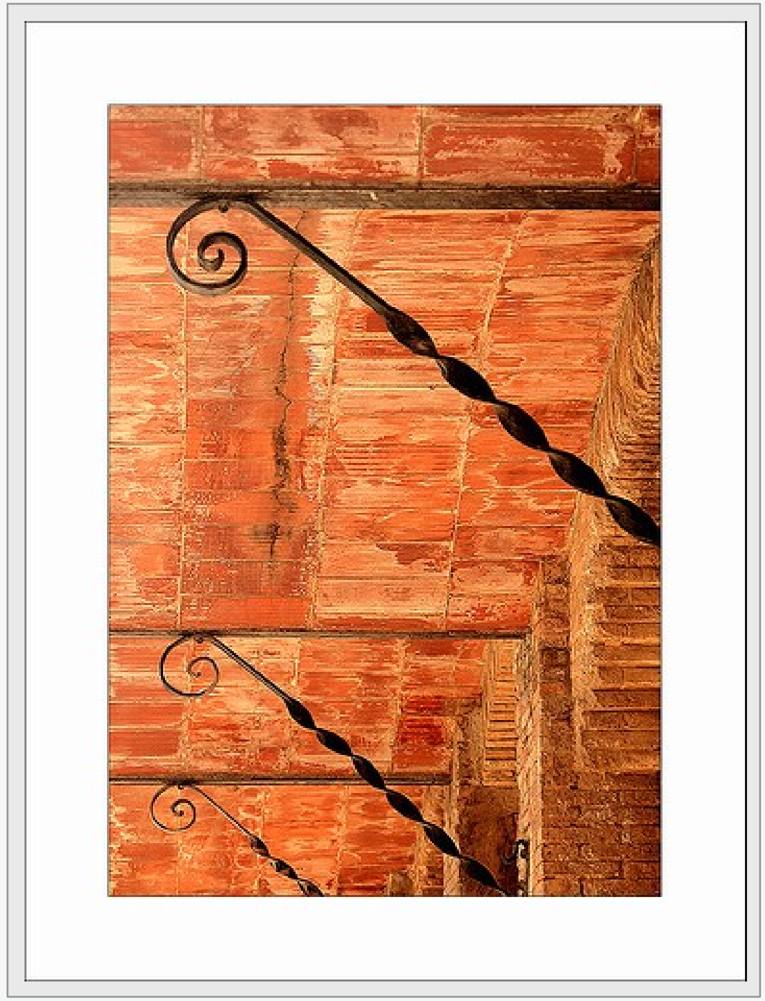
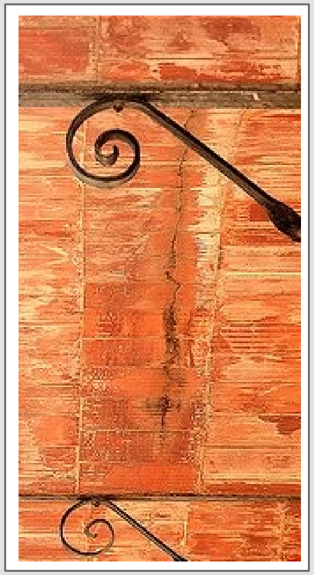


http://www.flickr.com/photos/sigfrid/163021434/

Beschränkte Folgen



Eine Folge heißt beschränkt, wenn es zwei reelle Zahlen s und S gibt, so dass

$$s \leqslant a_n \leqslant S \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Die s bzw. S heißen untere bzw. obere Schranke der Folge. Wenn es für die Folge keine untere oder obere Schranke gibt, so heißt sie unbeschränkt.

Beispiele:

1. $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \ldots \qquad 0 < a_n \leqslant 1$

2. $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\rangle = 1, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ -\frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \ldots$

$$-\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 1$$

Die Folge der Pendelausschläge ist eine beschränkte Folge. Die Folgenglieder werden weder größer als 10 noch kleiner als - 10, d.h. $S = 10$ bzw. $s = -10$ ist obere bzw. untere Schranke.

