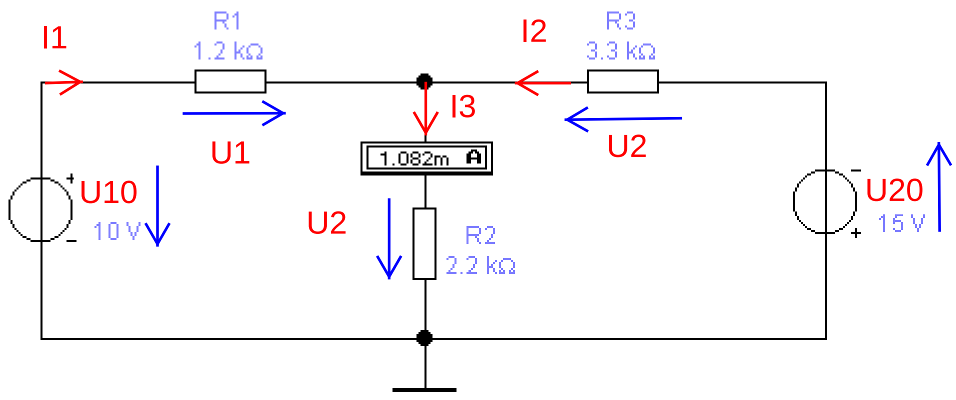
Thema: Rechnen mit Matrizen Einstiegsbeispiele

1. Beispiel: Netzwerkberechnungen mit den Kirchhoff'schen Gesetzen

Schaltung:



$U_{10} := 10 \cdot V \quad U_{20} := 15 \cdot V \quad R_1 := 1.2 \cdot k\Omega \quad R_2 := 2.2 \cdot k\Omega \quad R_3 := 3.3 \cdot k\Omega$

Mit Hilfe der **Kirchhoff'schen Gesetze** über Maschen und Knoten erhalten wir:

M1: $I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_2 - U_{10} = 0$ M2: $I_2 \cdot R_3 + I_3 \cdot R_2 + U_{20} = 0$

K1: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$$I_3 = I_1 + I_2$$

M1: $I_1 \cdot R_1 + (I_1 + I_2) \cdot R_2 - U_{10} = 0$ M2: $I_2 \cdot R_3 + (I_1 + I_2) \cdot R_2 + U_{20} = 0$

$(R_1 + R_2) \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = U_{10}$ $R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_2 = -U_{20}$

Dieses Gleichungssystem lösen wir mit den zugehörigen **Koeffizientenmatizen.**

Wir erhalten eine **Widerstandsmatrix** und eine **Spannungsmatrix,** die sich auf eine Vektordarstellung reduziert.

$$R := \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} U_{10} \\ -U_{20} \end{pmatrix}$$

Die **Matrix R** hat **zwei Zeilen und zwei Spalten**. Die **Matrix U** hat **zwei Zeilen und eine Spalte**.

Nach dem ohmschen Gesetz: $I = \frac{U}{R}$

Wir müssten die Spannung U durch den Widerstand R dividieren. Das ist mit Matrizen nicht möglich. Allerdings können wir die **inverse Martrix** einsetzten. Es gilt:

$$R^{-1} = \frac{1}{R}$$

$$I := R^{-1} \cdot U$$

Als Ergebnis erhalten wir eine **Strommatrix,** die sich auch hier auf die Vektorschreibweise reduziert.

$$I = \begin{pmatrix} 6.349 \\ -5.267 \end{pmatrix} \mathrm{mA}$$

$$I_1 := I_{1,1} \qquad I_2 := I_{2,1}$$

$$I_1 = 6.349\,\mathrm{mA} \qquad I_2 = -5.267\,\mathrm{mA}$$

$$I_3 := I_1 + I_2 \qquad I_3 = 1.082\,\mathrm{mA}$$

Die übrigen Größen:

$$U_1 := I_1 \cdot R_1 \qquad U_1 = 7.619\,\mathrm{V} \qquad U_2 := I_2 \cdot R_2 \qquad U_2 = -11.587\,\mathrm{V} \qquad U_3 := I_3 \cdot R_3 \qquad U_3 = 3.571\,\mathrm{V}$$

$ORIGIN \equiv 1$