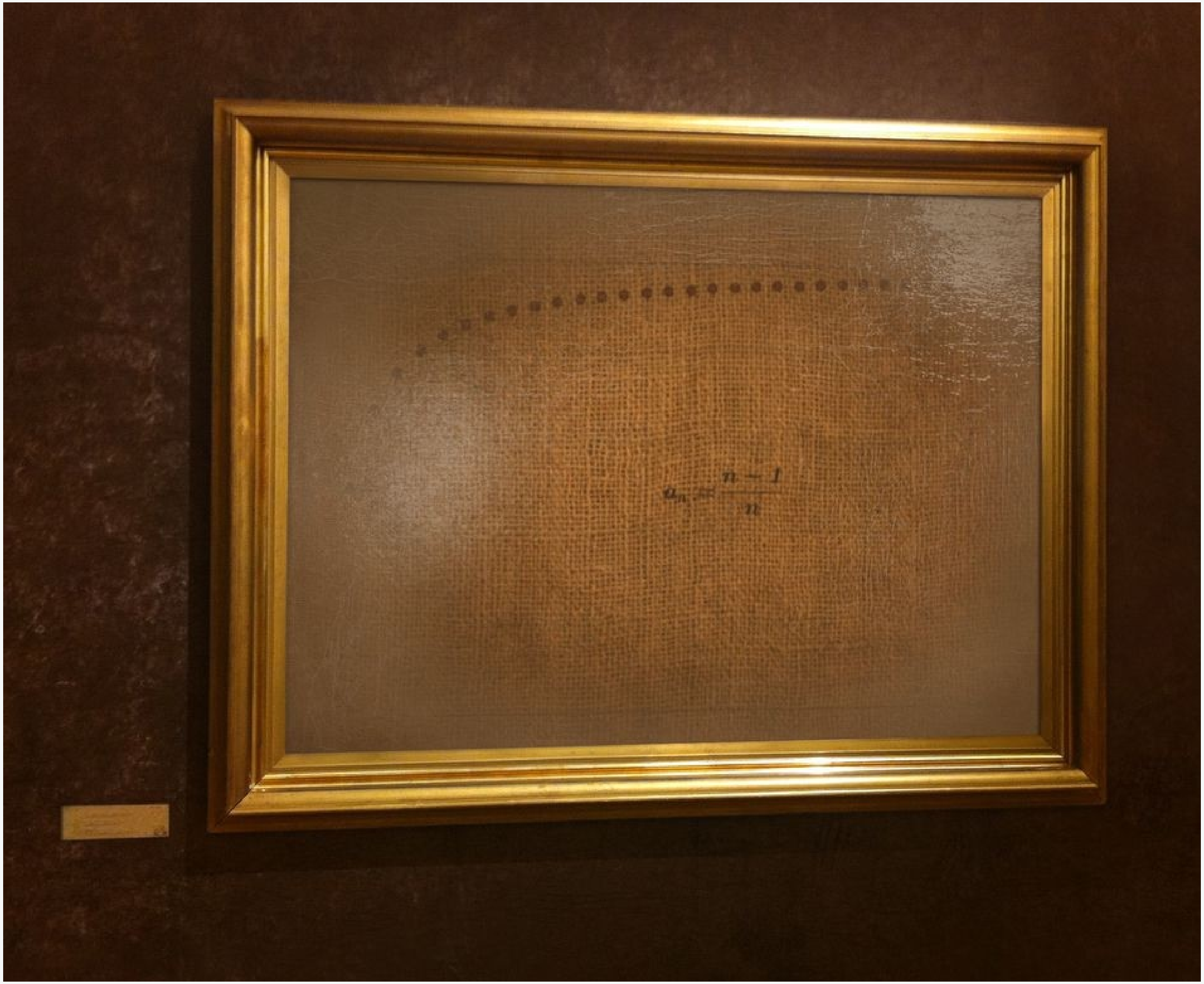


Monotonie einer Folge

Monotone Folgen

Wenn jedes Folgenglied einer Folge größer oder gleich dem vorhergehenden Folgenglied ist

$$a_{n+1} \geqslant a_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

so nennt man die Folge monoton steigend (oder monoton wachsend).

Die geometrische Folge

$$a_n = 2^{n-1},$$

die dem Beispiel über die Weizenkörner auf den Schachbrettfeldern zugrunde liegt, ist eine streng monoton steigende Folge, denn für alle Folgenglieder gilt

$$a_{n+1} = 2^n > 2^{n-1} = a_n$$

Analog zur Eigenschaft "monoton steigend" definiert man die Eigenschaft "monoton fallend".

