Ableitung der Winkelfunktionen

Das Verständnis der Herleitung der Ableitung der Winkelfunktionen setzt einiges an Mittelstufenkenntnissen voraus; das meiste davon wird häufig im Unterricht geschlabbert oder nur unzureichend behandelt, und zwar aus Zeitgründen. Folgende Punkte sind wichtig:

1. Bogenmaß statt Winkelmaß
2. Definition der Winkelfunktionen (sin, cos, tan)
3. Additionstheoreme

Besonders der letzte Punkt wird meistens geschlabbert. Bei den Additionstheoremen geht es um folgende Formeln:

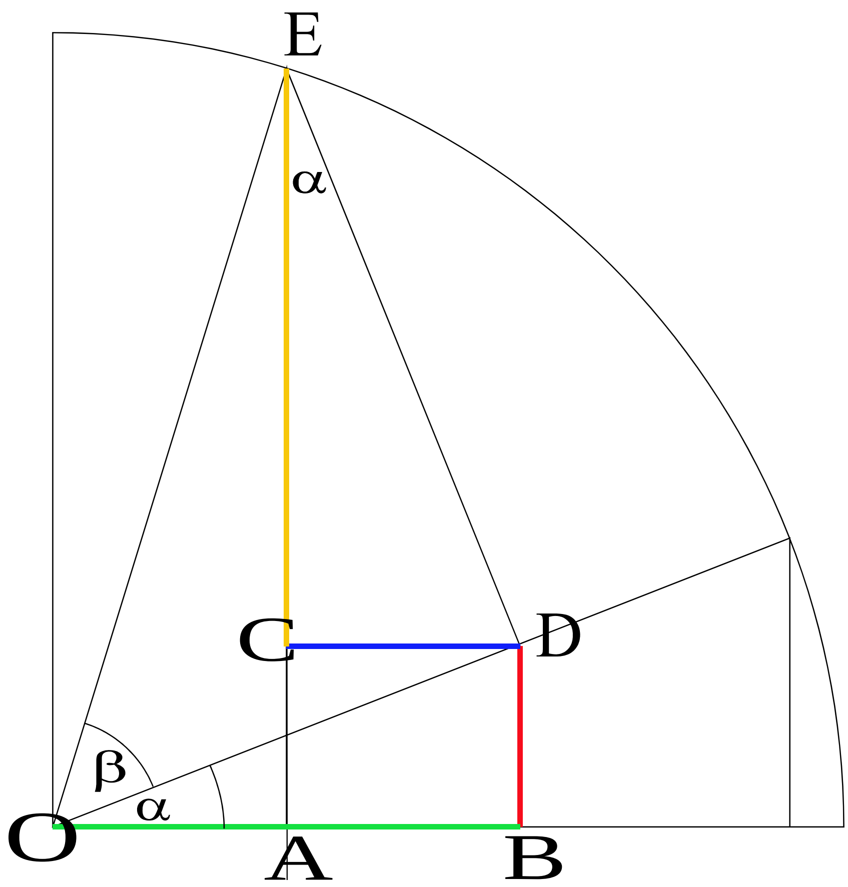
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Man findet diese Formeln in jeder besseren Formelsammlung. Im folgenden sollen diese Formeln hergleitet werden für den Fall, daß die Winkel α und β sowie auch ihre Summe $\alpha + \beta$ zwischen 0° und 90° liegen. In diesem Falle können wir auf die schlichten Definitionen

$$\text{sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \text{und} \qquad \text{cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

zurückgreifen. Die Formeln sollen anhand einer Zeichnung hergeleitet werden:



Die Strecke $\overline{DE}$ soll senkrecht zu $\overline{OD}$ stehen. Dann kann man sich leicht (?) davon überzeugen, daß der Winkel α oben beim Punkt E noch einmal auftaucht.

Der Viertelkreis habe den Radius r = 1 (Einheitskreis), dann ist offenbar

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{DE}}{\overline{OE}} = \overline{DE}$$

und

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} = \overline{OD} ,$$

denn $\overline{OE}$ ist der Radius, also 1.

Als nächstes kann man sich jetzt die Längen der vier farbig gezeigten Strecken über die Sinus- bzw. Cosinusdefinition herleiten.