Da jede Zahl $S \geq 10$ odere Schranke für die Folge der Pendelausschläge ist, gibt es also unendlich viele obere Schranken. Entsprechendes gilt für die unteren Schranken ($s \leq -8$). Jede beschränkte Folge besitzt unendlich viele obere bzw. untere Schranken.

Bestimmen Sie für die beschränkte Folgen untere bzw. obere Schranke

Aufgabe 1: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

Aufgabe 2: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

Aufgabe 3: $a_n = 2 + \dfrac{1}{n}$

Aufgabe 4: $a_n = \sqrt{3+n}$

Aufgabe 5: $a_n = (-1)^n \cdot 2$

Aufgabe 6: $a_n = 10 \cdot 0.8^{\,n-1}$

Aufgabe 7: $a_n = 10 \cdot (-0.8)^{\,n-1}$

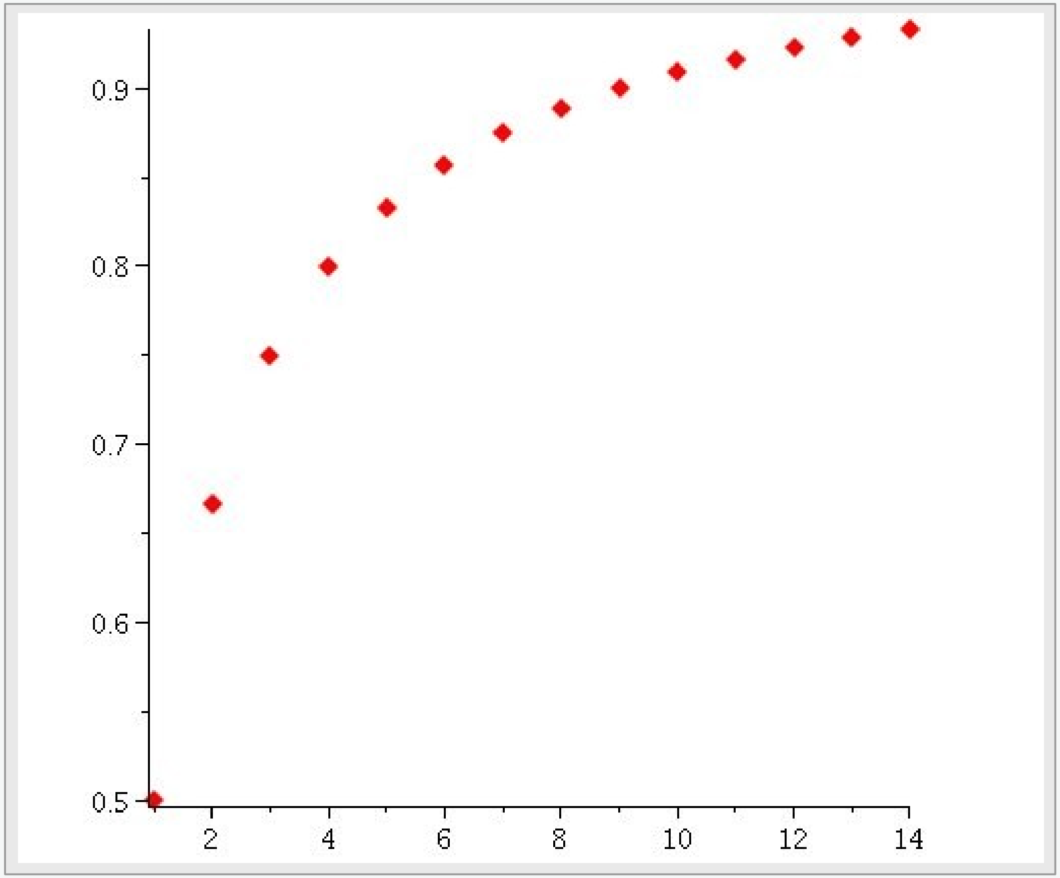


Abb. 1: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle = \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ \frac{5}{6}, \ \frac{6}{7}, \ \ldots$$