Definition:

Eine Folge heißt

1) monoton steigend, wenn $a_{n+1} \geqslant a_n$

2) streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} > a_n$

3) monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leqslant a_n$

4) streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} < a_n$

für alle $n \in \mathbb{N}$

Monotone Folgen: Aufgaben 1, 2

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass eine Folge mit dem gemeinsamen Glied

$$a_n = \frac{n - 1}{n}$$

eine steigende Folge ist.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften der folgenden Folge mit einem gemeinsamen Glied

$$a_n = \frac{2n + 1}{n + 2}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n\,(n+1)} > 0$$

$$a_{n+1} \geqslant a_n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Diese Folge ist eine monoton steigende Folge. Die Punkte der x,y-Ebene, die n und den zugehoerigen Folgengliedern entsprechen, liegen auf der Kurve der Funktion $y=(x-1)/x$.

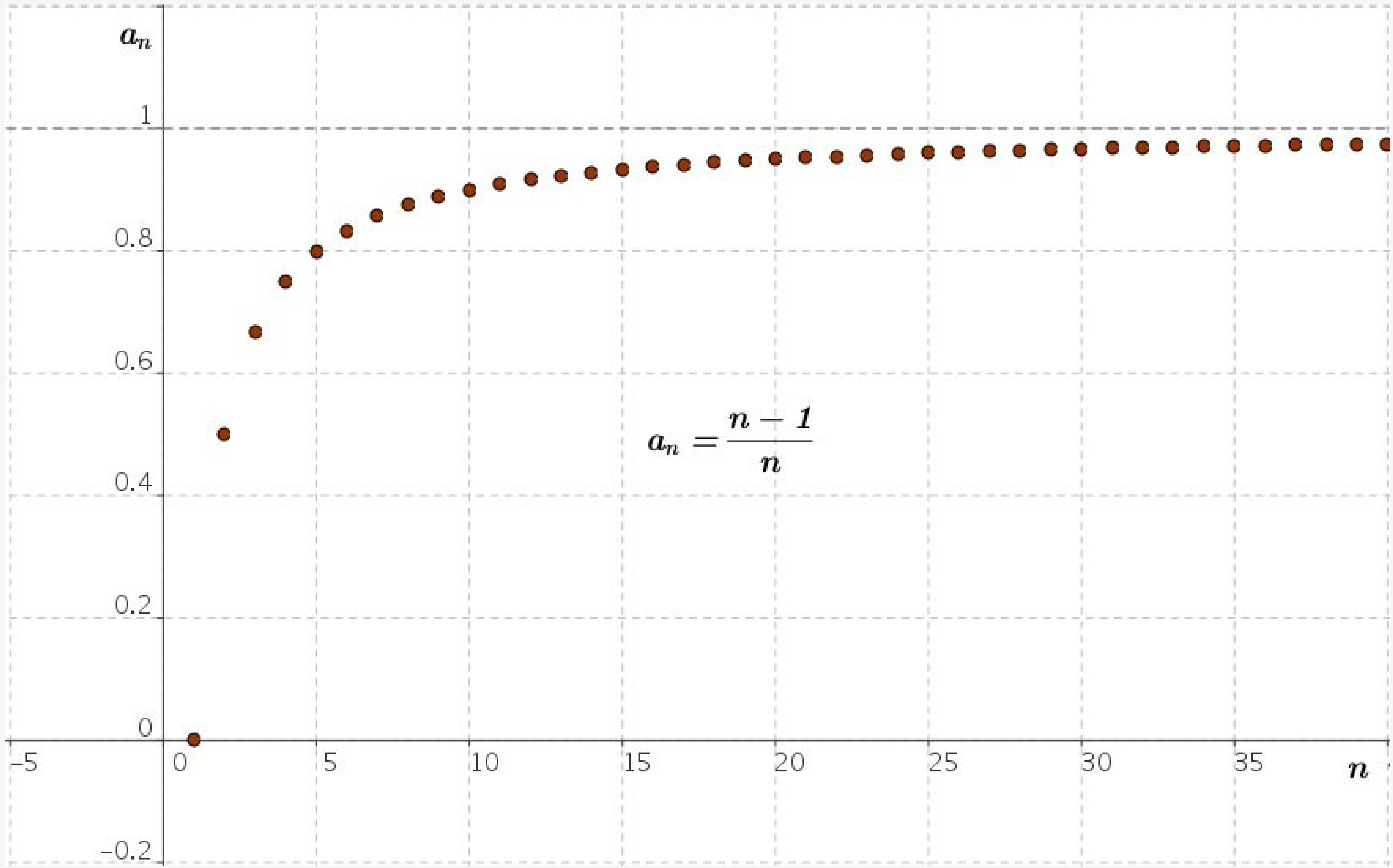
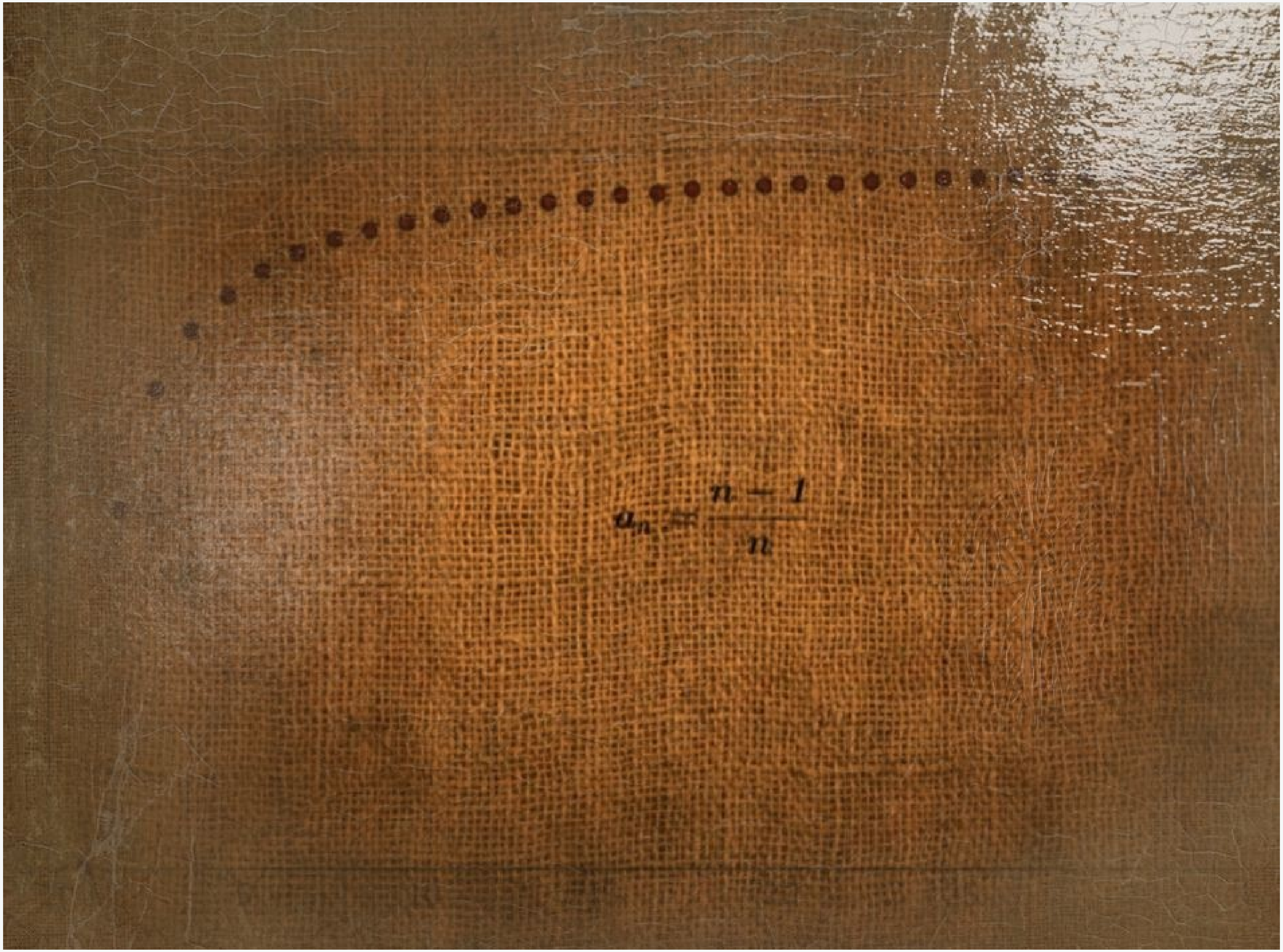


