3.7 Das Vektorprodukt

Während das **Skalar**produkt $\vec{a} \circ \vec{b}$ zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ eine **reelle Zahl** zuordnet, ergibt das **Vektor**produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ einen **Vektor** $\vec{c}$. Es wurde festgelegt, dass $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist. Für $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ gilt daher:

$\vec{a} \circ \vec{c} = 0 \wedge \vec{b} \circ \vec{c} = 0$. Ein Vektor, der diese Bedingung erfüllt, ist $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$.

Definition: Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ nennt man $\vec{a} \times \vec{b}$ das **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Für den Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ gilt dabei: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ im IR^3 gilt:

(a) $\vec{c}$ ist zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ orthogonal.

(b) $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem (vgl. „Rechte-Hand-Regeln“ in der Physik).

(c) Für den Betrag von $\vec{c}$ gilt: $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ mit $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

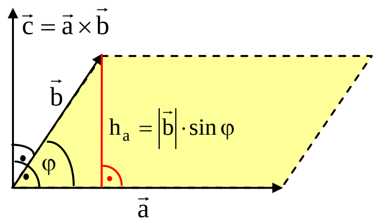
Geometrische Bedeutung von (c)

Der Betrag von $\vec{c}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Begründung: Flächeninhalt des Parallelogramms: $A_P = |\vec{a}| \cdot h_a$

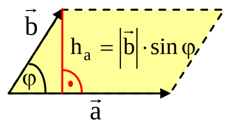
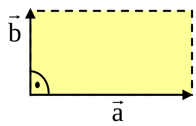
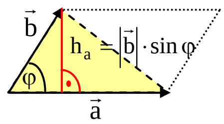
Mit $h_a = |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ folgt: $A_P = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

Also gilt nach (c): $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$



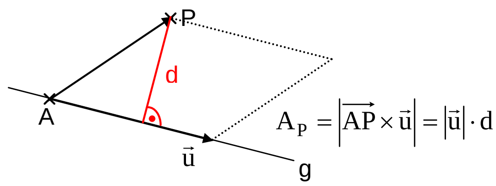
Anwendungen des Vektorprodukts

1. Flächenberechnungen:

	Parallelogramm	Rechteck	Dreieck
			
Geometrische Grundformel	$A_P = \|\vec{a}\| \cdot h_a$	$A_R = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$	$A_D = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{a}\| \cdot h_a$
mit Vektorprodukt	$\boxed{A_P = \|\vec{a} \times \vec{b}\|}$	$\boxed{A_R = \|\vec{a} \times \vec{b}\|}$	$\boxed{A_D = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\|}$

2. Lineare Abhängigkeit zweier Vektoren: $\boxed{\vec{a}, \vec{b} \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$

3. Abstand eines Punktes P von einer Geraden g: $\boxed{d(P; g) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}}$



wichtige Rechenregeln

1) $\boxed{(r \cdot \vec{a}) \times (s \cdot \vec{b}) = r \cdot s \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}$ mit $r, s \in IR$

2) $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}}$ *Kommutativgesetz gilt nicht!*

3) $\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})}$ *Distributivgesetz gilt!*

4) $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \det(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})}$ Verknüpfung von Vektorprodukt und Skalarprodukt