$$s = \frac{1}{2}, \qquad S = 1\,, \qquad \frac{1}{2} \leqslant a_n < 1$$

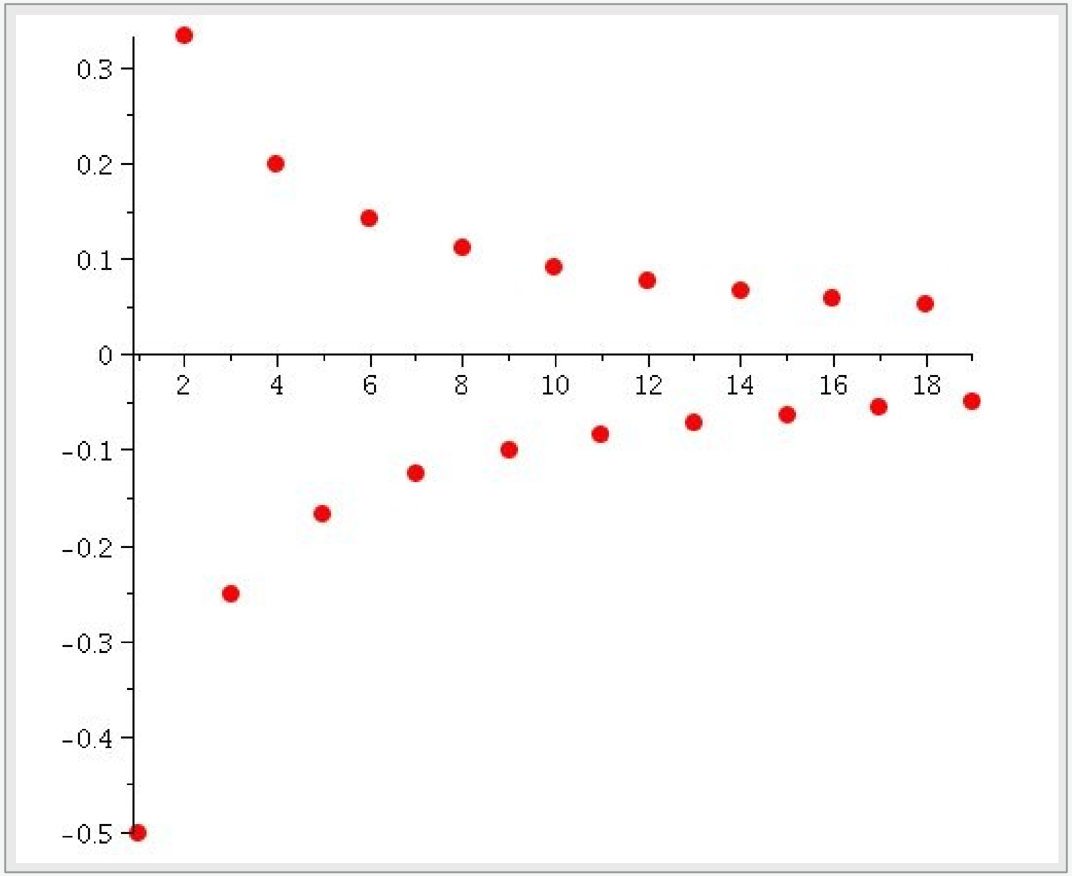


Abb. 2: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n+1} \right\rangle = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \dots$$

$$s = -\frac{1}{2}, \qquad S = \frac{1}{3}, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{3}$$

