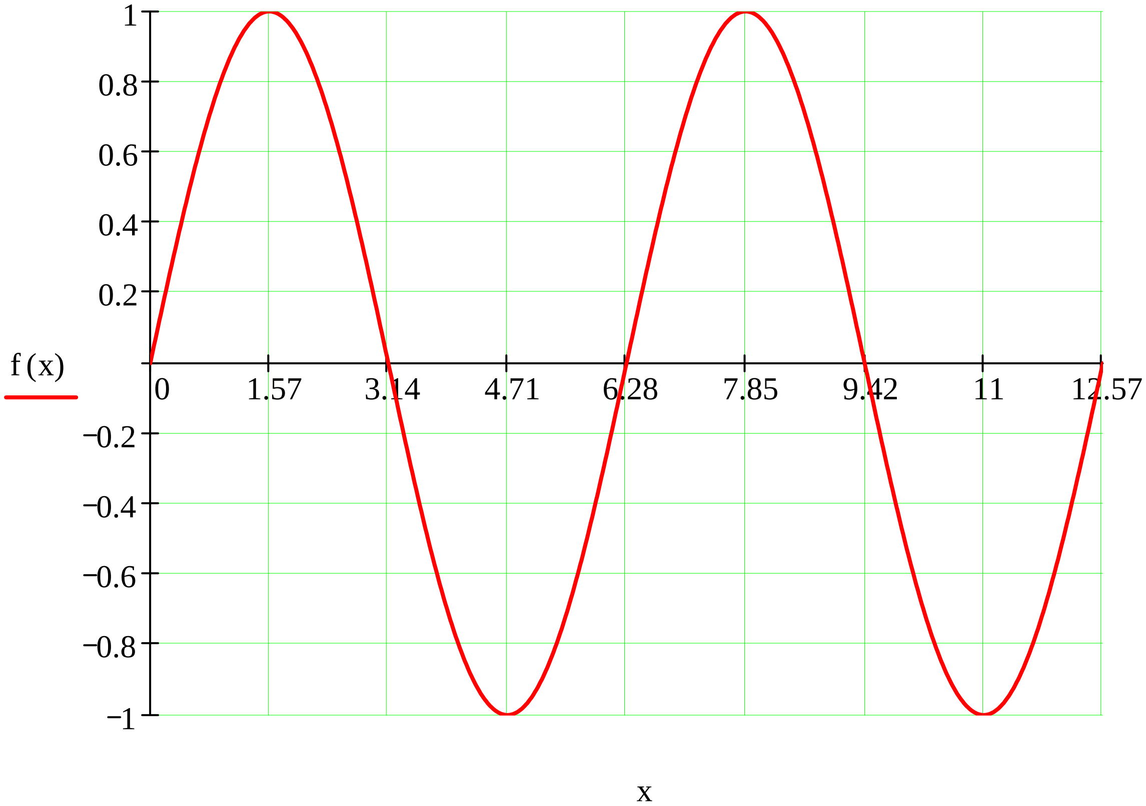
Thema: Die Ableitung der Winkelfunktionen

$x := 0 \cdot \text{Grad}, 1 \cdot \text{Grad} .. 720 \cdot \text{Grad}$ $\qquad f(x) := \sin(x)$



Durch ein graphisches Differenzieren erhalten wir:

$f'(1.57) = f'(4.71) = f'(7.85) = usw = 0$

$$m_{t1} := \frac{f(3.14) - f(3.15)}{3.14 - 3.15} \qquad m_{t1} = -1$$

$$m_{t2} := \frac{f(6.28) - f(6.27)}{6.28 - 6.27} \qquad m_{t2} = 1$$

Es liegt die Vermutung nahe, dass sich dieser Zusammenhang fortsetzt.
In den **Nullstellen** liegt immer eine **Steigung von +1 oder -1** vor.

Somit könnte die Steigungfunktion die gleichen Kurvenmerkmale aufweisen, wie die ursprüngliche Funktion f. Alle Merkemale treten nur "verschoben um 1,57 =π/2" auf. Dann wäre die **Ableitungsfunktion eine cos-Funktion.**

Wir untersuchen den Sachverhalt genauer. Dazu benötigen wir die folgenden Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - \sin(x_0)}{\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(x_0)\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right) + \cos(x_0)\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(x_0)}{\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - x_0}$$

Mit: $\lim_{n \to \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ vereinfachen $\to 1$ klar, oder????

und $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ erhalten wir: (Näherungsbetrachtung für sehr kleine x-Werte, siehe Einheitskreis)

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(x_0)\cdot 1 + \cos(x_0)\cdot\frac{1}{n} - \sin(x_0)}{\frac{1}{n}}$$

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cos(x_0)\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \cos(x_0)$$

$$\boxed{f'(x_0) = \cos(x_0)}$$