\frac{23}{22}$ multiplizieren, was aber einen Wert von ca. 2,04 > 2 erzeugen würde.

Natürlich ist man bei der Abschätzung teilweise etwas grob: der Satz 8d besagt nicht etwa, dass ein Produkt von mehr als 6 Primfaktoren größer als drei nicht defizient sein könnte, wie man z.B. am Beispiel der Zahl $n = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$ sieht, die 7 Primfaktoren zum Trotz defizient ist. Satz 8d sagt lediglich, dass im Fall von sechs oder weniger Primfaktoren größer 3 die Zahl immer defizient ist.

ad 8e $\quad \sigma(3^k \cdot 5 \cdot 7) = \frac{3^{k+1} - 1}{3-1} \cdot 6 \cdot 8 = (3^{k+1}-1) \cdot 24$

$$\Rightarrow \sigma(n) - 2n = 24(3^{k+1}-1) - 2 \cdot 3^k \cdot 5 \cdot 7 = 24 \cdot 3^{k+1} - 24 - 70 \cdot 3^k = 72 \cdot 3^k - 70 \cdot 3^k - 24$$

$$\Rightarrow \sigma(n) - 2n = 2 \cdot 3^k - 24 \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow 3^k < 12 \Leftrightarrow k < 2 \text{ (d.h. n ist defizient)} \\ > 0 \Leftrightarrow 3^k > 12 \Leftrightarrow k > 2 \text{ (d.h. n ist abundant)} \end{cases}$$

Wir haben damit zugleich 1.9e bewiesen!

ad 8f $\sigma(n)=\sigma(2^k\cdot p)=(2^{k+1}-1)(p+1)$

$$\Rightarrow\sigma(n)-2n=2^{k+1}\cdot p+2^{k+1}-p-1-2\cdot 2^k\cdot p=2^{k+1}-p-1$$

$$\Rightarrow\sigma(n)-2n \begin{cases} <0 \Leftrightarrow 2^{k+1}<p+1 \text{ (also n defizient)} \\ >0 \Leftrightarrow 2^{k+1}>p+1 \text{ (also n abundant)} \\ =0 \Leftrightarrow 2^{k+1}=p+1 \text{ (also n vollkommen)} \end{cases}$$

Die letzte Zeile liefert noch ein später benötigtes interessantes Ergebnis: $n=2^k\cdot p$ ist vollkommen genau dann, wenn $p=2^{k+1}-1$ und prim ist.

ad 9a Es sei n vollkommen, also $\sigma(n)=2n$, mit $T_n=\{1,t_2,t_3,...,t_r\}$. Dann hat ein echtes Vielfaches $k\cdot n$ von n mindestens die Teiler k, kt_2 ,kt_3,...,kt_r. (Beispiel: $T_6=\{1,2,3,6\}$ - $T_{3\cdot 6}=\{3,6,9,18,..\}$).Von diesen Teilern ist aber sicher keiner gleich 1. Damit ergibt sich:

$$\sigma(kn)\geq 1+k+kt_2+...+kt_r=1+k(1+t_2+...+t_r)=1+k\cdot\sigma(n)>k\cdot\sigma(n)=k\cdot 2n=2\cdot kn$$

ad 9b kann von 1.9a beinahe direkt übernommen werden

ad 9c siehe Beweis 1.8f

ad 9d folgt aus 1.9b und 1.9c

ad 9e siehe 1.8e

ad 9f folgt unten

Die Sätze 9a und 9b besagen, dass man aus jeder abundanten bzw. vollkommenen Zahl durch Vielfachenbildung unendlich viele abundante Zahlen konstruieren kann. Umgekehrt gibt es zu jeder abundanten Zahl n eine kleinste abundante oder eine vollkommenen Zahl, deren Vielfaches n ist. Wir wollen eine solche Zahl A-Wurzel von n nennen.

DEFINITION 1.8	n heißt „A-Wurzel“, wenn n vollkommen ist oder wenn n abundant ist und keinen abundanten oder vollkommenen Teiler besitzt.

Die kleinste A-Wurzel ist die Zahl 6, die nächste 20, die folgenden sind 28, 70, 88, 104...

Jede dieser Zahlen ist also der Quell einer unendlichen Menge von abundanten Zahlen, die durch die Wurzel in der Primfaktorzerlegung ihren Stempel aufgeprägt bekommen. Nehmen wir die ersten 6 dieser A-Wurzeln, so können wir formulieren:

> n ist abundant, wenn die Primfaktorzerlegung von n die Faktoren $2\cdot 3$ oder $2^2\cdot 5$ oder $2^2\cdot 7$ oder $2\cdot 5\cdot 7$ oder $2^3\cdot 11$ oder $2^3\cdot 13$ enthält .

Alle diese Kriterien könnte man auch mit 1.9d herleiten. So ergibt sich als nächste A-Wurzel $z=2^4\cdot 17=272$, danach $Z=2^4\cdot 19=304$ usw...

Nun stellt sich die Frage nach ungeraden A-Wurzeln. Ein erstes Kriterium liefert 1.9e: $z=3^3\cdot 5\cdot 7=945$ ist die erste ungerade abundante Zahl. Die nächsten sind 1575, 2205 ,2835, 3465,...

Alle diese Zahlen sind Vielfache von 315, was eine intensivere Beschäftigung mit dieser Zahl sinnvoll erscheinen läßt:

$945=3\cdot 315 \qquad 1575=5\cdot 315 \qquad 2205=7\cdot 315$

Sind alle Primvielfachen von 315 abundant und damit A-Wurzeln?

Es sei also p>7: $\sigma(315\cdot p)=\sigma(315)\cdot\sigma(p) =624\cdot(p+1)>2\cdot 315\cdot p$

$\Leftrightarrow\ 624p+624>630p \qquad \Leftrightarrow\ 624>6p \qquad \Leftrightarrow\ 104>p$

Also sind nicht alle Primvielfachen von 315 A-Wurzeln, jedoch alle bis p=103:
$3^3\cdot 5\cdot 7 \qquad 3^2\cdot 5^2\cdot 7 \qquad 3^2\cdot 5\cdot 7^2 \qquad 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11 \qquad 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13 \qquad \ldots \qquad 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 103$
sind A-Wurzeln.

Damit ist auch 9 f bewiesen.

Mit dem eben vorgeführten Ansatz kann man übrigens weitere ungerade A-Wurzeln suchen. Ist aber 3 nicht mehr in der Primfaktorzerlegung enthalten, so sind nach 8d mindestens 7 verschiedene Primfaktoren nötig.

AUFGABE 1.33 Suche A-Wurzeln unter den Primvielfachen von 36465.

Zusätzliche Aufgaben zu Kapitel 1

1) Ermittle eine Zahl n so, daß sowohl n als auch n-24 als auch n+24 eine Quadratzahl ist.

2) Ermittle alle Primzahlen p, für die 3p+4 eine Quadratzahl ist.