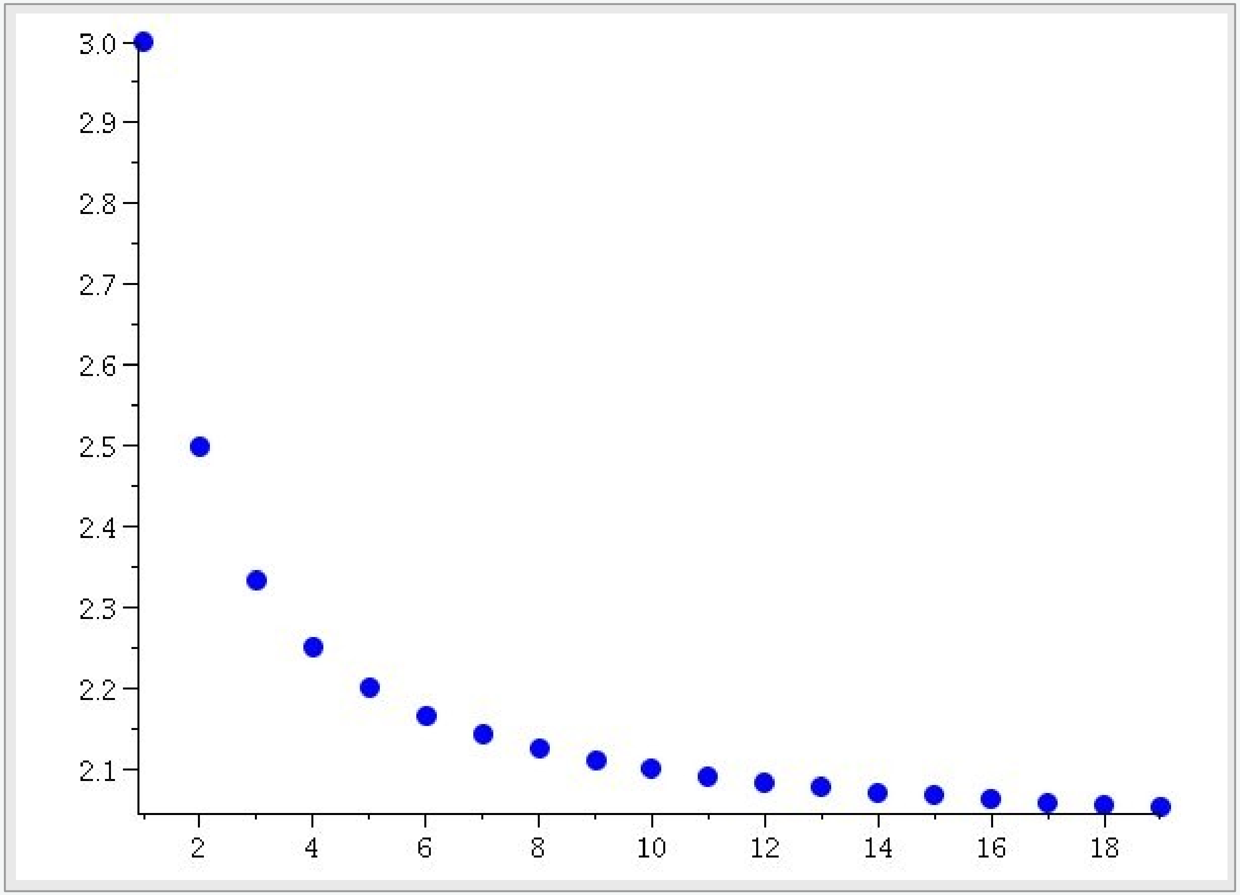


Abb. 3: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle 2 + \frac{1}{n} \right\rangle = 3\,, \ \frac{5}{2}\,, \ \frac{7}{3}\,, \ \frac{9}{4}\,, \ \frac{11}{5}\,, \ \frac{13}{6}\,, \ \dots$$

