Setzt man vor oder hinter einen ausdividierten Klammerausdruck den Divisor als Faktor, erhält man den ursprünglichen Ausdruck in Produktform. Diese Maßnahme nennt man „Zerlegung in Faktoren" oder „Faktorisieren" durch Ausklammern.

Beispiel mit Lösung

Aufgabe: Zerlegen Sie die Summe $6ab + 9ac - 3a$ in Faktoren!

Lösung: Wir klammern den gemeinsamen Faktor $3a$ aus und teilen jeden Term der Summe durch den gemeinsamen Faktor:

$6ab + 9ac - 3a = 3a(2b + 3c - 1)$ Machen Sie die Probe!

Aufgaben ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

1. a) $8a - 12b$ b) $15m + 9n$ c) $21r - 14s$ d) $24u + 8v$ e) $22x - 11$

2. a) $ab + ac$ b) $bx - by$ c) $pq + qr$ d) $xy + y^2$ e) $y^2 - yz$

3. a) $15ab + 25a$ b) $18mn - 24n$ c) $27pq + 36p$ d) $21xy - 7y$ e) $8yz - 16z$

4. a) $21a^2 - 24a$ b) $32p + 40p^2$ c) $45x^2 - 36x$ d) $20y + 28y^2$ e) $12z^2 - 18z$

5. a) $16a^2b - 24ab^2$ b) $14pq^2 + 8p^2q$ c) $15u^2v - 10uv$ d) $42x^2y^2 - 49xy$

6. a) $18ax - 12ay + 24az$ b) $20pq + 5p^2q - 15pq^2$ c) $14xy^2 - 21x^2y + 7xy$

7. a) $9a^2b^2 - 6a^2b + 15ab^2$ b) $24pq^2 + 12p^2q - 4p^2q^2$ c) $16x^2y + 8xy - 24x$

8. a) $a(p+q) + b(p+q)$ b) $p(a-b) - q(a-b)$ c) $m(x+y) - n(x+y)$

▸ **9.** a) $a(c-d) + (c-d)$ b) $b(m+n) - (m+n)$ c) $(x-y)p - (x-y)$

▸ **10.** a) $a(c+d) - c - d$ b) $b(m-n) - m + n$ c) $(x+y)p - x - y$

Bei besonderen Ausdrücken lassen sich in einem ersten Schritt einzelne Faktoren teilweise ausklammern und in einem zweiten Schritt zu einem gemeinsamen Faktor mit einer Klammer zusammenfassen.

Beispiel mit Lösung

Aufgabe: Zerlegen Sie in Faktoren!

$ac + bc - ad - bd$

Lösung:

$ac + bc - ad - bd = c(a+b) - d(a+b) = (a+b)(c-d)$

Aufgaben ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

▸ **11.** a) $pr + qr + ps + qs$ b) $ax - bx + ay - by$ c) $px - qx - py + qy$

▸ **12.** a) $3ac + 6bc + ad + 2bd$ b) $a^3 + ab - 2a^2 - 2b$ c) $12px - 8qx - 3py + 2qy$

Im Abschnitt 5.3.3 hatten wir uns häufig auftretende binomische Formeln eingeprägt, um den etwas umständlichen Rechenaufwand des ausführlichen Ausmultiplizierens in diesen Fällen zu sparen. Die umgekehrte Anwendung der binomischen Formeln erlaubt es nun, entsprechende Ausdrücke in Faktoren zu zerlegen, die ihrerseits selbst Klammerausdrücke sind.

Beispiel mit Lösung

Aufgabe: Zerlegen Sie $16a^2-9b^2$ in Faktoren!

Lösung: Wir zerlegen $16a^2$ in $4a \cdot 4a$ und $9b^2$ in $3b \cdot 3b$ und schreiben entsprechend der Formel $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$16a^2-9b^2=(4a+3b)(4a-3b)$ Vergessen Sie die Probe nicht!

Aufgaben ($\mathbb{G}=\mathbb{Z}$)

1. a) a^2-25 b) m^2-1 c) $1-p^2$ d) q^2-16 e) $4-x^2$
2. a) $9a^2-4b^2$ b) $25m^2-36n^2$ c) $49p^2-81q^2$ d) $100x^2-121y^2$ e) $144y^2-169z^2$
3. a) $16a^2-49b^2$ b) $64p^2-25q^2$ c) u^2v^2-1 d) $1-4u^2v^2$ e) $x^2-y^2z^2$
4. ▸ a) a^2-a^4 b) $9b^4-4b^2$ c) $36p^2-49p^4$ d) $16q^4-25q^2$ e) $x^4y^4-z^4$

Beispiel mit Lösung

Aufgabe: Zerlegen Sie $25a^2-40ab+16b^2$ in Faktoren!

Lösung: Wir zerlegen $25a^2$ in $5a \cdot 5a$ und $16b^2$ in $4b \cdot 4b$ und stellen durch Probe fest, ob wir bei Anwendung der Formel $(a-b)^2$ den mittleren Term $-40ab$ erhalten:

$25a^2-40ab+16b^2=(5a-4b)^2$ Vergessen Sie die Probe nicht!