Abb. L1: Die Funktion y = (x – 1)/x mit den Punkten, die ersten Gliedern der Folge (n – 1)/n entsprechen


$a_n = \frac{n-1}{n}$

$$a_n = \frac{2n + 1}{n + 2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n + 1) + 1}{(n + 1) + 2} - \frac{2n + 1}{n + 2} = \frac{2n + 3}{n + 3} - \frac{2n + 1}{n + 2} =$$

$$= \frac{(2n + 3)(n + 2) - (2n + 1)(n + 3)}{(n + 3)(n + 2)} = \frac{3}{(n + 2)(n + 3)} > 0$$

Diese Folge ist eine monoton steigende Folge.

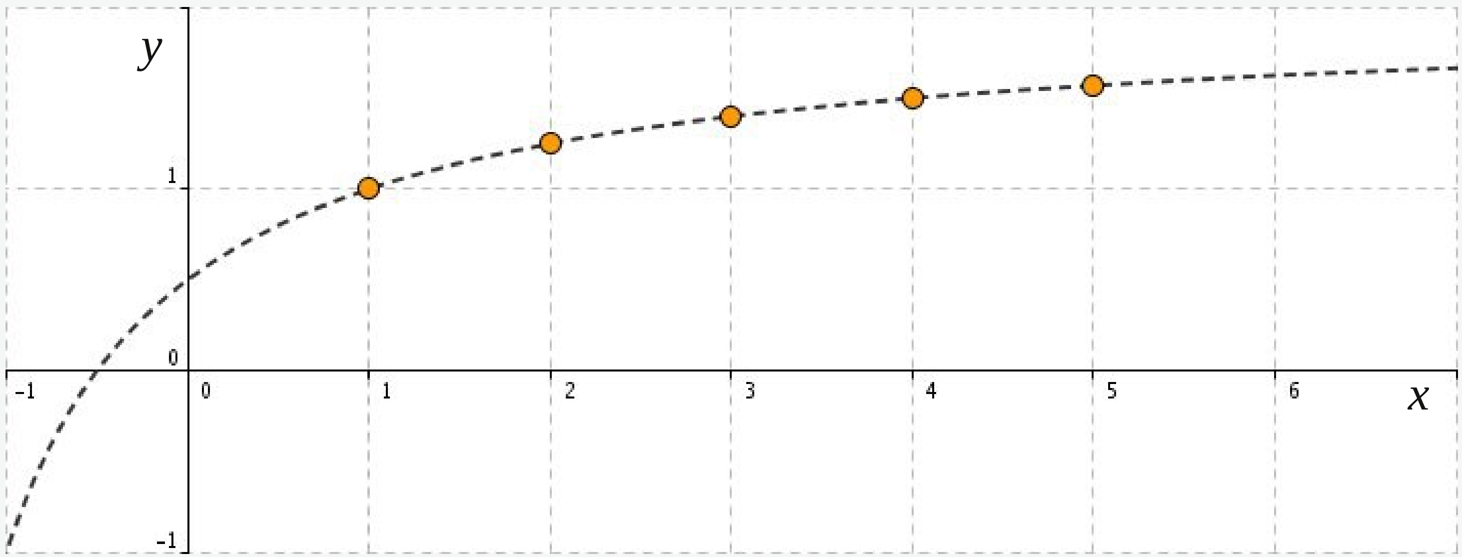


Abb. 2: Die Funktion y = (2x + 1)/(x+2) mit den Punkten, die den ersten fünf Gliedern der Folge (2n + 1)/(n+2) entsprechen