$$s = 2\,, \qquad S = 3\,, \qquad 2 < a_n \leqslant 3$$

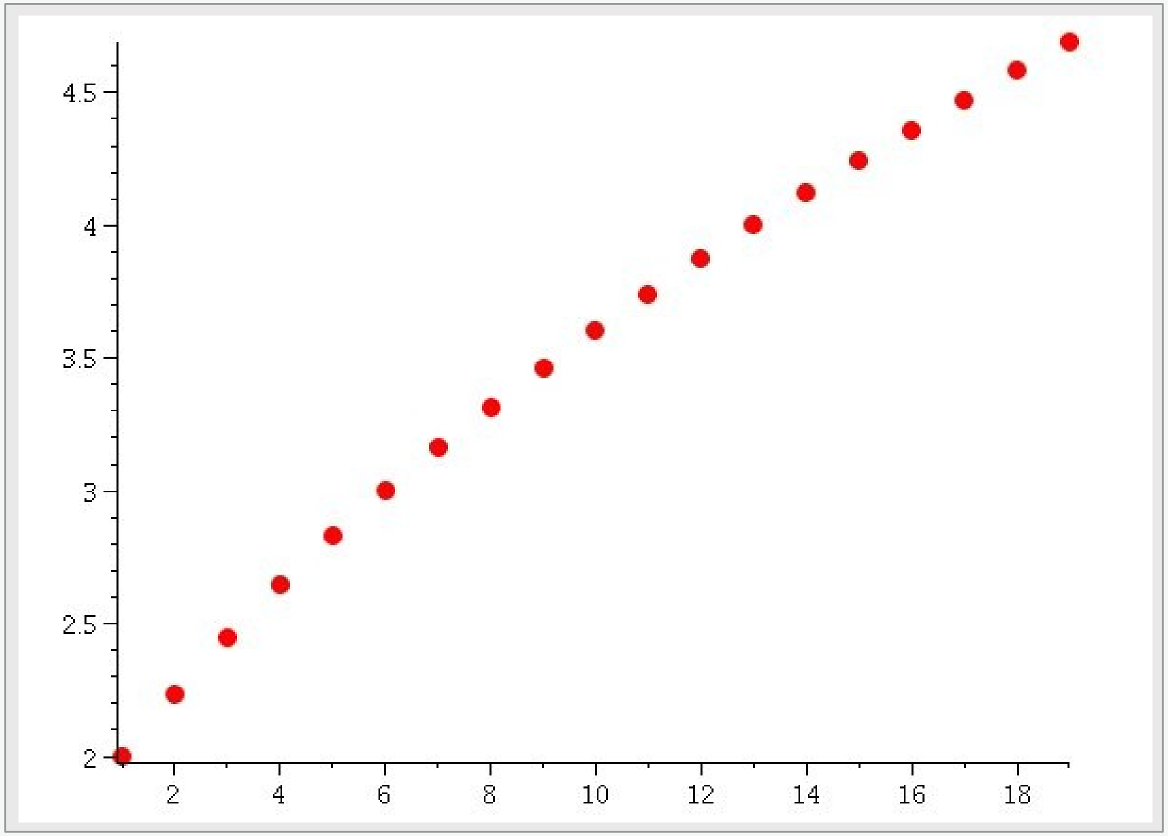


Abb. 4: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \sqrt{3 + n} \right\rangle = 2\,, \ \ \sqrt{5}\,, \ \ \sqrt{6}\,, \ \ \sqrt{7}\,, \ \ 2\sqrt{2}\,, \ \ 3\,, \ \ \sqrt{10}\,, \ \ldots$$

