Beweis für $\mu = n\,p$ als Erwartungswert einer Binomialverteilung

Allgemein ist der Erwartungswert: $\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Bei der Binomialverteilung gilt:

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

Binomialkoeffizient wird ausführlich aufgeschrieben

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

Der erste Summand ist Null, kann weggelassen werden,

wir starten dann nicht mit k=0, sondern mit k=1

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

Das k wird gegen das k in k! gekürzt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot p^n =$$

Der letzte Summand wird aus der Summe herausgezogen

$$n\,p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} + p^{n-1}\right) =$$

Die Faktoren n und p werden ausgeklammert

$$n\,p \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot (k)!} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k-1} + p^{n-1}\right) =$$

Die Laufvariable k läuft nun statt von 1 bis n – 1 von 0 bis n – 2

$$n\,p \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot (k)!} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k-1}\right) =$$

Der letzte Summand wird wieder in die Summe eingefügt

$$n\,p \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-1)-k}\right) =$$

Der Bruch wird wieder als Binomialkoeffizient geschrieben

Die Summe stellt die Aufsummation **aller** Werte einer Binomialverteilung dar, ist folglich 1.

$n\,p$ quod erat demonstrandum