Darstellungsformen einer Ebene im R³

Umrechnungsmöglichkeiten

Beispiel 1: (Von einer Parametergleichung zu einer Koordinatengleichung)

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ erhält man $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + r + 2s \\ 2 - 2r + 5s \\ 1 + 3r + 7s \end{pmatrix}$, also $\begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 2s \\ x_2 &= 2 - 2r + 5s \\ x_3 &= 1 + 3r + 7s \end{aligned}$.

Man formt so um, dass in einer Gleichung die Parameter wegfallen:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 2s \\ x_2 &= 2 - 2r + 5s \\ x_3 &= 1 + 3r + 7s \end{aligned}\right., \text{ also } \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 2s \\ 2x_1 + x_2 &= 6 + 9s \\ -3x_1 + x_3 &= -5 + s \end{aligned}\right., \text{ also } \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2 + r + 2s \\ 2x_1 + x_2 &= 6 + 9s \\ 29x_1 + x_2 - 9x_3 &= 51 \end{aligned}\right..$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E ist $29x_1 + x_2 - 9x_3 = 51$.

Beispiel 2: (Von einer Koordinatengleichung zu einer Parametergleichung)
Bestimmen Sie eine Parametergleichung von E: $3x_1 - x_2 + 7x_3 = 12$.
Lösung:
Man löst zuerst die Koordinatengleichung z. B. nach x_2 auf: $x_2 = -12 + 3x_1 + 7x_3$.

Man ergänzt die Gleichung zu:
$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + x_1 + 0 \\ x_2 &= -12 + 3x_1 + 7x_3 \\ x_3 &= 0 + 0 + x_3 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Parametergleichung der Ebene E ist also:
$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Beispiel 3: (Koordinatengleichung aus drei Punkten bestimmen)
Die Punkte $A(1|1|0)$, $B(1|0|1)$ und $C(0|1|1)$ legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E.

Lösung:
Eine Koordinatengleichung von E hat die Form $a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$. Setzt man jeweils die Koordinaten der Punkte A, B und C in die Gleichung ein, dann erhält man das LGS:

$$\begin{cases} a + b \phantom{{}+c} = d \\ a \phantom{{}+b} + c = d \\ \phantom{a+{}} b + c = d \end{cases}$$

. Aus dem LGS folgt: $2a = 2b = 2c = d$. Setzt man z. B. $d = 2$, so erhält man $a = b = c = 1$. Eine Koordinatengleichung der Ebene E ist also: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

Aufgaben

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene **E**.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$