$$s = 2\,, \qquad 2 \leqslant a_n$$

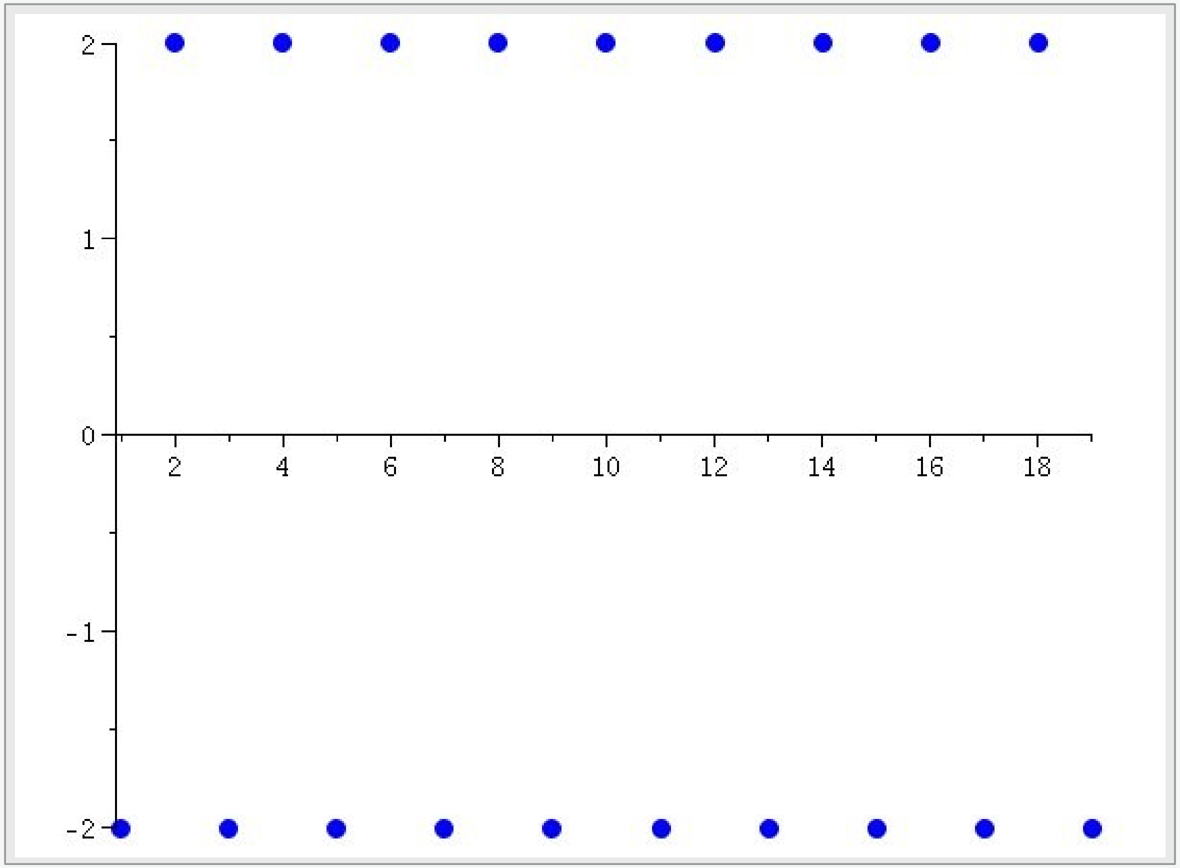


Abb. 5: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle (-1)^n \; 2 \right\rangle = -2\,, \;\; 2\,, \;\; -2\,, \;\; 2\,, \;\; -2\,, \;\; 2\,, \;\; -2\,, \;\; \ldots$$

