Nachweis der Monotonie einer Folge

Eine Folge ist monoton **steigend**, wenn gilt: $a_n \leq a_{n+1}$

Subtrahiert man a_{n+1}, so ergibt sich $\boxed{a_n - a_{n+1} \leq 0}$

Teilt man die Ungleichung durch a_{n+1}, so gilt: $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 \text{ für } a_{n+1} > 0}$ oder $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \text{ für } a_{n+1} < 0}$.

Eine Folge ist monoton **fallend**, wenn gilt: $a_n \geq a_{n+1}$

Subtrahiert man a_{n+1}, so ergibt sich $\boxed{a_n - a_{n+1} \geq 0}$

Teilt man die Ungleichung durch a_{n+1}, so gilt: $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \text{ für } a_{n+1} > 0}$ oder $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 \text{ für } a_{n+1} < 0}$.

Diese Beziehungen kann man ausnutzen, um die Monotonie nachzuweisen, wie hier am Beispiel der Folge $a_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ gezeigt wird:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{2^{(n+1)+1}}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1} \cdot 3 - 2^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1} \cdot (3-2)}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \geq 0$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{2^{(n+1)+1}}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3}{2} \geq 1$$ Beide Methoden zeigen: Die Folge ist monoton fallend.

Nachweis der Beschränktheit einer Folge

Eine Folge ist nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl S gibt, so dass für alle n gilt $a_n \leq S$.
Eine Folge ist nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl s gibt, so dass für alle n gilt $a_n \geq s$.
Ist eine Folge nach oben und unten beschränkt, so heißt sie „beschränkt“.

Beispiel: Ist die Folge $a_n = \frac{n}{3n-2}$ beschränkt? Vermutung: S=1 , s=0.

Nachweis für S: $\frac{n}{3n-2} \leq 1 \;\Rightarrow\; n \leq 3n-2 \;\Rightarrow\; 2 \leq 2n \;\Rightarrow\; 1 \leq n$. Da die letzte Ungleichung gültig ist, ist 1 obere Schranke.

Nachweis für s: $\frac{n}{3n-2} \geq 0 \;\Rightarrow\; n \geq 0$. Auch das ist gültig, also ist 0 untere Schranke.
Ob man damit die kleinstmögliche obere Schranke und die größtmögliche untere Schranke ermittelt hat, ist durch diese Rechnung nicht zu entscheiden. (1/3 ist die größtmögliche untere Schranke)

Grenzwert einer Folge

Jede monotone Folge, die beschränkt ist, hat einen Grenzwert, d. h. einen Wert, dem sich die Folgenglieder unendlich nahe annähern.

Anschaulich: Ist eine Folge monoton steigend und beschränkt, dann gibt es einen Grenzwert g mit folgender Eigenschaft: Für jede Zahl, die kleiner als g ist, und wenn sie noch so dicht an g liegt, finden sich unendlich viele Folgenglieder, die noch dichter als diese Zahl an g liegen.

Benennt man den Abstand zwischen dieser Zahl und g mit dem griechischen Buchstaben ε , dann gilt also $a_n > g - \varepsilon$ für unendlich viele n, allerdings erst ab einem ganz bestimmten n_0 .

Beispiel: $\frac{4n-3}{2n}$ ist eine monoton steigende und beschränkte Folge. Der Grenzwert ist 2.
Nachweis: Ab einem bestimmten n_0 muss für alle größeren n gelten: $a_n > 2 - \varepsilon$.
Also: $\frac{4n-3}{2n} > 2 - \epsilon \Rightarrow 4n - 3 > 4n - 2n\epsilon \Rightarrow -3 > -2n\epsilon \Rightarrow 2n\epsilon > 3 \Rightarrow n > \frac{3}{2\epsilon}$.
Man sieht, dass man zu jedem noch so kleinen ε ein n_0 findet, das diese Ungleichung erfüllt. Und für alle größeren n gilt diese Ungleichung dann erst recht. Die Folgenglieder nähern sich also unendlich nahe an den Wert 2 an.
Für z. B. $\epsilon = \frac{1}{200}$ gilt $n > \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{200}} = \frac{3 \cdot 200}{2} = 300$, d. h. von n_0=300 an sind alle weiteren Folgenglieder näher als 1/200 am Grenzwert 2.

Gegenbeispiel: 3 ist nicht der Grenzwert der Folge:
$\frac{4n-3}{2n} > 3 - \epsilon \Rightarrow 4n - 3 > 6n - 2n\epsilon \Rightarrow -3 > 2n - 2n\epsilon \Rightarrow -3 > n \cdot (2 - 2\epsilon) \Rightarrow \frac{-3}{2 - 2\epsilon} > n$.
Da man durch $2 - 2\epsilon$ teilt, gilt die letzte Ungleichung nur für $\epsilon < 1$. Sonst hätte das Zeichen > in das Zeichen < abgeändert werden müssen.
Da es aber darauf ankommt, das Verhalten der Folge möglichst dicht am „Grenzwert“ zu untersuchen, ist die oben angegebene Ungleichung die hier benötigte.
Man sieht, dass für ein bestimmtes ε höchstens endlich viele Folgenglieder die Bedingung erfüllen.
Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ z. B. müsste $n < -3$ sein, was für kein n zutrifft, d. h. zwischen $3 - \frac{1}{2} = 2{,}5$ und 3 gibt es kein Folgenglied.