Thema: Die Ableitung der Logarithmusfunktion

$f(x) = \log_a(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\text{RSG } n \to \infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{(x_0 + \frac{1}{n}) - x_0}$$

oder $$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

- allg. Ans.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$

Mit $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m) - \log_a(n)$ $$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \frac{x_0}{x_0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{x_0} \frac{x_0}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right)$$

Mit $k = \frac{x_0}{h}$ gilt $(h \to 0 \Rightarrow k \to \infty)$ $$= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{x_0} k \log_a\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$$

$\log_a(m^n) = n \log_a(m)$ $$= \frac{1}{x_0} \lim_{k \to \infty} \left(\log_a \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}_{e \to e}\right)$$

Mit $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $$= \frac{1}{x_0} \log_a e$$

$\log_a e = x \Leftrightarrow a^x = e$ $$= \frac{1}{x_0 \ln a}$$

$\Rightarrow x \ln a = \ln e = 1$

$\Rightarrow \log_a e = \frac{1}{\ln a}$ $$\boxed{f'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a}}$$

$f(x) = a^x$

$f(x) = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$f'(x) = (x \cdot \ln a)' \cdot e^{x \ln a}$

$f'(x) = \ln a \cdot \left(e^{\ln a}\right)^x$

$f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Sonderfall

$f(x) = \ln(x)$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \cdot \underbrace{\log_e e}_{1} = \frac{1}{x_0}, \text{ allg. } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Ableitung der e-Fkt. 1

$f(x) = e^x = y \iff x \cdot \ln e = \ln y$

$x = \ln y = \ln(e^x)$

$\bar{f}(f(x)) = x$

$\ln(e^x) = x$

$\cancel{\bar{f}'(y) \cdot f'(x) = 1}$

$\cancel{\bar{f}'(e^x)}$

$\ln'(e^x) \cdot e'^x = 1$

$$e'^x = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = e^x$$

$\ln(\underbrace{e^x}_{=f(x)}) = x$

$f'(x) \cdot \frac{1}{e^x} = 1$

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$