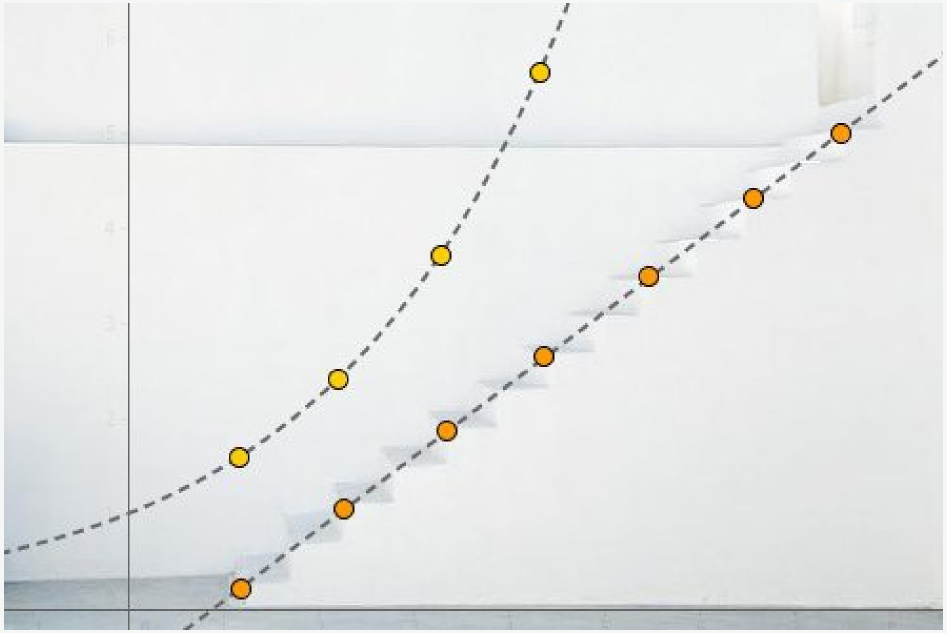


Abb. 3: Monoton steigende Folgen

Folgende Folgen sind streng monoton steigende Folgen:

$$a_n = \sqrt{n}\,, \qquad b_n = 2^{n-1}\,, \qquad c_n = \log_2 n$$

Die Folge

$$a_n = 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8, \ldots$$

ist eine monoton steigende Folge.

Monotone Folgen: Aufgaben 3, 4

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass eine Folge mit dem gemeinsamen Glied

$$a_n = -\,(n + 1)$$

eine fallende Folge ist.

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie die Monotonieeigenschaften der folgenden Folge mit einem gemeinsamen Glied

$$a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$$

$$a_n = -\,(n+1)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-(1+n+1)}{-(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1$$

Da alle Folgenglieder negativ sind, bedeutet diese Ungleichung, dass

$$a_{n+1} < a_n$$

und die Folge eine streng monoton fallende Folge ist.

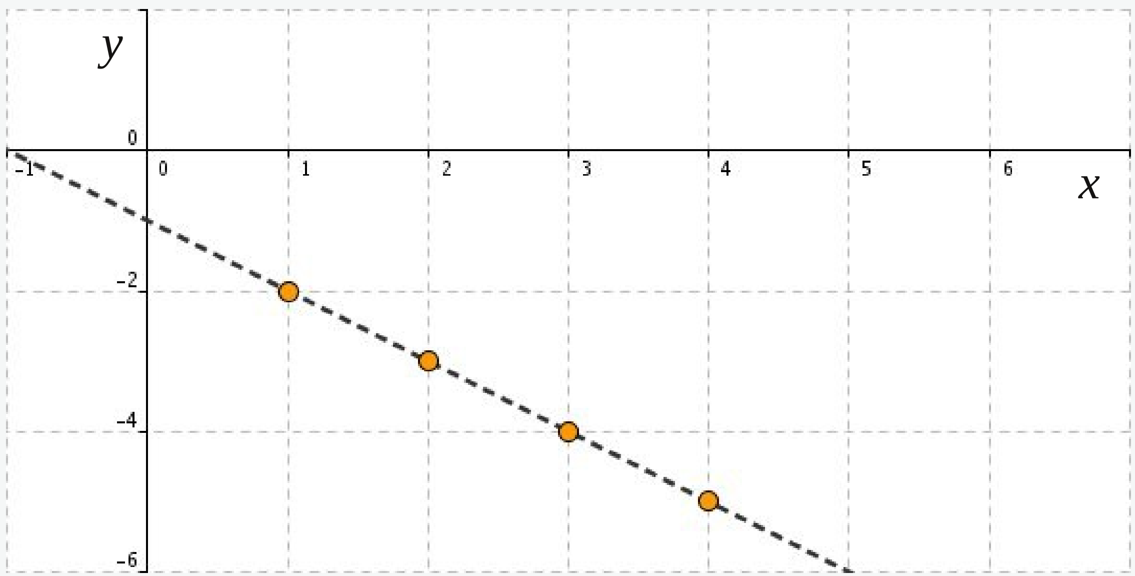


Abb. 4: Die Funktion y = - x - 1 mit den Punkten, die den ersten vier Gliedern der Folge - (n + 1) entsprechen