$$s = -2\,, \qquad S = 2\,, \qquad -2 \leqslant a_n \leqslant 2$$

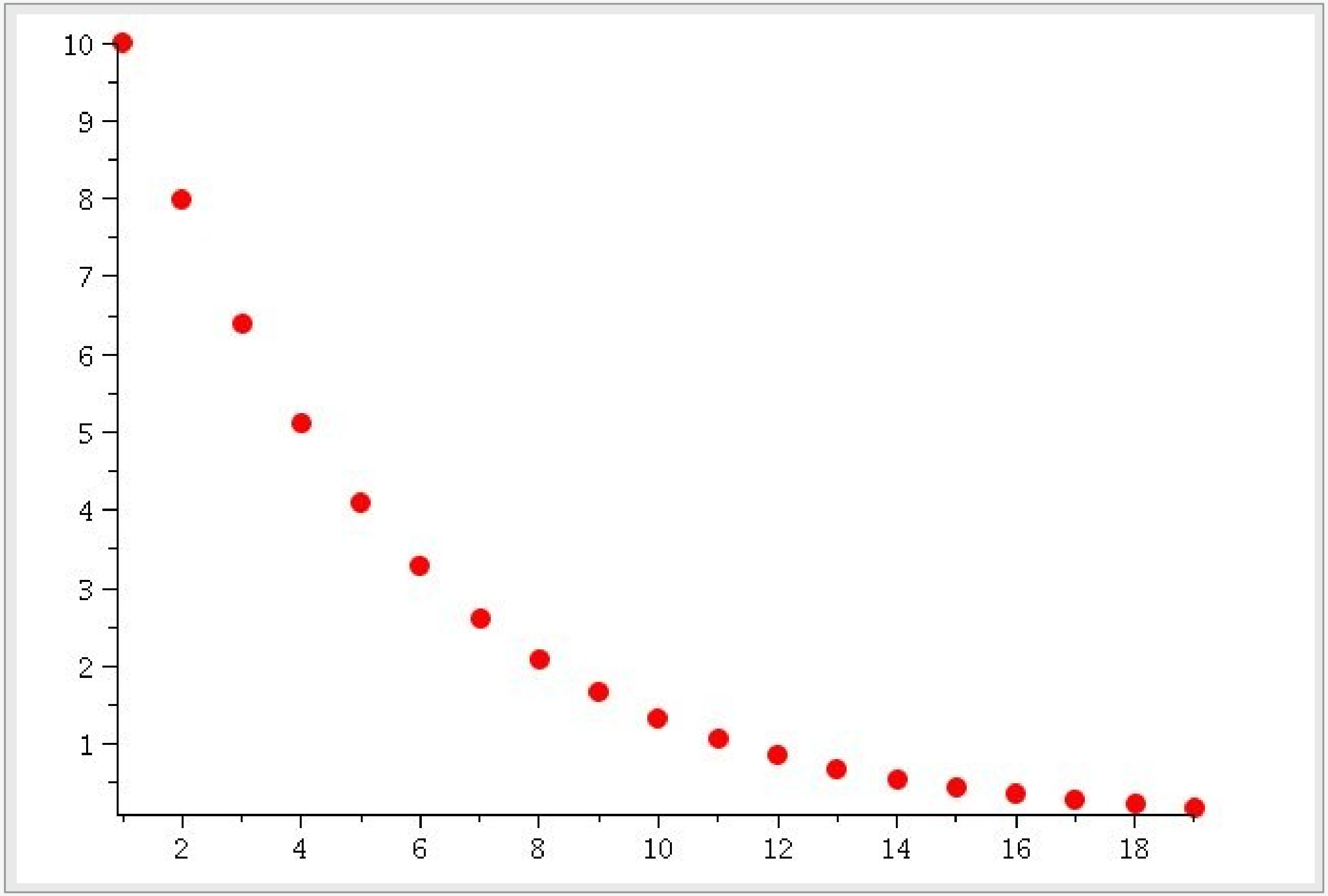


Abb. 6: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle\, 10 \cdot (0.8)^{n-1} \,\right\rangle = 10\,, \quad 2\,, \quad 8\,, \quad 6.4\,, \quad 5.12\,, \quad 4.096\,, \quad 3.277\,, \quad \ldots$$

