Die Gültigkeit der bernoullischen Ungleichung wird auf Seite 247 in Beispiel 2 gezeigt.

Der Nachweis der Konvergenz wird mithilfe des Satzes über die Konvergenz monotoner und beschränkter Funktionen geführt, d. h., es wird gezeigt, dass (a_n) streng monoton steigend und beschränkt ist. Dazu benötigt man die so genannte **bernoullische Ungleichung**:

$$\boxed{(1+x)^n > 1 + n \cdot x \quad \text{für } n > 1,\ x \neq 0 \text{ und } 1 + x > 0.}$$

(1) **(a_n) ist streng monoton steigend.**

Es gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Daraus ergibt sich nach der bernoullischen Ungleichung:

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1.$$

Es gilt also $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Da $a_n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$, folgt daraus $a_{n+1} > a_n$.

(2) **(a_n) ist beschränkt.**

Es wird zunächst die Folge (b_n) mit $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ betrachtet, wobei $a_n < b_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
Die Folge (b_n) ist streng monoton fallend. Es gilt nämlich

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1},$$

woraus folgt: $\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$

Es gilt also $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$. Da $b_n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$, folgt daraus $b_n > b_{n+1}$.
Da (a_n) streng monoton steigend, (b_n) streng monoton fallend und zudem $a_n < b_n$ ist, gilt $a_n < b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Damit ist (a_n) nach oben beschränkt.

LEONHARD EULER (1707–1783) veröffentlichte 1743 eine Abhandlung über den Grenzwert
$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$
er nannte ihn e.

e = 2,718281828459
045235360287
471352662497
757247093699
959574966967
627724076630
353547594571 …

Satz: Die Folge (a_n) mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist konvergent. Ihr Grenzwert ist eine irrationale Zahl und heißt **eulersche Zahl e**. Es ist $e \approx$ **2,71828**.

Und wie hoch ist der tatsächliche Jahreszinssatz bei einer Verdopplung in 8 Jahren?

Beispiel: (Tägliche Verzinsung)

Ein Kapital von 1000 € verdoppelt sich nach 8 Jahren. Dies sind 100 % in 8 Jahren. Berechnen Sie, welche Höhe das Kapital nach 8 Jahren erreichen würde, wenn die einem Tag entsprechende durchschnittliche Kapitalerhöhung direkt dem Kapital als Tageszins zugeführt würde. Wie hoch wäre das Kapital nach 8 Jahren bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

Die Verdopplung des Kapitals nach 8 Jahren entspricht einem täglichen Zinssatz von $p = \frac{100}{8\cdot 360} = \frac{100}{2880} \approx 0{,}0347$. Daraus erhält man bei täglicher Zinszahlung nach 8 Jahren:
$K_{2880} = 1000\cdot\left(1+\frac{100}{2880\cdot 100}\right)^{2880} = 1000\cdot\left(1+\frac{1}{2880}\right)^{2880} \approx 2717{,}81$; also knapp 2718 €.
Bei stetiger Verzinsung erhält man nach 8 Jahren $1000\cdot e$ €, also etwas mehr als 2718 €.

Aufgaben

2 Ein Kapital von 100 € wird für 5 Jahre angelegt. Geben Sie die Höhe des Kapitals nach dieser Zeit in einer Tabelle an bei einem Zinssatz $p\,\% = 5\,\%$ oder $p\,\% = 15\,\%$ sowie jährlicher, halbjährlicher, vierteljährlicher, monatlicher oder täglicher Zinsberechnung.

3 Jemand möchte sein Kapital in 12 Jahren verdoppeln.
Die Bank A bietet an: 1,51 % Zins je Vierteljahr, Bank B 3,1 % Zins je Halbjahr. Verdoppelt sich in beiden Fällen das Kapital nach 12 Jahren? Welche Verzinsung ist günstiger?