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \sqrt{(n+1)\,(n+2)} + \sqrt{n\,(n+2)} - (n+1) - \sqrt{n\,(n+1)} =$$

$$= \sqrt{(n+1)\,(n+2)} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt{\frac{n}{n+2}}\right) =$$

$$= \sqrt{(n+1)\,(n+2)} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}\right) =$$

$$= \sqrt{(n+1)\,(n+2)}\,\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) > 0$$

Folgende Folgen sind streng monoton fallende Folgen:

$$a_n = \frac{n+1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}, \qquad c_n = -(n^2 + n + 1)$$

Die Folge $1, \ 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots$

ist eine monoton fallende Folge.

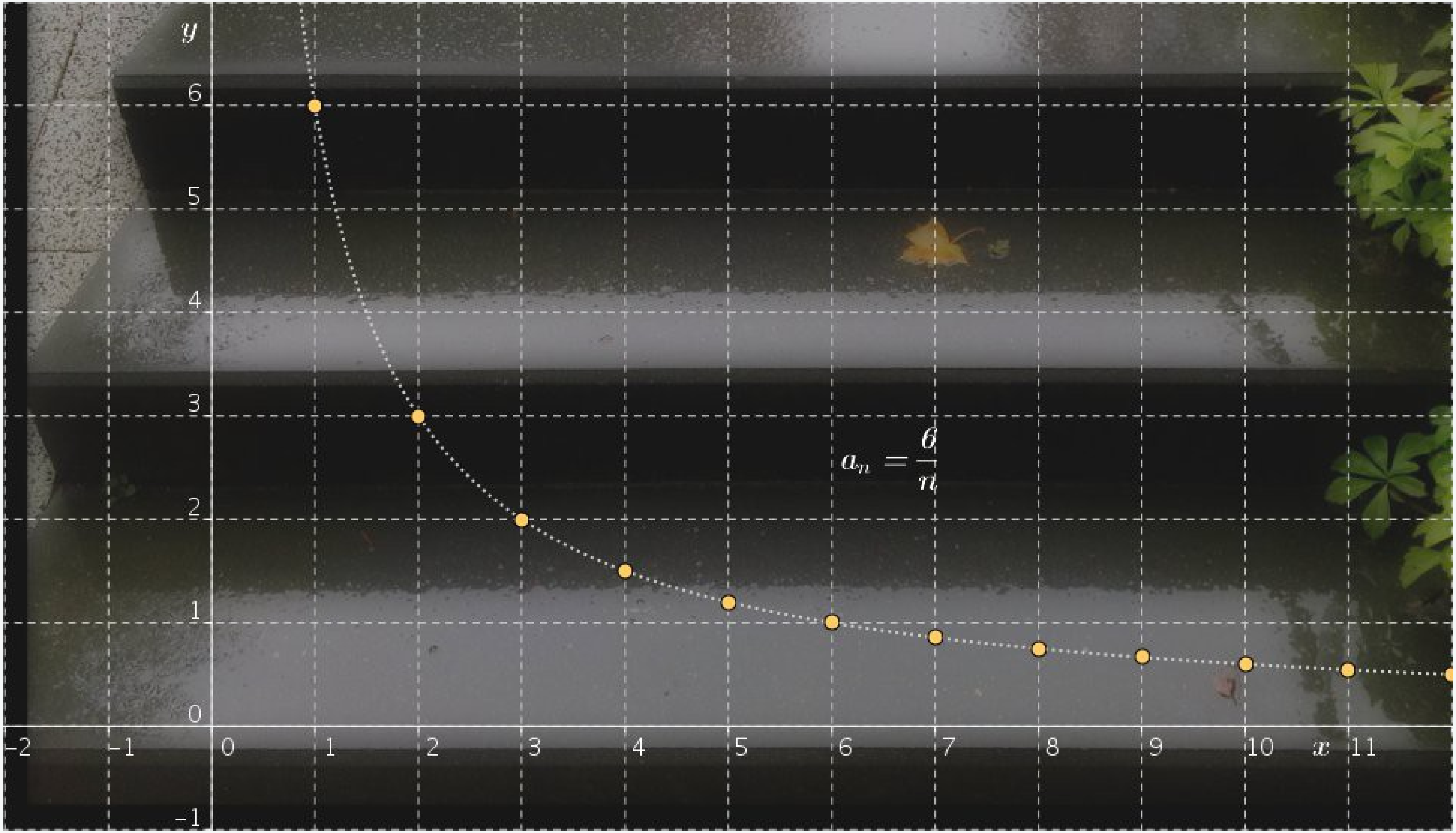


Abb.: Die Funktion y = 6/x mit den Punkten, die den ersten acht Gliedern der Folge 6/n entsprechen