Aufgaben ($\mathbb{G}=\mathbb{Z}$)

5. a) $a^2+10a+25$ b) $p^2-12p+36$ c) $x^2+14x+49$ d) y^2-2y+1
6. a) $1+4a+4a^2$ b) $9-24b+16b^2$ c) $16+8x+x^2$ d) $1-10y+25y^2$
7. a) $4a^2-4ab+b^2$ b) $16p^2+24pq+9q^2$ c) $49u^2-70uv+25v^2$ d) $81x^2+36xy+4y^2$
8. a) $9a^4-12a^2+4$ b) $25m^4+40m^2+16$ c) $p^4-6p^2q^2+9q^4$ d) $36x^4+84x^2y^2+49y^4$
9. ▸ a) $16a^2+1-8a$ b) $25p^2+1+10p$ c) $64u^2+25v^2-80uv$ d) $16x^2+81y^2+72xy$

Ändert man die erste binomische Formel ein wenig ab und prägt man sich die dann dafür geltenden Gesetzmäßigkeiten ein, so gelingt damit das Faktorisieren noch weiterer Arten von Summen und Differenzen.

Beispiele mit Lösungen

Aufgaben: Bringen Sie die folgenden Summen auf die Form $(x + a)(x + b)$, d. h. stellen Sie als Produkt dar!

1. $x^2 + 4x + 3$ 2. $x^2 - 6x - 7$ 3. $x^2 - 5x + 6$ 4. $x^2 + 4x - 12$

Lösungen: Multipliziert man $(x + a)(x + b)$ aus, so erhält man $x^2 + ax + bx + ab$ oder $x^2 + (a + b)x + ab$. Man muß also zwei Zahlen suchen, deren Produkt gleich dem Glied ohne x und deren Summe gleich der Vorzahl des Gliedes mit x ist. Dies läßt sich nur bei einfachen, besonders ausgesuchten Termen durchführen.

1. $3 = \mathbf{3} \cdot \mathbf{1} = (-3)(-1)$; $4 = \mathbf{3} + \mathbf{1}$; also $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$
2. $-7 = 7 \cdot (-1) = (\mathbf{-7}) \cdot \mathbf{1}$; $-6 = \mathbf{-7} + \mathbf{1}$; also $x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$
3. $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-1)(-6) = (\mathbf{-2})(\mathbf{-3})$; $-5 = (\mathbf{-2}) + (\mathbf{-3})$; also
   $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
4. $-12 = 1 \cdot (-12) = 2 \cdot (-6) = 3 \cdot (-4) = 4 \cdot (-3) = \mathbf{6} \cdot (\mathbf{-2}) = 12 \cdot (-1)$; $4 = \mathbf{6} + (\mathbf{-2})$;
   also $x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$

Aufgaben ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

10. a) $a^2 + 8a + 15$ b) $p^2 + 9p + 18$ c) $x^2 + 7x + 6$ d) $y^2 + 5y + 4$

11. a) $b^2 - 7b + 10$ b) $m^2 - 10m + 16$ c) $q^2 - 11q + 10$ d) $z^2 - 3z + 2$

12. a) $a^2 + 2a - 8$ b) $p^2 + 6p - 16$ c) $x^2 + x - 12$ d) $y^2 + 5y - 36$

13. a) $b^2 - 2b - 24$ b) $n^2 - n - 20$ c) $q^2 - 8q - 9$ d) $z^2 - 11z - 12$

▸ **14.** a) $a^2 + 5ab + 6b^2$ b) $p^2 - 7pq + 12q^2$ c) $m^2 + 5mn - 24n^2$ d) $x^2 - xy - 6y^2$

▸ **15.** a) $8a^2 + 6ab + b^2$ b) $14m^2 - 9mn + n^2$ c) $7p^2 + 8pq + q^2$ d) $9x^2 - 10xy + y^2$

Manche Terme lassen sich durch Anwendung unterschiedlicher Einzelmaßnahmen schrittweise faktorisieren.

Beispiel mit Lösung

Aufgaben: Zerlegen Sie in Faktoren!

1. $4a^3 - 24a^2 + 36a$
2. $18a^2 - 32b^2$
3. $a^2x + 2ax - 3x$

Lösungen:

1. $4a^3 - 24a^2 + 36a = 4a(a^2 - 6a + 9) = 4a(a - 3)^2$
2. $18a^2 - 32b^2 = 2(9a^2 - 16b^2) = 2(3a + 4b)(3a - 4b)$
3. $a^2x + 2ax - 3x = x(a^2 + 2a - 3) = x(a + 3)(a - 1)$

Aufgaben ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

▸ **16.** a) $12p^2x - 60px + 75x$ b) $32ax^2 + 16axy + 2ay^2$ c) $4xy^2 - 40xyz + 100xz^2$

▸ **17.** a) $12a^2 - 3x^2$ b) $5ax^2 - 45ay^2$ c) $4a^2p^2 - 64a^2q^2$

▸ **18.** a) $b^2x + 7bx + 12x$ b) $a^2y - 9ay + 20y$ c) $2x^2z + 6xyz - 8y^2z$