$$s = 0\,, \qquad S = 10\,, \qquad 0 < a_n \leqslant 10$$

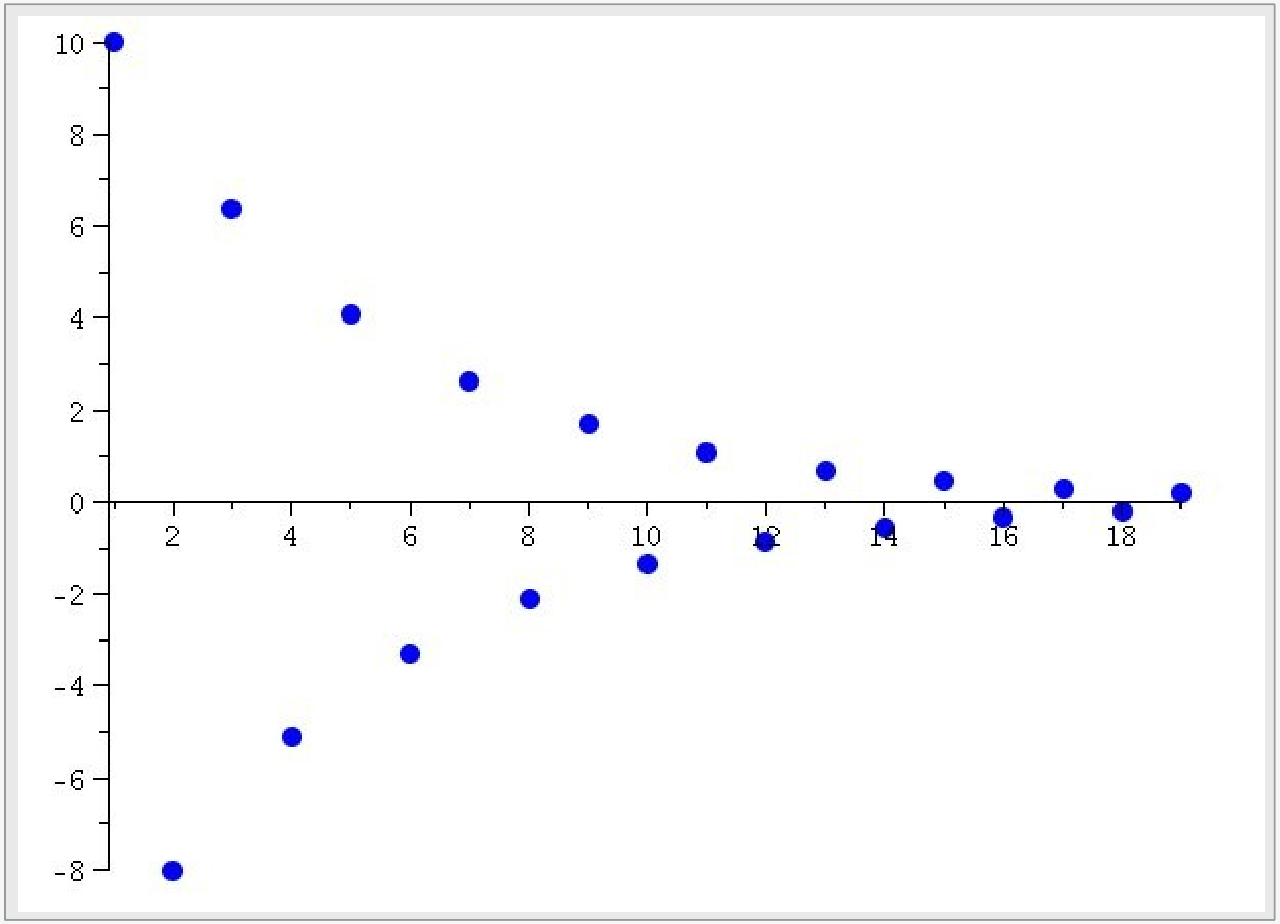


Abb. 6: Graphische Darstellung der ersten Glieder der Folge

$$\langle a_n \rangle = \left\langle\, 10 \cdot (-0.8)^{n-1} \right\rangle = 10\,,\quad 2\,,\quad -8\,,\quad 6.4\,,\quad -5.12\,,\quad 4.096\,,\quad -3.277\,,\quad \ldots$$

$$s = -8\,, \qquad S = 10\,, \qquad -8 \leqslant a_n \leqslant 10$$