Definition:

Eine Folge heißt alternierend, wenn je zwei aufeinander folgende Folgenglieder stets verschiedenes Vorzeichen haben:

$$a_{n+1} \cdot a_n < 0$$

Beispiele:

$$a_n = 6, \; -6, \; 6, \; -6, \; 6, \; -6, \; 6, \; \ldots$$

$$\langle \, b_n = (-1)^n \; 2^n \, \rangle = -2, \; 4, \; -8, \; 16, \; -32, \; \ldots$$

$$\langle \, c_n = \frac{(-1)^n}{n} \, \rangle = -1, \; \frac{1}{2}, \; -\frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; -\frac{1}{5}, \; \ldots$$

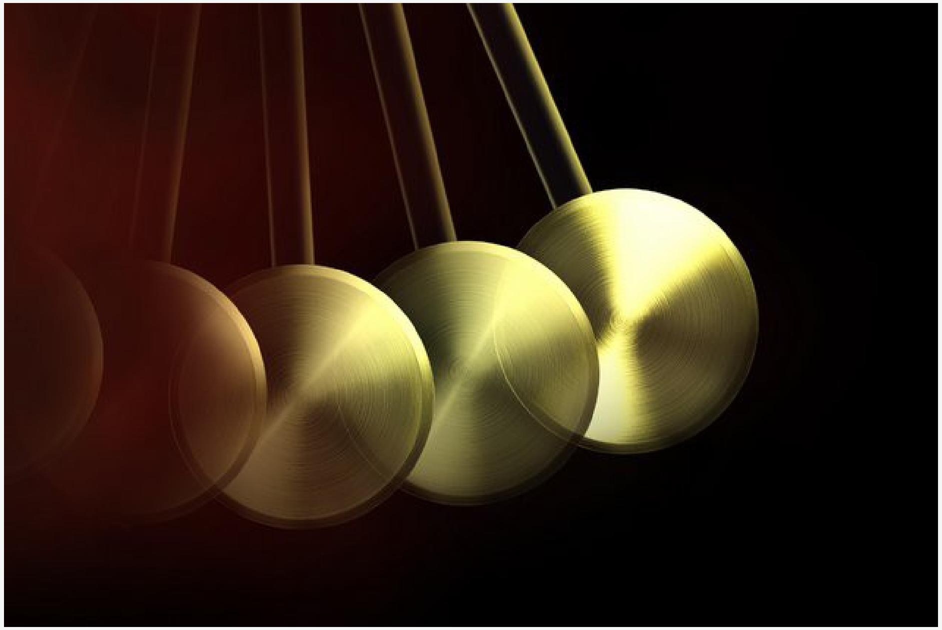


Abb. 5: Auslenkung eines Pendels aus der Ruhelage

Ein Pendel werde nach rechts um 10 cm aus seiner Ruhelage entfernt und losgelassen. Die Ausschläge nach beiden Seiten – sie heißen Amplituden – bilden dann eine Folge

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots$$

Wir unterscheiden die rechten und die linken Amplituden, indem wir die linken mit Minuszeichen versehen. Es sind also

$$a_1 , \ a_3 , \ a_5 , \ \ldots \quad \text{positiv}$$

und

$$a_2 , \ a_4 , \ a_6 , \ \ldots \quad \text{negativ}$$

Aufgrund von Reibung an der Pendelaufhängung, Luftwiderstand usw. Werden die auf a_1 folgenden Amplituden nicht mehr den Betrag der "Anfangsauslenkung" erreichen. Wir nehmen an, dass stets jeweils 80% des Betrags der vorhergehenden Amplitude erreicht werden. Dann können wir die Glieder der Folge auf folgende Weise berechnen