Beachte Dreieck OBD: rot und grün (bereits oben gezeigt: $\overline{OD} = \cos(\beta)$)

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{BD} = \sin(\alpha) \cdot \overline{OD} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OB} = \cos(\alpha) \cdot \overline{OD} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

Beachte Dreieck ECD: blau und gelb (bereits oben gezeigt: $\overline{DE} = \sin(\beta)$)

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{CD} = \sin(\alpha) \cdot \overline{DE} = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{CE} = \cos(\alpha) \cdot \overline{OD} = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Aus diesen Einzelstrecken können wir nun die entscheidenden Strecken zusammensetzen:

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{BD} + \overline{CE} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{CD} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

fertig!

Jetzt müßte man diesen Beweis verallgemeinern für die anderen Fälle, daß zum Beispiel $\alpha + \beta$ über 90° groß ist, oder daß ein Winkel negativ ist, oder einer oder sogar beide über 90° groß sind usw. Diese Verallgemeinerungen sind natürlich alle möglich, sie gehen nach demselben Schema, an dieser Stelle wollen wir uns damit begnügen, daß diese hier nicht gezeigten Verallgemeinerungen des Beweises alle möglich sind.

Man kann mit diesen beiden Formeln etwas jonglieren, um weitere Beziehungen herzuleiten. Als erstes ersetzt man in (1) und (2) β durch $-\beta$. Dabei muß man beachten, daß der cos eine gerade Funktion ist, d.h. sein Vorzeichen nicht wechselt, denn es gilt $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$; dagegen ist der sin eine ungerade Funktion, d.h. er ändert sein Vorzeichen, denn es gilt $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$. Beides kann man sich am Einheitskreis klar machen. Wenn man diese Ersetzungen macht, erhält man statt (1) und (2):

(3) $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

(4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Man kann jetzt diese Gleichungen nach Bedarf kombinieren; wir brauchen für später (1) – (3):

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) - \big(\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\big),$$

also

$$(*) \qquad \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta).$$

Soweit die Sache mit den Additionstheoremen.

Zur Erinnerung: $\quad f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Also müssen wir jetzt zuerst den Differenzenquotienten bilden und anschließend herausfinden, was passiert, wenn wir x gegen a streben lassen.

Der Differenzenquotient für die Sinusfunktion lautet $\dfrac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$.

Der Zähler soll nun mit Hilfe der Formel (*) umgeformt werden.

Dazu setzen wir $x = \alpha + \beta$ und $a = \alpha - \beta$. Diese beiden Gleichungen kann man durch Addieren und Subtrahieren nach α und β auflösen; man erhält $\alpha = \dfrac{x+a}{2}$ und $\beta = \dfrac{x-a}{2}$.

Wenn man jetzt in (*) α und β durch x und a ersetzt, erhält man

$$(**) \qquad \sin(x) - \sin(a) = 2\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right).$$

Damit kann man nun den Zähler im Differenzenquotienten ersetzen:

$$\frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \frac{2\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$$

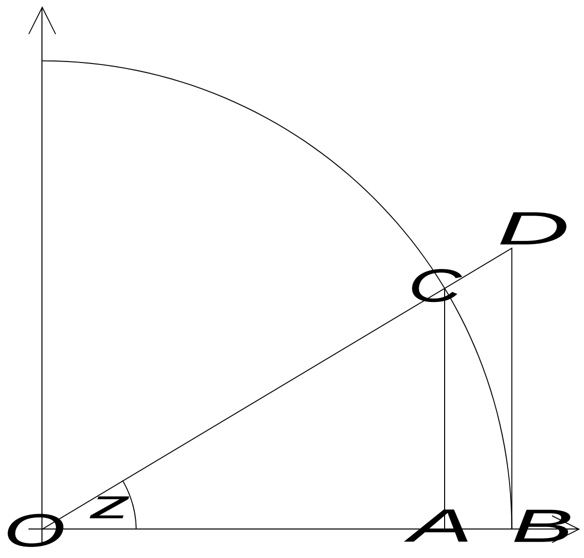
$$= \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$$

An dieser Stelle sollten wir uns daran erinnern, daß wir zum Schluß x gegen a streben lassen ; dann erkennen wir aber jetzt schon, daß der erste Faktor des Produktes gegen cos(a) strebt. Heikel ist allerdings der zweite Faktor; denn sowohl der Zähler als auch der Nenner gehen gegen Null, und es nicht so leicht einzusehen, wogegen dann der Bruch strebt.

Im letzten Schritt soll gezeigt werden, daß der Bruch im Falle, daß x gegen a strebt, immer mehr auf den Wert 1 zuwandert.

