Potenzen mit ganzen Exponenten

Die abgekürzte Multiplikation: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$ wobei $a \in R$ und $n \geq 2$ und $n \in N$

Diese Betrachtung genügt nur für den Einstieg. Wir werden (später) Potenzen mit beliebigen Exponenten (z.B. n = $\sqrt{2}$) kennen lernen, welche nicht mehr mit einer abgekürzten Multiplikation erklärt werden können.

Die Bezeichnungen:

a^n heisst **Potenz**
a heisst **Basis**
n heisst **Exponent**

Der Spezialfall 1: $a^1 = a$

Normalerweise wird der Exponent 1 nicht geschrieben. Bei den Potenzsätzen ist die 1 jedoch wichtig.

Die Potenzsätze: wir unterscheiden 3 Fälle

Gleiche Basis: $a^n \bullet a^m$

Gemäss der abgekürzten Multiplikation gibt es n + m gleiche Faktoren, somit:

$$\boxed{a^n \bullet a^m = a^{n+m}}$$

$\frac{a^m}{a^n}$ $a \neq 0$

Hier gibt es im Zähler m und im Nenner n gleiche Faktoren. Es kann gekürzt werden:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0}$$

Es gibt nun drei Fälle

1) $m - n > 0$ Im Zähler sind mehr Faktoren als im Nenner

2) $m - n = 0$ Im Zähler und im Nenner sind gleich viele Faktoren
Es wird alles weggekürzt
Der gekürzte Wert ist 1

$$\boxed{a^0 = 1}$$

3) $m - n < 0$

Im Nenner sind mehr Faktoren vorhanden als im Zähler, der Exponent ist negativ.
Nach dem Kürzen bleibt im Zähler eine 1:

Beispiel:

$$\frac{a^5}{a^8} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$$

Nach dem Potenzsatz gilt aber auch

$$\frac{a^5}{a^8} = a^{5-8} = a^{-3}$$ Somit gilt:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} \quad a \neq 0$$

Allgemein:

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad a \neq 0}$$

Gleicher Exponent:

$a^n \bullet b^n$

Es gibt gleich viele Faktoren a und b:

$$\boxed{a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$$

Im Zähler und Nenner sind gleich viele Faktoren:

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad b \neq 0}$$

Potenzieren einer Potenz

$(a^m)^n$

Beispiel:

$(a^3)^4 = (a \cdot a \cdot a)^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a)$

Es hat 3 mal 4 gleiche Faktoren:

$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$

Allgemein:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Übertragen Sie nun alle Potenzsätze in Ihre Formelsammlung.

Die Klammern (1): $(-a)^n \neq -a^n$

$(-a)^n = [(-1)(a)]^n = (-1)^n \cdot (a)^n$

für gerade n gilt: $\boxed{(-a)^n = a^n}$ n gerade

für ungerade n gilt: $\boxed{(-a)^n = -a^n}$ n ungerade

Die Klammern (2): $\boxed{(ka)^n = k^n a^n}$

$k \cdot a^n \neq (k \cdot a)^n$

Die Klammern (3): $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \qquad b \neq 0}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^m}} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Übertragen Sie auch diese Regeln in Ihre Formelsammlung.

Besuchen Sie den Abschnitt über Potenzen im Bereich e-Learning auf meiner Homepage http://www.johnny.ch/ot