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = 10 \cdot (-0.8) = -8$$

$$a_3 = a_2 \cdot (-0.8) = 10 \cdot (-0.8)^2$$

$$a_4 = 10 \cdot (-0.8)^3$$

$$a_n = 10 \cdot (-0.8)^{n-1}$$

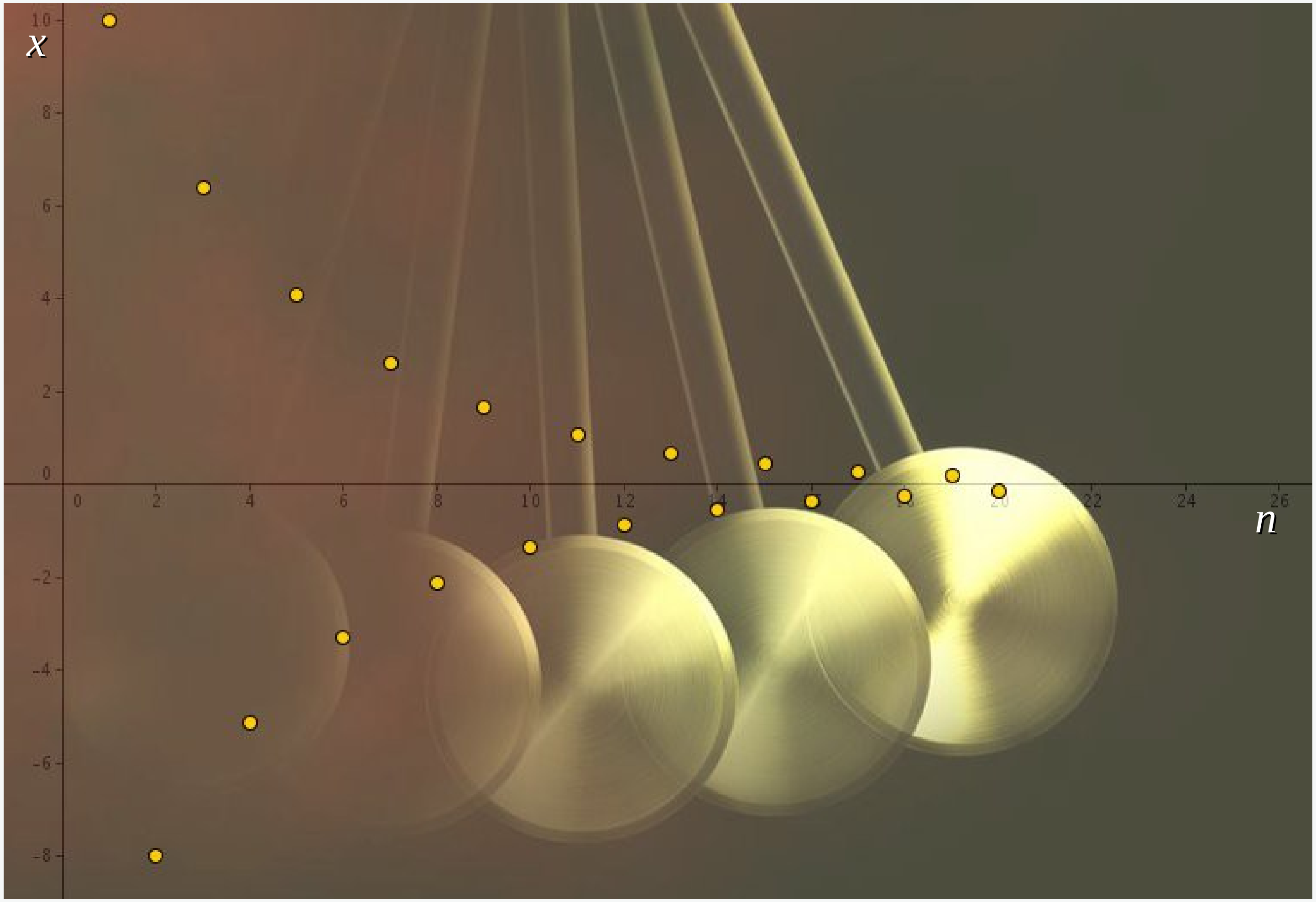


Abb. 6: Folge der Pendelausschläge

Betrachten wir die Folgenglieder mit ungeradem Index, also die Pendelausschläge nach rechts, so handelt es sich bei dieser Teilfolge um eine (streng) monoton fallende Folge. Dagegen bildet die Teilfolge der Folgenglieder mit geradem Index, also die Pendelausschläge nach links, eine (streng) monoton steigende Folge.

Es lassen sich auch Folgen angeben, die weder steigend, noch fallend, noch alternierend sind.