Um mir im folgenden Schreibarbeit zu ersparen, setze ich als Abkürzung $z = \frac{x - a}{2}$. Dann habe ich den Bruch $\frac{\sin(z)}{z}$ für kleine z zu untersuchen. (Genau genommen werden wir z gegen 0 streben lassen.) Dabei muß jetzt beachtet werden, daß die Argumente der Winkelfunktionen als Bogenmaß eingegeben werden müssen.

Wieder der Einheitskreis:



Drei Teilflächen sind jetzt für uns entscheidend:

1. Dreieck OAC

Wegen $\overline{OA} = \cos(z)$ und $\overline{AC} = \sin(z)$ beträgt seine Fläche $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \cos(z) \cdot \sin(z)$

2. Dreieck OBD

Nach 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{OB} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}.$$

Also folgt ganz schlicht $\overline{BD} = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \left(= \tan(z)\right)$

Also hat das Dreieck OBD die Fläche $A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

Zwischen diesen beiden Flächen liegt der Größe nach

3. Der Kreissektor OBC.

Für seine Fläche gilt $A_2 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\varphi}{360°} = \frac{\pi \cdot \varphi}{360°}$. (Denn es ist r = 1.)

Dabei ist φ derjenige Winkel in normalem Winkelgrad gemessen, der zu dem Winkel z gehört. Nun wird z in Bogenmaß gemessen, d.h. z ist genau so lang wie der Kreisbogen BC, sofern der Kreis den Radius r = 1 hat. (Ansonsten muß man diesen Kreisbogen noch durch r teilen.) Nun können wir diesen Kreisbogen aber auch durch φ ausdrücken: es gilt also

$$z = \overset{\frown}{BC} = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\varphi}{360°} = \frac{\pi \cdot \varphi}{180°}$$

Also folgt $A_2 = \frac{1}{2} \cdot z$.

Diese einfache Formel für die Fläche eines Kreissektors ist ein weiteres Argument dafür, Winkel durch Bogenmaß auszudrücken!

Nun gilt, wie man deutlich an der Zeichnung sieht:

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3.$$

Die erste dieser beiden verketteten Ungleichungen für die drei Flächen liefert

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(z) \cdot \sin(z) \leq \frac{1}{2} \cdot z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin(z)}{z} \leq \frac{1}{\cos(z)}$$

Die zweite dieser beiden Ungleichungen liefert

$$\frac{1}{2} \cdot z \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \Leftrightarrow \quad \cos(z) \leq \frac{\sin(z)}{z}.$$

Diese beiden Ergebnisse kann man wie folgt zusammenfassen:

$$\cos(z) \leq \frac{\sin(z)}{z} \leq \frac{1}{\cos(z)}$$

Nun können wir ablesen, was mit dem Bruch $\frac{\sin(z)}{z}$ passiert, wenn wir z auf 0 zustreben lassen. Denn für z = 0 ergibt der cos den Wert 1, also muß, da die linke und die rechte Seite demselben Grenzwert zustreben und der Bruch immer dazwischen liegt, der Bruch aus gegen 1 streben. Da das so wichtig ist, schreibe ich

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\sin(z)}{z} = 1.$$

Damit bin ich jetzt fertig, denn wir erhalten

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \cos\left(\frac{x + a}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x - a}{2}\right)}{\frac{x - a}{2}} = \cos(a) \cdot \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\sin\left(\frac{x - a}{2}\right)}{\frac{x - a}{2}}$$

$$= \cos(a) \cdot \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\sin(z)}{z} = \cos(a) \cdot 1 = \cos(a)$$

Die Ableitung des cos macht man über die Verwandtschaft mit dem sin: $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$ bzw. $\cos(z) = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$. (Kann man sich am besten am rechtwinkligen Dreieck klarmachen. Dann folgt nach der Kettenregel:

$$[\cos(z)]' = [\sin(\tfrac{\pi}{2} - z)]' = \cos(\tfrac{\pi}{2} - z) \cdot (-1) = -\sin(z)$$

Und der Tangens:

$$[\tan(z)]' = \left[\frac{\sin(z)}{\cos(z)}\right]' = \frac{\sin'(z) \cdot \cos(z) - \sin(z) \cdot \cos'(z)}{\cos^2(z)}$$

$$= \frac{\cos(z) \cdot \cos(z) - \sin(z) \cdot (-\sin(z))}{\cos^2(z)}$$

$$= \frac{\cos^2(z) + \sin^2(z)}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(z)} \text{ bzw.} = 1 + \tan^2(z)$$

Man kann also die Ableitung des Tangens auf zwei Arten angeben. Bei der ersten benutzt man die Gleichung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, die in Verbindung mit dem Einheitskreis direkt aus dem Satz des Pythagoras folgt.